

75337

**EĞRİ EKSENLİ DÜZLEMSEL KİRİŞLERİN DÜZLEM DIŞI STATİK
PROBLEMLERİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ**

75337

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mak. Müh. O. Yaşar DOĞRUER

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 04 Haziran 1998

Tezin Savunulduğu Tarih : 29 Haziran 1998

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Alaaddin ARPACI

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Tuncer TOPRAK

Prof. Dr. Mustafa GEDİKTAŞ

Alaaddin ARPACI
Tuncer TOPRAK
Mustafa GEDİKTAŞ

HAZİRAN 1998

**İ.İ. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

ÖNSÖZ

Şekil değiştiren cisimlerin ve mühendislik yapılarının önemli bir grubunu çubuklar oluşturmaktadır. Çubukların belirli bir yük etkisi altında genleşmesi, eğilmesi ve burulması problemleri, lisans dersleri arasında ‘ Cisimlerin Mukavemeti ‘ adı altında anlatılmıştır. Bunlar yapılırken, çubuk yanal boyutlarının uzunluğa göre küçük olduğu ve şekil değiştirme sırasında eksene dik kesitlerin şekil değiştirmeden sonra da eksene dik kaldığı (Euler - Bernoulli Teorisi), yani kayma şekil değiştirmelerinin sıfır olduğu varsayılmıştır.

Öte yandan, yaptığımız teknik literatür incelemesinde, Eğri Eksenli Düzlemsel Kirişlerin düzlem dışı statik problemleri konusunda birkaç yayın dışında önemli görülebilecek bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Bugüne kadar yapılan çoğu çalışmalar konuyu düzlemde incelemişlerdir. Halbuki pratikte karşılaşılan çubuklar her zaman böyle olmayabilir. Bu çalışmada, Eğri Eksenli Düzlemsel Kirişlerin düzlem dışı statik problemlerinin genel denklemleri, bu etkileri ihmal etmeden analitik olarak çözülmüştür.

Çalışmalarım sırasında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm ve yöneltici bilgilerinden yararlandığım sayın değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ ' ye, çalışmalarına her türlü değerli yardımlarıyla katkıda bulunan sayın değerli hocam Prof. Dr. Alaaddin ARPACI'ya, tüm yardımlarından dolayı Sn. Arş. Gör. Ergun BOZDAĞ'a ve hiç bir yardımını ve desteğini esirgemeyen sevgili eşim Nebile DOĞRUER ' e içtenlikle teşekkür ederim.

Haziran 1998

O. Yaşar DOĞRUER

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	ii
SEMBOL LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	vi
TABLO LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 Amaç ve Kapsam	2
BÖLÜM 2 EĞRİ EKSENLİ KİRİŞLERİN GENEL DENKLEMLERİ	3
2.1 Kiriş Statiğinin Genel Denklemleri	3
BÖLÜM 3 DÜZLEMSEL EĞRİ EKSENLİ KİRİŞLERİN DÜZLEM DIŞI EĞİLMELERİ	17
3.1 Başlangıç Değerleri Yöntemiyle Denklemlerin Çözümü	17
3.2 Çember Eksenli Dairesel Sabit Kesitli Kiriş Örneği	25
3.3 Parabol Eksenli Dairesel Değişken Kesitli Kiriş Örneği	28
3.4 Parabol Eksenli Dairesel Sabit Kesitli Kiriş Örneği	30
BÖLÜM 4 SAYISAL ÖRNEKLER	36
4.1 Ankastre-Serbest Mesnetli ve Serbest Ucundan Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan, Dairesel Sabit Kesitli Çember Eksenli Kiriş	36
4.2 İki Ucundan Ankastre Mesnetli ve Orta Noktasından Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan, Dikdörtgen Sabit Kesitli Çember Eksenli Kiriş	57
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	72
KAYNAKLAR	74

SEMBOL LİSTESİ

$A, A(x)$	: Diferansiyel denklem takımının katsayılar matrisi
A_0	: Kesit alanı
C	: Kayma rijitliği matrisi
D	: Eğilme rijitliği matrisi
Q	: Ortogonal dönüşüm matrisi
E	: Elastiklik modülü
$\vec{n}^0, \vec{b}^0, \vec{t}^0$	: Şekil değiştirmemiş kirişin kesitine bağlı eksen takımı
$\vec{n}, \vec{b}, \vec{t}$	: Şekil değiştirmiş kirişin kesitine bağlı eksen takımı
$\vec{f}(x)$	: Yayılı dış yüklerin bileşke vektörü
F	: Tekil kuvvet
G	: Kayma modülü
I_{n0}, I_{b0}, I_p	: Kesite ait alan eylemsizlik momentleri
I_{nb}, I_{bn}	: Kesite ait çarpım eylemsizlik momentleri
k_n, k_b	: Gerilmelerin kesite uniform yayılmadıklarını karakterize eden sabitler
$\vec{M}$	: Kesite etkiyen iç momentler vektörü
$\vec{m}$	: Yayılı dış momentler vektörü
$\vec{p}$	: Yayılı dış kuvvetler vektörü
$\vec{R}$	: Kesite etkiyen iç kuvvetler vektörü
$\vec{r}_0, \vec{r}$	: Şekil değiştirmiş ve değiştirmemiş kirişe ait konum vektörleri
$\vec{u} = (u, v, w)$	: Yer değiştirme vektörü ve bileşenleri

$\underline{Y}$	: Asal matris
s	: Yay uzunluğu
$\vec{y}$	: Diferansiyel denklem takımının değişkenler vektörü
$\vec{y}_0$	: Başlangıç değerleri vektörü
α_a, α_b	: Kesite ait kayma faktörleri
δ_{ij}	: Birim matris
φ	: Yay açıklığı
$\vec{\gamma}$	: Eksenel şekil değiştirme vektörü
κ_0, κ'_0	: Kiriş ekseninin eğrilik bileşenleri
ρ_0	: Düzlemsel eğri eksenli kirişin eğrilik yarıçapı
τ_0	: Kiriş ekseninin burulma açısı
$\vec{\Omega}$	: Kesitin dönme vektörü
$\vec{\omega}, \vec{\omega}_0$	: Açısal değişim vektörü
$\vec{\omega}_I$	: Birim dönme vektörü

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 Kirişin şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları	4
Şekil 2.2 Kiriş elemana etki eden dış yükler ve kesit tesirleri	9
Şekil 4.1 Ankastre-Serbest Mesnetli ve Serbest Ucundan Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan, Dairesel Sabit Kesitli Çember Eksenli Kiriş	36
Şekil 4.2 ($v - \varphi$) Değişimi	55
Şekil 4.3 ($\Omega_n - \varphi$) Değişimi	55
Şekil 4.4 ($\Omega_t - \varphi$) Değişimi	55
Şekil 4.5 ($M_n - \varphi$) Değişimi	56
Şekil 4.6 ($M_t - \varphi$) Değişimi	56
Şekil 4.7 ($R_b - \varphi$) Değişimi	56
Şekil 4.8 İki Ucundan Ankastre Mesnetli ve Orta Noktasından Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan, Dikdörtgen Sabit Kesitli Çember Eksenli Kiriş	57

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1 α_n , α_b ve k_n , k_b sabitleri	11
Tablo 4.1 İki Ucundan Ankastre Mesnetli ve Orta Noktasından Etkiyen F tekil Yükünü Taşıyan Dikdörtgen Sabit Kesitli Çember Eksenli Kirişin Orta Noktasındaki Kesite Ait Değerler	71



ÖZET

Bu çalışmada, eğri eksenli düzlemsel kirişlerin düzlem dışı statik problemleri, kayma deformasyonu ve eksen uzaması etkileri gözönüne alınarak incelenmiştir. Mevcut çalışmaların çoğu, bu etkileri ihmal etmiş ve yaklaşık yöntemler kullanmıştır.

Burada kiriş statik problemini ifade eden diferansiyel denklem takımlarının kesin çözümleri, farklı eksen eğrilerine haiz dairesel kesitli kirişler için verilmiştir. Diferansiyel denklem takımları bünyesinde yer alan integraller Mathematica programı yardımıyla çözülmüştür.

Birinci bölümde, kiriş teorisi hakkında kısa bilgi verilmiş ve çalışmanın amacı belirtilmiştir.

İkinci bölümde, eğri eksenli kirişlerin genel denklemleri verilmiştir. Statik problemi ifade eden genel denklemler, kayma deformasyonu ve eksen uzaması etkileri ihmal edilmeden verilmiştir.

Üçüncü bölümde, düzlemsel eğri eksenli dairesel kesitli bir kirişin, düzlem dışı statikğini ifade eden genel denklemlerin, başlangıç değerleri yöntemi ile çözümüne yer verilmiştir. Ayrıca, bu bölümde konu ile ilgili üç farklı örneğin;

- Çember eksenli dairesel sabit kesitli kiriş
- Parabol eksenli dairesel değişken kesitli kiriş
- Parabol eksenli dairesel sabit kesitli kiriş

genel çözümü yer almaktadır. Her bir örneğe ilişkin genel asal matris elde edilmiş olup, denklemlerde yer alan integrallerin çözümü Mathematica programı yardımıyla yapılmıştır.

Dördüncü bölümde; Ankastre-Serbest Mesnetli ve Serbest Ucundan Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan, Dairesel Sabit Kesitli Çember Eksenli Kiriş ve İki Ucundan Ankastre Mesnetli, Orta Noktasından Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan, Dikdörtgen Sabit Kesitli Kiriş olmak üzere iki farklı örneğin Mapple programı yardımıyla yapılan çözümü yer almaktadır. Ayrıca birinci örnekte, v , Ω_n , Ω_t , M_n , M_t ve R_b 'nin, çubuk eksen eğrisi üzerinde belirlenen, çeşitli ϕ açılarındaki yedi noktada değerleri hesaplanarak grafik üzerinde gösterilmiştir.

SUMMARY

ANALYTICAL SOLUTIONS OF STATIC PROBLEMS OF PLANAR CURVED BEAMS RELATE TO OUT- OF-PLANE

One of the structural elements most widely used in various engineering applications is the beams. Beams can be different forms like straight or curved. And also they can be variable cross-section. Curved beams have deep or shallow curvature and can be open or closed. Open beams are often called arches.

In this work the stress resultants and displacements (due to out-of-plane loading) of planar arches with arbitrary boundary conditions are calculated by using initial values method. The method of initial values gives the values of the displacements and stress resultants throughout the rod once the initial displacements and initial stress resultants are known.

Analytical solutions of static problems of planar arches with arbitrary boundary conditions of out-of-plane are given by considering axial and shear deformation effects.

Static analysis of naturally curved beams have many important applications in mechanical, aeronautical and civil engineering. Helicopter blades, bridges and flexible space structures are specific cases that have received considerable attention in recent years.

There are structural forms, for instance in arch bridge and shell roof construction, in which curved members are incorporated and although curved beams have been treated in various ways by several authors, the presence of curvature still appears to be considered complex. They occur frequently in highway construction, particularly in urban freeways where multilevel interchanges and elevated roundabouts are designed and built within tight geometric restrictions.

There exist no elementary method in literature which provides analytical ready-to-use expressions of curved beams of out-of-plane. But we need exact mathematical equations about curved elements. For this reason, in many engineering applications which is about curved elements relate to out-of-plane problems is used approximate calculations. Most engineers are familiar with the displacement assumptions that allow the displacements at any point in a beam to be expressed in terms of the displacements along the centroidal and shear center axes. These assumptions allow a

variety of different sets of elastic beam equations to be developed. The degree of complexity of these equations depends on the shape of the cross-section, type of loading and the specific phenomenon. The governing equations for the planar curved beam element in out-of-plane by formulating the equations by considering the initial values method.

The formulation and solution of equations of planar curved beams relate to out-of-plane are fundamental to structural engineering. Most studies on the formulation of curved beam elements relate to in plane bending and describe mainly the field consistency requirements for membrane strains and shear strains.

The purpose of this study to solve analytically the static problems of curved beam elements relate to out-of-plane by considering axial and shear deformation effects. In the literature, most of the studies uses the governing differential equations by neglecting these effects and solves them by numerical methods. Finite element method is the most common one.

In the present study, the governing differential equations are simplified for the curved beams relate to out-of-plane. The exact solutions of the simplified equations are found for the boundary value problem with arbitrary boundary conditions.

In the first chapter, a general view of curved beams and the aim of the present study are given.

There are many investigations about curved beams in the literature. Some of them are reviewed in here. However, the beam theory is considered by several authors studying on the strength of materials, elasticity and structural analysis. But the theory is simplified for arches in which different form in plane.

Most of the studies uses the governing differential equations given by Love [1], and neglects axial and shear deformations. These simplified governing differential equations are solved by using energy methods or numerical methods like finite element.

The most important study on the theory of elasticity of curved beams belongs to Love [1]. In this study, the beam is represented by a space curve whose every point is coupled with a rigid orthonormal vector diad.

Nagorananarayana and Prathap [2], have studied the extension of some concepts to the consistency requirements called for when the quadratic curved beam element is designed to be applied in situations where it must undergo out-of-plane bending and torsion under the action of shear forces. In this study there has three nodes, allowing a quadratic isoparametric representation and includes shear deformation according to the Timoshenko beam theory. Although the exactly integrated form of this element does not have severe locking problems, it does have a loss of accuracy and spurious force and moment oscillations if the transverse shear strain field is not modelled in a consistent fashion. Field-inconsistent representations of the out-of-plane transverse shear strain will result in a loss of efficiency and introduce spurious oscillations in the

bending moment, torsional moment and shear force. The optimal field-consistent assumed strain interpolation for shear is derived. The issues involved in the formulation of this quadratic curved beam element are critically examined to show that two consistency conditions must be assured in describing the constrained out-of-plane transverse shear strain field and the term describing the curved centroidal axis appearing in the denominator of all the strain terms.

Although the exactly integrated form of this element does not have severe locking problems, it does have a loss of accuracy and spurious force and moment oscillations if the transverse shear strain field is not modelled in a consistent fashion. Field-inconsistent representations of the out-of-plane transverse shear strain will result in a loss of efficiency and introduce spurious oscillations in the bending moment, torsional moment and shear force.

Tüfekçi [3], has give the analytical solutions of static and dynamic problems of planar curved beams in plane. In that work, the stress resultants and displacements (due to in plane loading) of planar arches with arbitrary boundary conditions are calculated by using initial values method. Principal matrix and its inverse has been obtained for parabolic arches as well.

İnan [4], has considered the beam as a space curve whose every point is coupled with a rigid orthonormal vector diad and the boundary value problem has been established in this curve.

In Sundaramoorthy's [5] study, the thin-walled curved beam equations are formulated using the principle of virtual work. The formulation and solution of equations of thin-walled curved beams of open section are given related to in plane. The purpose of that study is to derive the consistent governing equations based on the large displacement theory for solving curved beam problems. This theory is well-established from a set of simple and realistic assumptions which are normally used in thin-walled straight beam analysis and based on the variational principles.

Artan [6], have used the initial values method to obtain the stress resultants and displacements (due to in plane loading) of circular rods with variable cross-section. In this study, the principal matrix and its inverse required having for the applicability of the method of initial values are obtained. The expression of the solution of a circular rod loaded by both continuous and singular loads is given in a compact form. Irrespective of the number of singular loads and the degree of redundancy the system of algebraic equations to be solved contains no more than three variables as shown. Two examples exhibiting the advantages and priorities of the method are solved in full detail. And also the program of Mathematica is used throughout.

Pantazopoulou [8], have used small deformation theory to derive polynomial interpolation functions for finite element analysis of three dimensional (3-D) curved beams. The performance of low-order polynomials combined with selectively reduced integration is evaluated under torsional and membrane "locking" conditions. Low-order polynomials are also used in a three-field mixed formulation; in this approach,

the constraint equations of the problems that result from the nonlinear geometry of the curved beam are enforced using collocation. The partial decoupling that stems from the assumption that one principal axis of the cross section lies in the plane of geometric curvature of the member was adopted. Based on this premise, sets of coupled interpolation functions were derived for FE formulation of two or three noded, three-dimensional curved beams; in addition to the variational form of the equilibrium equations, the proposed functions also satisfy the constraint equations of the problem at a number of collocation points, which are also referred to as discrete constraints. Results obtained using these functions are compared against analytical solutions and other alternative FE formulations that use low-order polynomials in combination with selectively reduced integration. The typical element considered is a circular arc; curved beams with a more complex geometry can be approximated with a number of such elements.

Most Finite element models dealing with curved members analyze either the out-of-plane or the in-plane behaviour. Analysis of curved structures was typically carried out by idealizing the curved member as a sequence of short straight segments in the past. This approach has been attractive among bridge engineers, because it uses three dimensional beam frame elements which are commonly available in most structural analysis programs. This approach introduces approximations in the geometry of the beam end, in particular, it renders the normals to the centerline, at the nodes, indeterminate.

In turn this produces jumps for some stress resultants at the nodes. Accordingly, the true value of such stress resultants, at the nodes, must be estimated by an averaging scheme. Such scheme provides another source of error. These errors are in addition to those inherent in the derivation of the element equations. Errors due to approximations of geometry and those inherent in the finite element method combine algebraically. That is, in principle it is possible for geometric errors to compensate in part for the errors in the finite element approximations. At the expense of increasing the number of elements, one can be minimized by developing elements which at least allow constant values for curvatures and torsion of the centerline. In this way the overall errors can be effectively reduced.

The governing differential equations of spatially curved and twisted beams are given for the static problems in the second chapter. The beam is represented by a space curve whose every point is coupled with a rigid orthonormal vector diad. The vectors are chosen to be perpendicular to the tangent vector of the space curve in the initial state and they represent the cross-section of the beam. In deformed configuration, these directors still remain unit and perpendicular each other because of the assumption of a rigid cross-section.

But, in contrast with Kirchhoff's beam theory, the restrictions of perpendicular cross-section and inextensible arc length are removed. The displacement of the point on the space curve and the rotation of the cross-section constitute the displacement field of the beam. The change in the tangent vector from the initial state and the rate of change vector of the deformed director diad are chosen to represent the state of strain.

In the third chapter, the governing of differential equations of static problems of planar curved beams are given. Exact solutions are found for the boundary value problem with arbitrary boundary conditions. A solution procedure is described to obtain fundamental matrix for circular cross-section and arbitrary boundary conditions. In this chapter, there are three examples for parabolic and circular curved beams.

Fundamental matrix is obtained analytically for the circular and the parabolic beams. All the integrals are calculated and the element of the matrix are obtained as a function of the arc angle. In this chapter, three different examples with arbitrary boundary conditions are given. And also their fundamental matrixes are obtained analytically.

The displacement and the stress resultants can be analytically calculated along the curved beam element by the method of initial values. The expressions contain only six initial values as the data to be known.

In the fourth chapter, Two numerical examples are solved by using the program of Mapple. These examples are solved for the planar curved beam with circular and rectangular cross-section with cantilever concentrated load and its fundamental matrix is obtained. In the first example, the beam built-in at one end, loaded singular vertical force at the other end. In the second example, the beam built-in at two ends and loaded singular vertical force at the middle of the beam.

The solution is describe the beams curvature and circular cross-section. The concentrated force acts at arbitrary direction at any point on the beam. Three different solutions and two numerical examples are given. All the integrals are calculated by using the program of mathematica.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Elastisite teorisi, dış kuvvetlerin etkisi altında bulunan bir elastik cismi, gerilme, şekil değiştirme ve yerdeğiştirme açısından sistematik bir şekilde inceleyen bir bilim dalıdır. Lisans dersi olarak verilmekte olan ‘ Cisimlerin Mukavemeti ‘ pratik uygulama için uygun formüllere daha fazla önem verir ve daha elemanter teoriye sahiptir. Elemanter Cisimlerin Mukavemeti her problemi ayrı ayrı inceler. Bununla beraber pratik öneme sahiptirler ve çıkartılmış formüller çok sınırlayıcı şartlar altında uygulanırlar. Böylece pek çok halde sadece yaklaşık olarak doğrudurlar ve elastisite teorisinin daha hassas araştırmalarıyla ortaya çıkan şartları sık sık sağlamazlar. Öte yandan, ortaya çıkan sınır değer problemlerinin oldukça karmaşık olması nedeniyle, çok basit durumlar dışında, elastisite teorisi yardımı ile çubukların hesabı hemen hemen imkansızdır. Bu yüzden, çubuk teorisinde iki değişik yöntem izlenmektedir:

-Birinci yöntem, çubuğun özelliklerini kullanarak üç boyutlu ortamda yazılan genel sınır değer problemine uygun yaklaşık çözüm aranmasıdır.

-İkinci yöntem ise çubuğu bazı kısıtlamalara uyan bir parametreye bağlı yönlendirilmiş ortam olarak ele alıp sınır değer problemini bu ortamda kurmaktır.

Elemanter cisimlerin mukavemeti ve elastik çubuk teorisi, basitleştirici kabuller yapar ve problemleri parça parça ele alırlar. Bunlar, konunun başında bir yandan çubuk eksenli, öte yandan çubuk kesiti ile ilgili özel varsayımlar yapmakta ve sadece bu durumlara uygulanabilecek denklem ve çözümler vermektedir.

Basitleştirmeler, yalnız çubuk geometrisi ile ilgili değildir. Çubuğa etki eden dış kuvvetlerle ilgili çeşitli varsayımlar da yapılmaktadır. Özel yükleme durumları için ayrı yöntemler verilmektedir.

Eğri eksenli düzlemsel kirişlerin düzlem dışı statik problemleri konusunda dünya literatüründe bir kaç çalışma dışında öneme haiz bir çalışmaya rastlanmamıştır. Zaman ve bilimsel kaynak yetersizliği nedeniyle planlandığı halde konunun dinamik incelemesi yapılamamıştır. Dairesel sabit kesitli bir kiriş için, eksen eğrisi ne olursa olsun, asal matris elde edilmiş, konuyla ilgili üç farklı örnek çözülmüştür. Ayrıca; iki farklı yükleme ve mesnetleme etkisi altındaki, daireesel ve dikdörtgen sabit kesitli çember eksenli düzlemsel bir kirişin kesin çözümü Mapple programı yardımıyla elde edilmiştir.

1.1. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmada giriş bölümünde belirtilenlere ters olarak elastik çubuk teorisinin genel denklemlerinin kesin çözümü elde edilmiştir.

Daha önce de belirtildiği gibi, bu çalışmada eğri eksenli düzlemsel kirişlerin düzlem dışı statik problemleri, çoğu çalışmada ihmal edilen, eksen uzaması ve kayma deformasyonu etkilerini ihmal etmeden analitik olarak elde edilmiş, denklemlerde geçen integraller Mathematica programı yardımıyla çözülmüştür. Yapılan kaynak taramasında, çubuk teorisinin genel denklemlerine çeşitli bileştirici varsayımlarla ve yaklaşık yöntemlerle çözüm arandığı görülmüştür. Çubuğun geometrisi, mesnetleme şartları ve yükleme durumu ile ilgili basitleştirici varsayımlar yapan çalışmalarda, özellikle son yıllarda, sonlu eleman yöntemi başta olmak üzere çeşitli yaklaşık sayısal yöntemler kullanılarak çözümler verilmiştir. Bu çalışmada, çubuk ekseninin eğrisi, mesnetleme şartları ve yükleme durumu belirli olan dairesel sabit kesitli her çubuğa uygulanabilecek bir genel çözüm elde edilmeye çalışılmıştır. Birinci mertebeden, değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımı olan genel denklemlerin kesin çözümü elde edilmiştir. Dolayısıyla özel hallere ait problemlerin hep aynı denklemlere dayanılarak çözülmesi sağlanmıştır. En genel durumdaki düzlemsel eğri eksenli kirişin, kendi düzlemi dışındaki eğilmelerine ait tüm büyüklüklerin, kiriş eksen eğrisi üzerindeki değişimlerinin belirlenebilmesi amaçlanmıştır.

BÖLÜM 2

EĞRİ EKSENLİ KİRİŞLERİN GENEL DENKLEMLERİ

2.1. Kiriş Statiğinin Genel Denklemleri

Kiriş eksen eğrisi, üzerindeki, $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(s)$ konum fonksiyonu ile belirlenen her noktaya, birbirine dik $\vec{n}^0(s)$ ve $\vec{b}^0(s)$ birim vektörleri bağlı, bir parametrelili yönlendirilmiş ortam olarak ele alınmaktadır. s parametresi, başlangıç durumunda, yay uzunluğudur. Bu iki vektöre dik olan $\vec{t}^0(s)$ birim vektörü, başlangıçta, eğrinin teğeti ile çakışmaktadır ve;

$$\begin{aligned}\vec{t}^0(s) &= \vec{n}^0 \times \vec{b}^0 \\ \vec{t}^0(s) &= \frac{d\vec{r}_0(s)}{ds}\end{aligned}\tag{2.1}$$

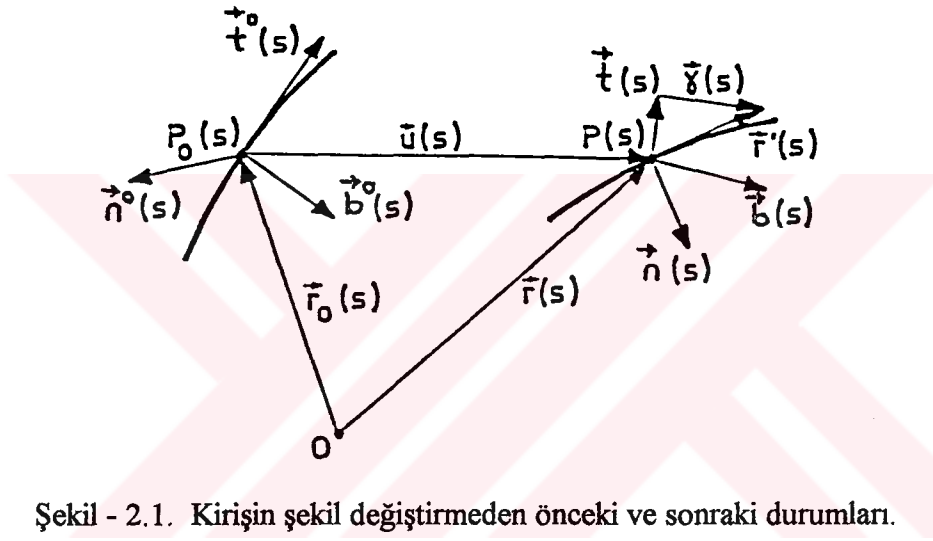
şeklinde tarif edilmektedir. $\vec{n}^0(s)$, $\vec{b}^0(s)$ kesit vektörleri, sırasıyla kiriş eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularıdır ve kesidin asal eksenleriyle çakışmayabilir. Bu durumda, aralarındaki ilişkiyi belirleyecek bir fonksiyona gerek duyulacaktır. Burada, bu doğrultuların çakıştığı durum gözönüne alınacaktır. Fakat denklemler, çakışmadığı durum için çıkartılacak, daha sonra gerekli düzenleme yapılacaktır.

Kirişin yüksüz ve gerilmesiz olduğu ve yer değiştirmeye başladığı başlangıç durumu için $\vec{r}_0(s)$, $\vec{n}^0(s)$ ve $\vec{b}^0(s)$ vektörleri bilinmektedir. Kiriş şekil değiştirdikten sonra, geometriyi $\vec{r}(s)$, $\vec{n}(s)$ ve $\vec{b}(s)$ vektörleri belirlemektedir. Şekil değiştirmeden sonraki kesit vektörleri $\vec{n}(s)$ ve $\vec{b}(s)$, yine birim vektörler olup birbirlerine diktirler. Ancak, başlangıçtaki teğet birim vektörü, $\vec{n}(s)$ ve $\vec{b}(s)$ vektörlerine dik kalmasına rağmen, artık ne şekil değiştirmiş eksen eğrisine teğet ne de birim vektör olma şartı vardır

(Bkz. Şekil-2.1). Böylece, kiriş dik kesitinin rijit olması varsayımı yapılmaktadır. Yani, dik kesit ötelenir ve döner; ancak, herhangi bir deformasyona uğramaz. Serbestçe dönebilme yeteneği nedeniyle,

$$\frac{d\vec{r}(s)}{ds} \neq \alpha \cdot \vec{t}(s) \quad (2.2)$$

olacak, dik kesit şekil değişiminden sonra kiriş eksenine dik kalmayacaktır. Bu, kayma deformasyonu etkisiyle ortaya çıkan haldir. Ayrıca artık s parametresi yay uzunluğuna eşit olmadığından $\vec{r}'(s)$ vektörü şekil değiştirmiş eğriye teğet olmakla birlikte birim vektör olmayabilir.



Şekil - 2.1. Kirişin şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları.

Şekil - 2.1 ' de kirişin şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları, ilgili büyüklüklerle birlikte gösterilmiştir. Buradaki (⁰) üst indisi, şekil değiştirmemiş durumu belirtmektedir.

Kirişin yer değiştirme durumu iki vektörle tanımlanabilir:

- Eksen üzerindeki noktanın yer değiştirme vektörü

$$\vec{u}(s) = \vec{r}(s) - \vec{r}_0(s) \quad (2.3)$$

- Rijit cisim gibi hareket ettiği varsayılan dik kesitin dönme vektörü

Aslında, rijit cismin sonlu dönmeleri, vektörle ifade edilemez. Fakat burada yer ve şekil değiştirmeler küçük varsayılarak dönme, bir vektörle belirlenecektir.

Ortogonal olan $\vec{n}^0, \vec{b}^0, \vec{t}^0$ vektör üçlüsü, yine kendisi gibi ortogonal olan vektör üçlüsüne;

$$\begin{aligned}\vec{n}(s) &= Q_{11}\vec{n}^0(s) + Q_{21}\vec{b}^0(s) + Q_{31}\vec{t}^0(s) \\ \vec{b}(s) &= Q_{12}\vec{n}^0(s) + Q_{22}\vec{b}^0(s) + Q_{32}\vec{t}^0(s) \\ \vec{t}(s) &= Q_{13}\vec{n}^0(s) + Q_{23}\vec{b}^0(s) + Q_{33}\vec{t}^0(s)\end{aligned}\quad (2.4)$$

şeklinde, Q ortogonal dönüşüm matrisi ile dönüşmektedir. Bu matrisin ;

$$Q_{ji} = \delta_{ij} + W_{ij} \quad \delta_{ij} : \text{Birim matris} \quad i,j = 1,2,3 \quad (2.5)$$

olarak parçalanması durumunda, (2.4) eşitliği ;

$$\begin{aligned}\vec{n}(s) &= \vec{n}^0(s) + [W_{11}\vec{n}^0(s) + W_{21}\vec{b}^0(s) + W_{31}\vec{t}^0(s)] \\ \vec{b}(s) &= \vec{b}^0(s) + [W_{12}\vec{n}^0(s) + W_{22}\vec{b}^0(s) + W_{32}\vec{t}^0(s)] \\ \vec{t}(s) &= \vec{t}^0(s) + [W_{13}\vec{n}^0(s) + W_{23}\vec{b}^0(s) + W_{33}\vec{t}^0(s)]\end{aligned}\quad (2.6)$$

biçiminde yazılabilir. Dönüşüm matrisinin ortogonallığı kullanılarak;

$$W_{ij} + W_{ji} + W_{ki} W_{kj} = 0 \quad (2.7)$$

eşitliği elde edilir. Yer ve şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla;

$$\begin{aligned}\|\vec{n}(s) - \vec{n}^0(s)\| &= \|W_{11}\vec{n}^0(s) + W_{21}\vec{b}^0(s) + W_{31}\vec{t}^0(s)\| \\ &\leq \|W_{11}\| \|\vec{n}^0(s)\| \|W_{21}\| \|\vec{b}^0(s)\| \|W_{31}\| \|\vec{t}^0(s)\| \\ \|\vec{b}(s) - \vec{b}^0(s)\| &= \|W_{12}\vec{n}^0(s) + W_{22}\vec{b}^0(s) + W_{32}\vec{t}^0(s)\| \\ &\leq \|W_{12}\| \|\vec{n}^0(s)\| \|W_{22}\| \|\vec{b}^0(s)\| \|W_{32}\| \|\vec{t}^0(s)\| \\ \|\vec{t}(s) - \vec{t}^0(s)\| &= \|W_{13}\vec{n}^0(s) + W_{23}\vec{b}^0(s) + W_{33}\vec{t}^0(s)\| \\ &\leq \|W_{13}\| \|\vec{n}^0(s)\| \|W_{23}\| \|\vec{b}^0(s)\| \|W_{33}\| \|\vec{t}^0(s)\|\end{aligned}$$

$$\|\vec{n}(s) - \vec{n}^0(s)\| \leq \|W_{ji}\| \equiv \varepsilon$$

$$\|\vec{b}(s) - \vec{b}^0(s)\| \leq \|W_{ji}\| \equiv \varepsilon$$

$$\|\vec{t}(s) - \vec{t}^0(s)\| \leq \|W_{ji}\| \equiv \varepsilon \quad (2.8)$$

olacaktır. ε değerinin küçük olması nedeniyle $\varepsilon^2 \approx 0$ alınabilir. Böylece (2.7) eşitliğindeki çarpım sıfır olacaktır ve bu eşitlik,

$$W_{ij} + W_{ji} \cong 0 \quad (2.9)$$

şekline dönüşecektir. Böylece, küçük yer ve şekil değiştirmeler için, W_{ij} bir antisimetrik matris olabilecektir. Antisimetrik bir matris için;

$$\begin{aligned} (W_{11}\vec{n}^0 + W_{21}\vec{b}^0 + W_{31}\vec{t}^0) &= \vec{\Omega} \times \vec{n}^0 \\ (W_{12}\vec{n}^0 + W_{22}\vec{b}^0 + W_{32}\vec{t}^0) &= \vec{\Omega} \times \vec{b}^0 \\ (W_{13}\vec{n}^0 + W_{23}\vec{b}^0 + W_{33}\vec{t}^0) &= \vec{\Omega} \times \vec{t}^0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

özelliğini sağlayan bir $\vec{\Omega}$ vektörü bulunabilir. Çubuğun dönme vektörü olan $\vec{\Omega}(s)$ ile (2.6) eşitlikleri ;

$$\begin{aligned} \vec{n}(s) &= \vec{n}^0(s) + \vec{\Omega}(s) \times \vec{n}^0(s) \\ \vec{b}(s) &= \vec{b}^0(s) + \vec{\Omega}(s) \times \vec{b}^0(s) \\ \vec{t}(s) &= \vec{t}^0(s) + \vec{\Omega}(s) \times \vec{t}^0(s) \end{aligned} \quad (2.11)$$

şekline dönüşür. $\vec{\Omega}(s)$ dönme vektörü, ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönmeyi belirten vektördür.

Kirişin şekil değiştirme durumu da iki vektörle tanımlanabilir.

- Birincisi, $\vec{\gamma}$ ekstenel şekil değiştirme vektörüdür. Kirchhoff çubuk teorisinde özdeş olarak sifira eşit sayılan bu vektör, eksen eğrisinin boy değişimini ve eksen eğrisi ile dik kesit arasındaki kaymaları belirlemektedir. $\vec{\gamma}$ ekstenel şekil değiştirme vektörü, şekil değiştirmeden sonraki yer vektörünün türevi ile dik kesit normali arasındaki farktır ve;

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{r}}{ds} - \vec{t}^0 \quad (2.12)$$

şeklinde tarif edilmektedir.

İkinci şekil değiştirme vektörü, literatürde iki değişik şekilde verilmektedir. Mühendisliğe yönelik eserlerde, birim dönme vektörü denen ve;

$$\vec{\omega}_I = \frac{d\vec{\Omega}}{ds} \quad (2.13)$$

ifadesiyle belirlenen $\vec{\omega}_1$ vektörü kullanılmaktadır. Bu durumda, ilgili bünye denklemi;

$$\vec{M} = D \vec{\omega}_1 \quad (2.14)$$

şeklinde basit olarak yazılabilmektedir. Burada, $\vec{M}$ kesite etkiyen momentlerin bileşke vektörü, D ise eğilme rijitliği matrisidir.

Diğer bazı eserlerde ise, ikinci şekil değiştirme vektörü olarak $\vec{\omega}$ açısal değişim vektörü kullanılmaktadır. Bu vektör, üçlü eksen takımının çubuk eksen eğrisi üzerinde birim uzunluk kadar ilerletildiğinde açısal değişimi belirleyen vektör olarak tarif edilmektedir. Bileşenleri, kiriş ekseninin eğriliklerini ve burulmasını veren bu vektör,

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{\omega} \times \vec{n} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\omega} \times \vec{b} \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{\omega} \times \vec{t} \quad (2.15)$$

olarak tarif edilmektedir. Açısal değişim vektörünün şekil değiştirme büyüklüğü olarak kullanılması, genelleştirmeye ve bazı ters problemlerin çözümüne, şekil değiştirmiş kirişin geometrisini tanımaya olanak sağlamaktadır. Bunun yanı sıra, denklemleri önemli ölçüde karmaşıktır. Bu da, kullanıcıyı, çok küçük olan kayma ve uzama etkilerini hesaplara katmanın getireceği faydayı araştırmaya itmektedir.

Yer ve şekil değiştirme büyüklükleri tanımlandıktan sonra, çubuk teorisinin $\vec{M}$, $\vec{R}$, $\vec{u}$, $\vec{\Omega}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\omega}$ olarak bilinen altı bilinmeyen, iki yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntısı, iki denge denklemi ve iki bünye denklemi yardımıyla çözülebilir.

- **Yer değiştirme - şekil değiştirme bağıntıları** : Yer değiştirme vektörünü tanımlayan (2.3) ifadesi türetilerek, (2.1), (2.11) ve (2.12) ifadelerinden faydalanılırsa,

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \vec{\Omega} \times \vec{t}^0 + \vec{\gamma} \quad (2.16)$$

şeklinde, ilk yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntısı elde edilmiş olur. (2.11) ifadesi türetilerek elde edilen,

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{n}}{ds} &= \frac{d\vec{n}^0}{ds} + \frac{d\vec{\Omega}}{ds} \times \vec{n}^0 + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{n}^0}{ds} \\
\frac{d\vec{b}}{ds} &= \frac{d\vec{b}^0}{ds} + \frac{d\vec{\Omega}}{ds} \times \vec{b}^0 + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{b}^0}{ds} \\
\frac{d\vec{t}}{ds} &= \frac{d\vec{t}^0}{ds} + \frac{d\vec{\Omega}}{ds} \times \vec{t}^0 + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{t}^0}{ds}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

eşitliklerinde, açısal değişim vektörleri yerleştirilerek,

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} \times \vec{n} &= \vec{\omega}_0 \times \vec{n}^0 + \frac{d\vec{\Omega}}{ds} \times \vec{n}^0 + \vec{\Omega} \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{n}^0) \\
\vec{\omega} \times \vec{b} &= \vec{\omega}_0 \times \vec{b}^0 + \frac{d\vec{\Omega}}{ds} \times \vec{b}^0 + \vec{\Omega} \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{b}^0) \\
\vec{\omega} \times \vec{t} &= \vec{\omega}_0 \times \vec{t}^0 + \frac{d\vec{\Omega}}{ds} \times \vec{t}^0 + \vec{\Omega} \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{t}^0)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

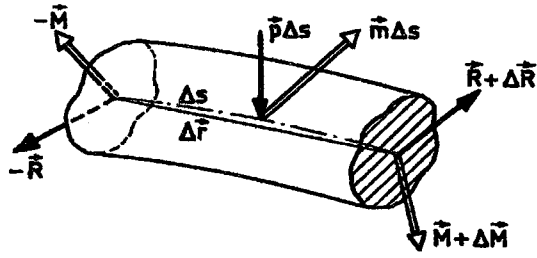
ifadeleri bulunur. (2.11) ifadesi ve vektörel çarpımın $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ özelliği kullanılarak ;

$$\begin{aligned}
(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0 - \frac{d\vec{\Omega}}{ds} + \vec{\omega}_0 \times \vec{\Omega}) \times \vec{n}^0 &= (\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) \times (\vec{n}^0 \times \vec{\Omega}) \\
(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0 - \frac{d\vec{\Omega}}{ds} + \vec{\omega}_0 \times \vec{\Omega}) \times \vec{b}^0 &= (\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) \times (\vec{b}^0 \times \vec{\Omega}) \\
(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0 - \frac{d\vec{\Omega}}{ds} + \vec{\omega}_0 \times \vec{\Omega}) \times \vec{t}^0 &= (\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) \times (\vec{t}^0 \times \vec{\Omega})
\end{aligned} \tag{2.19}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada, şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla, eşitliğin sağ tarafı sıfır olarak alınabilir. Böylece sol taraftaki parantezin iinin sıfır olması gerekecek ve ikinci bağıntı;

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_0 \times \vec{\Omega} \tag{2.20}$$

şeklinde elde edilecektir.



Şekil - 2.2. Kiriş elemanına etki eden dış yükler ve kesit tesirleri.

- **Denge denklemleri** : Birim uzunluktaki kirişe etkiyen dış kuvvetler ve momentler sırasıyla $\vec{p}(s)$ ve $\vec{m}(s)$ şeklinde iki fonksiyonla belirlenmiştir. $\vec{R}$ ve $\vec{M}$ vektörleri, sırasıyla, kesite etkiyen iç kuvvetlerin ve momentlerin vektörel toplamını göstermek üzere, Şekil-2.2' deki elemana ait denge denklemleri,

$$- \vec{R} + \vec{R} + \Delta\vec{R} + \vec{p}\Delta s = 0$$

$$- \vec{M} + \vec{M} + \Delta\vec{M} + \vec{m}\Delta s + \Delta\vec{r} \times (\vec{R} + \Delta\vec{R}) = 0 \quad (2.21)$$

olarak yazılabilir. Gereken sadeleştirmeler yapılır ve $(\Delta s \rightarrow 0)$ için limit alınır,

$$\frac{d\vec{R}}{ds} + \vec{p} = 0$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t}^0 \times \vec{R} + \vec{m} = 0 \quad (2.22)$$

şeklinde denge denklemleri elde edilir.

- **Bünye denklemleri** : **D** ve **C** kirişe ait dönme ve kayma rijitlik matrislerini göstermek üzere, bünye denklemleri,

$$\vec{M} = \mathbf{D} (\vec{\omega} - \vec{\omega}_0 - \vec{\Omega} \times \vec{\omega}_0)$$

$$\vec{R} = \mathbf{C} \vec{\gamma} \quad (2.23)$$

eşitlikleri ile ifade edilirler.

Böylece kiriş teorisinin genel denklemleri,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{u}}{ds} + \vec{t}^0 \times \vec{\Omega} - \vec{\gamma} &= 0 \\
 \frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} + \vec{\omega}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{\omega} &= 0 \\
 \frac{d\vec{R}}{ds} + \vec{p} &= 0 \\
 \frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t}^0 \times \vec{R} + \vec{m} &= 0 \\
 \vec{M} &= \mathbf{D} (\vec{\omega} - \vec{\omega}_0 - \vec{\Omega} \times \vec{\omega}) \\
 \vec{R} &= \mathbf{C} \vec{\gamma}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

şeklinde yazılabilir. Çeşitli özelliklere sahip olan $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ matrislerinin ikisi de simetriktir. Böylece, rijitlik matrislerinin birisini belirlemek için 9 yerine 6 koordinatın belirlenmesi yeterli olur.

Koordinat eksen takımı değiştikçe belirli bir ilişkiyle transformasyona uğrayan bu matrisler, özel takımlarda ifade edilirse çok basitleşirler. $\vec{n}^0$, $\vec{b}^0$, $\vec{t}^0$ eksen takımı ele alınırsa, bu matrisler;

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} C_{nn} & C_{nb} & 0 \\ C_{bn} & C_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & C_{tt} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} D_{nn} & D_{nb} & 0 \\ D_{bn} & D_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & D_{tt} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

şeklinde gösterilebilir.

Eğer $\vec{n}^0$, $\vec{b}^0$ eksenleri, kesidin simetri eksenleriyle çakışırsa, matrisler şu şekli alır;

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} C_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & C_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & C_{tt} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} D_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & D_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & D_{tt} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Kesit belirlendiğinde, bu matrislerin bileşenleri;

$$\begin{aligned}
 D_{nn} &= EI_{n0} & D_{nb} &= EI_{nb} & D_{bn} &= EI_{bn} \\
 D_{bb} &= EI_{b0} & D_{tt} &= GI_p \\
 C_{nn} &= \frac{1}{k_n} GA_0 & C_{bb} &= \frac{1}{k_b} GA_0 & C_{tt} &= EA_0
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

şeklinde ifade edilebilir. Simetrik olmayan kesitlerin kayma gerilmelerini hesaplarken mutlaka matematik elastisite teorisi kullanılmaktadır. Burada, E ve G mazemenin elastiklik ve kayma modüllerini, I_{n0} , I_{b0} kesit eylemsizlik momentlerini, I_{nb} kesidin çarpım eylemsizlik momentini, I_p kesidin polar eylemsizlik momentini, A kesit alanını ve k_n , k_b ise gerilmelerin kesite üniform olarak yayılmadıklarını karakterize eden sabitlerdir. Bu sabitlerin daha çok bilinenleri;

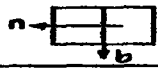
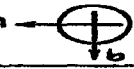
$$\tau_{tn} = \alpha_n \frac{F_n}{A} \quad \tau_{tb} = \alpha_b \frac{F_b}{A} \tag{2.28}$$

şeklinde ifade edilmektedir. k_n ve k_b ise;

$$\gamma_n = k_n \frac{F_n}{GA} \quad \gamma_b = k_b \frac{F_b}{GA} \tag{2.29}$$

olarak verilmektedir. Bu sabitler ; Tablo-1' de çeşitli kesitler için verilmiştir.

Tablo - 2.1 : α_n , α_b ve k_n , k_b sabitleri.

Kesit	α_n	α_b	k_n	k_b
	3/2	3/2	6/5	6/5
	4/3	4/3	10/9	10/9
	2.6	2.5	2.10	2.20

(2.24) denklemlerinin son ikisinden;

$$\begin{aligned}\vec{\omega} - \vec{\omega}_0 - \vec{\Omega} \times \vec{\omega}_0 &= \mathbf{D}^{-1} \vec{M} \\ \vec{\gamma} &= \mathbf{C}^{-1} \vec{R}\end{aligned}\quad (2.30)$$

eşitlikleri elde edilir. Bunlar, (2.24) ifadelerinin ilk ikisinde yerine konursa;

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}}{ds} + \vec{t}^0 \times \vec{\Omega} - \mathbf{C}^{-1} \vec{R} &= 0 \\ \frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \mathbf{D}^{-1} \vec{M} &= 0 \\ \frac{d\vec{R}}{ds} &= -\vec{p} \\ \frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t}^0 \times \vec{R} &= -\vec{m}\end{aligned}\quad (2.31)$$

denklemlerine ulaşılır. Buradaki $\vec{M}$, $\vec{R}$, $\vec{u}$, $\vec{\Omega}$, $\vec{p}$ ve $\vec{m}$ vektörleri, şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla, şekil değiştirmemiş kiriş eksenine yerleştirilmiş $\vec{n}^0$, $\vec{b}^0$, $\vec{t}^0$ eksen takımında;

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u \vec{n}^0 + v \vec{b}^0 + w \vec{t}^0 \\ \vec{\Omega} &= \Omega_n \vec{n}^0 + \Omega_b \vec{b}^0 + \Omega_t \vec{t}^0 \\ \vec{R} &= R_n \vec{n}^0 + R_b \vec{b}^0 + R_t \vec{t}^0 \\ \vec{M} &= M_n \vec{n}^0 + M_b \vec{b}^0 + M_t \vec{t}^0 \\ \vec{p} &= p_n \vec{n}^0 + p_b \vec{b}^0 + p_t \vec{t}^0 \\ \vec{m} &= m_n \vec{n}^0 + m_b \vec{b}^0 + m_t \vec{t}^0\end{aligned}\quad (2.32)$$

şeklinde ifade edilebilirler.

Ekseni herhangi bir uzaysal eğri olan kiriş için, kesit asal eksenleri ile kiriş eksen eğrisinin normal ve binormal eksenlerinin çakışmaması durumunda, açısal değişim vektörünün,

$$\vec{\omega}_0 = \kappa_0 \vec{n}^0 + \kappa_0' \vec{b}^0 + \tau_0 \vec{t}^0 \quad (2.33)$$

olduğu bilinmektedir. Burada ; κ_0 , $(\vec{b}^0 - \vec{t}^0)$ düzlemindeki eğrilik bileşeni, κ'_0 , $(\vec{n}^0 - \vec{t}^0)$ düzlemindeki eğrilik bileşeni, τ_0 ise eğrinin burulma açısıdır.

Böylece, (2.32) denklemlerindeki büyüklüklerin türevleri hesaplanırken,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{n}}{ds} &= \vec{\omega}_0 \times \vec{n}^0 \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= \vec{\omega}_0 \times \vec{b}^0 \\ \frac{d\vec{t}}{ds} &= \vec{\omega}_0 \times \vec{t}^0\end{aligned}\quad (2.34)$$

eşitliklerinden faydalanılacaktır. Bu ifadeler yardımıyla, türevler oluşturularak, (2.31) denklemleri skaler büyüklükler cinsinden şu şekilde ifade edilebilir :

$$\begin{aligned}\frac{du}{ds} - \tau_0 v + \kappa'_0 w - \Omega_b - \frac{C_{bb}R_n}{C_{nn}C_{bb}} - \frac{C_{nb}R_b}{C_{nb}C_{bn}} &= 0 \\ \frac{dv}{ds} - \kappa_0 w + \tau_0 u + \Omega_n - \frac{C_{bn}R_n}{C_{nb}C_{bn}} - \frac{C_{nn}R_b}{C_{nn}C_{bb}} &= 0 \\ \frac{dw}{ds} - \kappa'_0 u + \kappa_0 v - \frac{R_t}{C_u} &= 0 \\ \frac{d\Omega_n}{ds} - \tau_0 \Omega_b + \kappa'_0 \Omega_t - \frac{D_{bb}M_n}{D_{nn}D_{bb}} - \frac{D_{nb}M_b}{D_{nb}D_{bn}} &= 0 \\ \frac{d\Omega_b}{ds} - \kappa_0 \Omega_t + \tau_0 \Omega_n - \frac{D_{bn}M_n}{D_{nb}D_{bn}} - \frac{D_{nn}M_b}{D_{nn}D_{bb}} &= 0 \\ \frac{d\Omega_t}{ds} - \kappa'_0 \Omega_n + \kappa_0 \Omega_b - \frac{M_n}{D_{tt}} &= 0 \\ \frac{dR_n}{ds} - \tau_0 R_b + \kappa'_0 R_t + p_n &= 0 \\ \frac{dR_b}{ds} - \kappa_0 R_t + \tau_0 R_n + p_b &= 0 \\ \frac{dR_t}{ds} - \kappa'_0 R_n + \kappa_0 R_b + p_t &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dM_n}{ds} - \tau_0 M_b + \kappa'_0 M_t - R_b + m_n &= 0 \\
\frac{dM_b}{ds} - \kappa_0 M_t + \tau_0 M_n + R_n + m_b &= 0 \\
\frac{dM_t}{ds} - \kappa'_0 M_n + \kappa_0 M_b + m_t &= 0
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Eğer, kesit asal eksenleri, eksen eğrisinin normal ve binormal eksenleri ile çakışiyorsa;

$$\kappa_0 = 0 \quad \kappa'_0 = 1/\rho_0 \quad C_{nb} = C_{bn} = 0 \quad D_{nb} = D_{bn} = 0 \tag{2.36}$$

olacak ve (2.35) denklemleri ;

$$\begin{aligned}
\frac{du}{ds} - \tau_0 v + \frac{w}{\rho_0} - \Omega_b - \frac{R_n}{C_{nn}} &= 0 \\
\frac{dv}{ds} + \tau_0 u + \Omega_n - \frac{R_b}{C_{bb}} &= 0 \\
\frac{dw}{ds} - \frac{u}{\rho_0} - \frac{R_t}{C_{tt}} &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{ds} - \tau_0 \Omega_b + \frac{\Omega_t}{\rho_0} - \frac{M_n}{D_{nn}} &= 0 \\
\frac{d\Omega_b}{ds} + \tau_0 \Omega_n - \frac{M_b}{D_{bb}} &= 0 \\
\frac{d\Omega_t}{ds} - \frac{\Omega_n}{\rho_0} - \frac{M_t}{D_{tt}} &= 0 \\
\frac{dR_n}{ds} - \tau_0 R_b + \frac{R_t}{\rho_0} + p_n &= 0 \\
\frac{dR_b}{ds} + \tau_0 R_n + p_b &= 0 \\
\frac{dR_t}{ds} - \frac{R_n}{\rho_0} + p_t &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dM_n}{ds} - \tau_0 M_b + \frac{M_t}{\rho_0} - R_b + m_n &= 0 \\
\frac{dM_b}{ds} + \tau_0 M_n + R_n + m_b &= 0 \\
\frac{dM_t}{ds} - \frac{M_n}{\rho_0} + m_t &= 0
\end{aligned} \tag{2.37}$$

şeklinde sadeleşecektir. Böyle bir kirişin, düzlemsel eğri eksenli olması durumunda ise, eksen eğrisinin burulma açısı da sıfır olur. Bu durumda, (2.37) denklemleri daha da sadeleşerek ;

$$\begin{aligned}
\frac{du}{ds} + \frac{w}{\rho_0} - \Omega_b - \frac{R_n}{C_m} &= 0 & \frac{dR_n}{ds} + \frac{R_t}{\rho_0} + p_n &= 0 \\
\frac{dv}{ds} + \Omega_n - \frac{R_b}{C_{bb}} &= 0 & \frac{dR_b}{ds} + p_b &= 0 \\
\frac{dw}{ds} - \frac{u}{\rho_0} - \frac{R_t}{C_{tt}} &= 0 & \frac{dR_t}{ds} - \frac{R_n}{\rho_0} + p_t &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{ds} + \frac{\Omega_t}{\rho_0} - \frac{M_n}{D_m} &= 0 & \frac{dM_n}{ds} + \frac{M_t}{\rho_0} - R_b + m_n &= 0 \\
\frac{d\Omega_b}{ds} - \frac{M_b}{D_{bb}} &= 0 & \frac{dM_b}{ds} + R_n + m_b &= 0 \\
\frac{d\Omega_t}{ds} - \frac{\Omega_n}{\rho_0} - \frac{M_t}{D_{tt}} &= 0 & \frac{dM_t}{ds} - \frac{M_n}{\rho_0} + m_t &= 0
\end{aligned} \tag{2.38}$$

şekline dönüşür. Burada; düzlem içindeki eğilmelerle ilgili büyüklüklerle, düzlem dışındaki eğilmelerle ilgili büyüklüklerin aynı denklemlerde birlikte bulunduğu görülmektedir. Dolayısıyla, düzlemsel eğri eksenli kirişin düzlem dışındaki eğilmelerini (kendi düzlemine dik doğrultudaki) ifade eden denklemlerde, yay uzunluğu yerine $ds = \rho_0 d\varphi$ eşitliği konarak düzenlenirse;

$$\frac{dv}{d\varphi} + \rho_0(\varphi) \Omega_n - \frac{\rho_0(\varphi)}{C_{bb}(\varphi)} R_b = 0$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \frac{\rho_0(\varphi)}{D_m(\varphi)} M_n = 0$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - \frac{\rho_0(\varphi)}{D_u(\varphi)} M_t = 0$$

$$\frac{dR_b}{d\varphi} + p_0(\varphi) p_b = 0$$

$$\frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - \rho_0(\varphi) R_b + \rho_0(\varphi) m_n = 0$$

$$\frac{dM_t}{d\varphi} - M_n + \rho_0(\varphi) m_t = 0 \quad (2.39)$$

şeklinde elde edilirler.



BÖLÜM 3

DÜZLEMSEL EĞRİ EKSENİ KİRİŞLERİN DÜZLEM DIŞI EĞİLMELERİ

3.1. Başlangıç Değerleri Yöntemiyle Denklemlerin Çözümü

Eğri eksenli kirişlerin düzlem dışı eğilmelerini veren (2.39) denklemleri, birinci mertebeden, lineer diferansiyel denklem takımıdır ve;

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x) \vec{y} + \vec{f}(x) \quad (3.1)$$

şeklinde, matrisel diferansiyel denklem olarak ifade edilebilirler. Burada; $\vec{y}$, 6 elemanlı değişkenler vektörünü, $\mathbf{A}(x)$, 6x6 elemanlı katsayılar matrisini, $\vec{f}(x)$ ise 6 elemanlı yayılı dış yüklerin bileşke vektörünü göstermektedir. Böyle bir denklemin çözümü, $\vec{y}_0 = \vec{y}(x_0)$ başlangıç değeri bilinmek üzere;

$$\vec{y}(x) = \mathbf{Y}(x, x_0) \vec{y}_0 + \mathbf{Y}(x, x_0) \int_{x_0}^x \mathbf{Y}^{-1}(\xi, x_0) \vec{f}(\xi) d\xi \quad (3.2)$$

olarak ifade edilmektedir [3]. Burada; $\mathbf{Y}(x, x_0)$, x_0 referans koordinatındaki asal matristir. Eğer, $\vec{f}(x)$ vektörü özdeş olarak sıfır ise, yani kiriş üzerinde herhangi bir yayılı kuvvet veya eğilme momenti yoksa, kirişin düzlem dışı eğilmelerini ifade eden denklemler;

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x) \vec{y} \quad (3.3)$$

tipinde bir homojen matrisel diferansiyel denkleme dönüşür. Böyle bir kiriş, tekil kuvvet ve momentlerle yüklüdür. Bu durumda çözüm fonksiyonu ise;

$$\vec{y}(x) = \underline{Y}(x, x_0) \vec{y}_0 \quad (3.4)$$

şeklinde olacaktır.

$\underline{Y}(x, x_0)$ asal matrisi, en genel durumda, homojen (yani $\vec{f}(x)$ vektörünün bulunmadığı) denklemden elde edilir ve;

$$\frac{d\underline{Y}(x, x_0)}{dx} = A(x)\underline{Y}(x, x_0) \quad \underline{Y}(x, x_0) = \underline{I} \quad (3.5)$$

özelliklerini sağlar. Eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularının, kesitin asal doğrultularıyla çakıştığı durumu belirleyen (2.39)'da verilen denklem takımının homojen şekli;

$$\frac{dv}{d\varphi} = -\rho_0(\varphi) \Omega_n + \frac{\rho_0(\varphi)}{C_{bb}(\varphi)} R_b$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\varphi} = -\Omega_t + \frac{\rho_0(\varphi)}{D_{nn}(\varphi)} M_n$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\varphi} = \Omega_n + \frac{\rho_0(\varphi)}{D_{tt}(\varphi)} M_t$$

$$\frac{dM_n}{d\varphi} = -M_t + \rho_0(\varphi) R_b$$

$$\frac{dM_t}{d\varphi} = M_n$$

$$\frac{dR_b}{d\varphi} = 0 \quad (3.6)$$

olarak ifade edilebilir. Bu denklem takımının son denklemini bir kez türetilir ve beşinci denklemden yerine konursa;

$$\frac{d^2 M_t}{d\varphi^2} + M_t - \rho_0(\varphi) R_b = 0 \quad (3.7)$$

diferansiyel denklemini elde edilir. Bilindiği gibi bu denklemin homojen kısmının çözümü;

$$M_t = A \cdot \cos \varphi + B \cdot \sin \varphi \quad (3.8)$$

şeklindedir. Buradan M_n ise;

$$M_n = -A \sin \varphi + B \cos \varphi \quad (3.9)$$

şeklinde elde edilir. Başlangıç noktası olarak $\varphi = 0$ alınır ve buradaki başlangıç değerleri M_{n0} ve M_{t0} bilinirse, sabitler bu değerler cinsinden ifade edilebilir;

$$A = M_{t0} \quad B = M_{n0} \quad (3.10)$$

Böylece, (3.7) denkleminin homojen çözümü;

$$\begin{aligned} M_t &= M_{t0} \cos \varphi + M_{n0} \sin \varphi \\ M_n &= -M_{t0} \sin \varphi + M_{n0} \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.11)$$

olarak elde edilebilirler. (3.4) denklemini kullanılarak;

$$\begin{aligned} \vec{y}(\varphi) &= \underline{Y}(\varphi, \varphi_0) \vec{y}(\varphi_0) \\ \begin{Bmatrix} M_t \\ M_n \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{t0} \\ M_{n0} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

şeklinde matrisel formda yazılabilir.

(3.1) denklemini yardımıyla;

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{y}}{d\varphi} &= A(\varphi) \vec{y} + \vec{f}(\varphi) \\ \frac{d}{d\varphi} \begin{bmatrix} M_t \\ M_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_n \\ M_t \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho_0 R_b \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

matrisel diferansiyel denklemini elde edilir. (3.2) denkleminde;

$$\begin{aligned} \vec{y}(\varphi) &= \underline{Y}(\varphi, \varphi_0) \vec{y}_0 + \underline{Y}(\varphi, \varphi_0) \int_{\varphi_0}^{\varphi} \underline{Y}^{-1}(\xi, \varphi_0) \vec{f}(\xi) d\xi \\ \underline{Y}^{-1}(\xi, \varphi_0) &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

olacağından; (3.2) denklemini ;

$$\begin{Bmatrix} M_t \\ M_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{t0} \\ M_{n0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \begin{bmatrix} \cos\xi & -\sin\xi \\ \sin\xi & \cos\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho_0 R_b \end{Bmatrix} d\xi \quad (3.15)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin çözümünden eğilme momenti değişimi;

$$\begin{aligned} M_t &= \cos\varphi M_{t0} + \sin\varphi M_{n0} - \cos\varphi \int_0^{\varphi} \sin\psi \cdot \rho_0 R_b d\psi + \sin\varphi \int_0^{\varphi} \cos\psi \cdot \rho_0 R_b d\psi \\ M_n &= -\sin\varphi M_{t0} + \cos\varphi M_{n0} + \sin\varphi \int_0^{\varphi} \sin\psi \cdot \rho_0 R_b d\psi + \cos\varphi \int_0^{\varphi} \cos\psi \cdot \rho_0 R_b d\psi \end{aligned} \quad (3.16)$$

şeklinde elde edilir.

Kesitin dönme miktarlarını ifade eden (3.6) homojen denklem takımının ikinci ve üçüncü denklemleri;

$$f_1(\varphi) = \frac{\rho_0(\varphi)}{D_m(\varphi)} M_n \quad f_2(\varphi) = \frac{\rho_0(\varphi)}{D_n(\varphi)} M_t$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t &= f_1(\varphi) \\ \frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n &= f_2(\varphi) \end{aligned} \quad (3.17)$$

denklem takımı şeklinde yazılabilir. Bu denklem takımının homojen çözümü, $\varphi = \varphi_0 = 0$ başlangıç noktasında, Ω_{t0} ve Ω_{n0} başlangıç değerleri olmak üzere;

$$\begin{aligned} \Omega_t &= \Omega_{t0} \cos\varphi + \Omega_{n0} \sin\varphi \\ \Omega_n &= -\Omega_{t0} \sin\varphi + \Omega_{n0} \cos\varphi \end{aligned} \quad (3.18)$$

şeklinde elde edilir.

(3.1) denklemi kullanılarak;

$$\begin{aligned} \vec{Y}(\varphi) &= \underline{Y}(\varphi, \varphi_0) \vec{Y}(\varphi_0) \\ \begin{Bmatrix} \Omega_t \\ \Omega_n \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega_{t0} \\ \Omega_{n0} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

şeklinde matrisel formda yazılabilir. (3.1) denklemi yardımıyla;

$$\frac{d\vec{y}}{d\varphi} = \mathbf{A}(\varphi) \vec{y} + \vec{f}(\varphi)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \begin{Bmatrix} \Omega_t \\ \Omega_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega_t \\ \Omega_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\rho_o(\varphi)}{D_u(\varphi)} M_t \\ \frac{\rho_o(\varphi)}{D_m(\varphi)} M_n \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

matrisel diferansiyel denklemi elde edilir. (3.2) denkleminde ;

$$\underline{\mathbf{Y}}^{-1}(\xi, \varphi_0) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

olacağından; (3.2) denklemi;

$$\begin{Bmatrix} \Omega_t \\ \Omega_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega_{t0} \\ \Omega_{n0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \int_0^\varphi \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\rho_o(\psi)}{D_u(\psi)} M_t \\ \frac{\rho_o(\psi)}{D_m(\psi)} M_n \end{Bmatrix} d\psi \quad (3.22)$$

şeklinde yazılabilir. Ve bu denklemin çözümünden, kesitin, kiriş eğrisinin teğeti doğrultusundaki dönme miktarı;

$$\begin{aligned} \Omega_t = & \Omega_{t0} \cos\varphi + \Omega_{n0} \sin\varphi + \left[\cos\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_o(\psi)}{D_u(\psi)} \cos^2\psi d\psi + \cos\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_o(\psi)}{D_m(\psi)} \sin^2\psi d\psi \right. \\ & + \sin\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_o(\psi)}{D_u(\psi)} \cos\psi \sin\psi d\psi - \sin\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_o(\psi)}{D_m(\psi)} \sin\psi \cos\psi d\psi \left. \right] M_{t0} \\ & + \left[\cos\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_o(\psi)}{D_u(\psi)} \cos\psi \sin\psi d\psi - \cos\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_o(\psi)}{D_m(\psi)} \sin\psi \cos\psi d\psi \right. \\ & + \sin\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_o(\psi)}{D_u(\psi)} \sin^2\psi d\psi + \sin\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_o(\psi)}{D_m(\psi)} \cos^2\psi d\psi \left. \right] M_{n0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \cos\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_n(\psi)} \cos^2\psi \int_0^\psi \sin\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi \\
& + \cos\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_n(\psi)} \sin\psi \cos\psi \int_0^\psi \cos\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi \\
& - \cos\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_m(\psi)} \sin^2\psi \int_0^\psi \sin\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi \\
& - \cos\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_m(\psi)} \sin\psi \cos\psi \int_0^\psi \cos\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi \\
& - \sin\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_n(\psi)} \sin\psi \cos\psi \int_0^\psi \sin\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi \\
& + \sin\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_n(\psi)} \sin^2\psi \int_0^\psi \cos\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi \\
& + \sin\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_m(\psi)} \sin\psi \cos\psi \int_0^\psi \sin\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi \\
& + \sin\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_m(\psi)} \cos^2\psi \int_0^\psi \cos\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Kesitin kiriş eğrisinin normal eksenine doğrultusundaki dönme miktarı;

$$\begin{aligned}
\Omega_n = & -\Omega_{t0} \sin\varphi + \Omega_{n0} \cos\varphi - \left[\sin\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_n(\psi)} \cos^2\psi d\psi + \sin\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_m(\psi)} \sin^2\psi d\psi \right. \\
& - \cos\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_n(\psi)} \cos\psi \sin\psi d\psi + \cos\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_m(\psi)} \sin\psi \cos\psi d\psi \left. \right] M_{t0} \\
& - \left[\sin\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_n(\psi)} \cos\psi \sin\psi d\psi - \sin\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_m(\psi)} \sin\psi \cos\psi d\psi \right. \\
& - \cos\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_n(\psi)} \sin^2\psi d\psi - \cos\varphi \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{D_m(\psi)} \cos^2\psi d\psi \left. \right] M_{n0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin\varphi \int_0^{\varphi} \frac{\rho_0(\psi)}{D_{\pi}(\psi)} \cos^2\psi \int_0^{\psi} \sin\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi \\
& - \sin\varphi \int_0^{\varphi} \frac{\rho_0(\psi)}{D_{\pi}(\psi)} \sin\psi \cos\psi \int_0^{\psi} \cos\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi \\
& + \sin\varphi \int_0^{\varphi} \frac{\rho_0(\psi)}{D_m(\psi)} \cos\psi \sin\psi \int_0^{\psi} \cos\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi \\
& - \cos\varphi \int_0^{\varphi} \frac{\rho_0(\psi)}{D_{\pi}(\psi)} \sin\psi \cos\psi \int_0^{\psi} \sin\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi \\
& + \cos\varphi \int_0^{\varphi} \frac{\rho_0(\psi)}{D_{\pi}(\psi)} \sin^2\psi \int_0^{\psi} \cos\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi \\
& + \cos\varphi \int_0^{\varphi} \frac{\rho_0(\psi)}{D_m(\psi)} \sin\psi \cos\psi \int_0^{\psi} \sin\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi \\
& + \cos\varphi \int_0^{\varphi} \frac{\rho_0(\psi)}{D_m(\psi)} \cos^2\psi \int_0^{\psi} \cos\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi \\
& + \sin\varphi \int_0^{\varphi} \frac{\rho_0(\psi)}{D_m(\psi)} \sin^2\psi \int_0^{\psi} \sin\xi \rho_0 R_b d\xi d\psi
\end{aligned} \tag{3.24}$$

şeklinde elde edilebilir.

Kiriş eğrisinin normal eksenine doğrultusundaki yerdeğiştirme miktarı;

$$\begin{aligned}
v &= v_0 + \int_0^{\varphi} \rho_0(\psi) \sin\psi d\psi \Omega_{t0} - \int_0^{\varphi} \rho_0(\psi) \cos\psi d\psi \Omega_{n0} \\
&+ \left[\int_0^{\varphi} \rho_0(\psi) \sin\psi \int_0^{\psi} \frac{\rho_0(\xi)}{D_{\pi}(\xi)} \cos^2\xi d\xi d\psi + \int_0^{\varphi} \rho_0(\psi) \sin\psi \int_0^{\psi} \frac{\rho_0(\xi)}{D_m(\xi)} \sin^2\xi d\xi d\psi \right. \\
&- \int_0^{\varphi} \rho_0(\psi) \cos\psi \int_0^{\psi} \frac{\rho_0(\xi)}{D_{\pi}(\xi)} \cos\xi \sin\xi d\xi d\psi + \int_0^{\varphi} \rho_0(\psi) \cos\psi \int_0^{\psi} \frac{\rho_0(\xi)}{D_m(\xi)} \cos\xi \sin\xi d\xi d\psi \left. \right] M_{t0} \\
&+ \left[\int_0^{\varphi} \rho_0(\psi) \sin\psi \int_0^{\psi} \frac{\rho_0(\xi)}{D_{\pi}(\xi)} \cos\xi \sin\xi d\xi d\psi - \int_0^{\varphi} \rho_0(\psi) \sin\psi \int_0^{\psi} \frac{\rho_0(\xi)}{D_m(\xi)} \cos\xi \sin\xi d\xi d\psi \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\varphi \rho_0(\psi) \cos \psi \int_0^\psi \frac{\rho_0(\xi)}{D_{\pi}(\xi)} \sin^2 \xi d\xi d\psi - \int_0^\varphi \rho_0(\psi) \cos \psi \int_0^\psi \frac{\rho_0(\xi)}{D_m(\xi)} \cos^2 \xi d\xi d\psi] M_{n0} \\
& - \int_0^\varphi \rho_0(\psi) \sin \psi \int_0^\psi \frac{\rho_0(\xi)}{D_{\pi}(\xi)} \cos^2 \xi \int_0^\xi \sin \theta \rho_0 R_b d\theta d\xi d\psi \\
& + \int_0^\varphi \rho_0(\psi) \sin \psi \int_0^\psi \frac{\rho_0(\xi)}{D_{\pi}(\xi)} \cos \xi \sin \xi \int_0^\xi \cos \theta \rho_0 R_b d\theta d\xi d\psi \\
& - \int_0^\varphi \rho_0(\psi) \sin \psi \int_0^\psi \frac{\rho_0(\xi)}{D_m(\xi)} \cos \xi \sin \xi \int_0^\xi \cos \theta \rho_0 R_b d\theta d\xi d\psi \\
& + \int_0^\varphi \rho_0(\psi) \cos \psi \int_0^\psi \frac{\rho_0(\xi)}{D_{\pi}(\xi)} \cos \xi \sin \xi \int_0^\xi \sin \theta \rho_0 R_b d\theta d\xi d\psi \\
& - \int_0^\varphi \rho_0(\psi) \cos \psi \int_0^\psi \frac{\rho_0(\xi)}{D_{\pi}(\xi)} \sin^2 \xi \int_0^\xi \cos \theta \rho_0 R_b d\theta d\xi d\psi \\
& - \int_0^\varphi \rho_0(\psi) \cos \psi \int_0^\psi \frac{\rho_0(\xi)}{D_m(\xi)} \cos \xi \sin \xi \int_0^\xi \sin \theta \rho_0 R_b d\theta d\xi d\psi \\
& - \int_0^\varphi \rho_0(\psi) \cos \psi \int_0^\psi \frac{\rho_0(\xi)}{D_m(\xi)} \cos^2 \xi \int_0^\xi \cos \theta \rho_0 R_b d\theta d\xi d\psi \\
& - \int_0^\varphi \rho_0(\psi) \sin \psi \int_0^\psi \frac{\rho_0(\xi)}{D_m(\xi)} \sin^2 \xi \int_0^\xi \sin \theta \rho_0 R_b d\theta d\xi d\psi + \int_0^\varphi \frac{\rho_0(\psi)}{C_{bb}(\psi)} d\psi R_b \quad (3.25)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Elde edilen bu eşitlikler bazı kısaltmalar yardımıyla;

$$\begin{aligned}
v &= Y_{11} v_0 + Y_{12} \Omega_{n0} + Y_{13} \Omega_{t0} + Y_{14} M_{n0} + Y_{15} M_{t0} + Y_{16} R_{b0} \\
\Omega_n &= Y_{22} \Omega_{n0} + Y_{23} \Omega_{t0} + Y_{24} M_{n0} + Y_{25} M_{t0} + Y_{26} R_{b0} \\
\Omega_t &= Y_{32} \Omega_{n0} + Y_{33} \Omega_{t0} + Y_{34} M_{n0} + Y_{35} M_{t0} + Y_{36} R_{b0} \\
M_n &= Y_{44} M_{n0} + Y_{45} M_{t0} + Y_{46} R_{b0} \\
M_t &= Y_{54} M_{n0} + Y_{55} M_{t0} + Y_{56} R_{b0} \\
R_b &= Y_{66} R_{b0}
\end{aligned}$$

Böylece, dairesel kesitli bir kiriş için eksen eğrisi ne olursa olsun, Asal Matris elde edilmiş olur.

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\ 0 & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\ 0 & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} \\ 0 & 0 & 0 & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} \\ 0 & 0 & 0 & Y_{54} & Y_{55} & Y_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{66} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Bu genel asal matris, eksen eğri formu bilinen dairesel kesitli kirişler için kullanılabilir.

3.2. Çember Eksenli Dairesel Sabit Kesitli Kiriş Örneği

Çember eksenli bir kirişin eğrilik yarıçapı;

$$\rho_0(\varphi) = \rho_{c0} = \text{sabit} \quad (3.27)$$

olarak ifade edilebilir. Burada ρ_{c0} referans koordinatındaki eğrilik yarıçapıdır ve sabittir. Rijitliklerin;

$$\begin{aligned} D_{m0} &= E I_{n0} = \text{sabit} & D_{t0} &= G I_p = \text{sabit} \\ C_{bb} &= \frac{1}{k_b} G A_0 = \text{sabit} \end{aligned} \quad (3.28)$$

şeklinde olduğu, çember eksenli dairesel sabit kesitli kirişler için hesap yapılacaktır. Burada, I_{n0} ve A_0 sırasıyla referans koordinatındaki eylemsizlik momenti ve kiriş kesit alanı değeri; E ve G sırasıyla elastiklik ve kayma modülleri; k_b ise kayma gerilmesinin kesite uniform olarak dağılmadığını ifade eden sabittir.

Bu eşitlikler yardımıyla genel asal matris düzenlenirse;

$$Y_{11} = 1 \quad Y_{12} = -\rho_{c0} \sin \varphi \quad Y_{13} = \rho_{c0} (1 - \cos \varphi)$$

$$\begin{aligned} Y_{14} &= \left[\rho_{c0}^2 \left(\frac{1}{G I_p} - \frac{1}{E I_{n0}} \right) \left(\frac{1}{3} - \frac{\cos \varphi}{2} + \frac{\cos^3 \varphi}{6} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho_{c0}^2}{G I_p} \left(-\frac{2}{3} + \frac{5 \cos \varphi}{8} + \frac{\cos 3 \varphi}{24} + \frac{\varphi \sin \varphi}{2} \right) - \frac{\rho_{c0}^2}{E I_{n0}} \left(-\frac{1}{3} + \frac{3 \cos \varphi}{8} - \frac{\cos 3 \varphi}{24} + \frac{\varphi \sin \varphi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$Y_{15} = \rho^2 c_0 \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) \left(\frac{\sin \varphi}{8} - \frac{\sin 3\varphi}{24} \right) + \frac{\rho^2 c_0}{GI_p} \left(-\frac{(\varphi \cos \varphi)}{2} + \frac{5\sin \varphi}{8} - \frac{\sin 3\varphi}{24} \right)$$

$$+ \frac{\rho^2 c_0}{EI_{n0}} \left(-\frac{(\varphi \cos \varphi)}{2} + \frac{3\sin \varphi}{8} + \frac{\sin 3\varphi}{24} \right)$$

$$Y_{16} = -\frac{\rho^3 c_0}{GI_p} \left(-\frac{3\varphi}{4} - \varphi \cos \varphi + \frac{5\sin \varphi}{4} + \frac{\sin 2\varphi}{3} - \frac{\sin 3\varphi}{12} + \frac{\sin 4\varphi}{48} \right)$$

$$+ \rho^3 c_0 \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{3} + \frac{\sin 4\varphi}{24} \right)$$

$$+ \rho^3 c_0 \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{5\sin \varphi}{6} + \frac{\sin 2\varphi}{3} - \frac{\sin 3\varphi}{6} + \frac{\sin 4\varphi}{24} \right)$$

$$- \frac{\rho^3 c_0}{GI_p} \left[\frac{\text{Log}(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2})}{2} - \frac{\text{Log}(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2})}{2} + \frac{\sec \varphi \tan \varphi}{2} \right]$$

$$- \frac{\rho^3 c_0}{EI_{n0}} \left(\frac{2}{3} - \sec \varphi + \frac{\sec^3 \varphi}{3} \right) - \frac{\rho^3 c_0}{EI_{n0}} (-1 + \sec \varphi) + \frac{\rho c_0 k_b}{GA_0} \varphi$$

$$Y_{22} = \cos \varphi$$

$$Y_{23} = -\sin \varphi$$

$$Y_{24} = \frac{\rho c_0}{GI_p} \cos \varphi \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) + \frac{\rho c_0}{EI_{n0}} \cos \varphi \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right)$$

$$+ \rho c_0 \sin \varphi \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos^2 \varphi}{2} \right)$$

$$Y_{25} = \frac{\rho c_0}{GI_p} \sin \varphi \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) - \frac{\rho c_0}{EI_{n0}} \sin \varphi \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right)$$

$$+ \rho c_0 \cos \varphi \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos^2 \varphi}{2} \right)$$

$$Y_{26} = \frac{\rho^2 c_0}{GI_p} \sin \varphi \left(\varphi - \frac{3\sin \varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{2} - \frac{\sin 3\varphi}{6} \right) + \rho^2 c_0 \sin \varphi \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) \left(\frac{\sin^3 \varphi}{3} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \rho^2_{c0} \text{Cos}\varphi \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) \left(\frac{1}{6} - \frac{\text{Cos}^2\varphi}{2} + \frac{\text{Cos}^3\varphi}{3} \right) + \frac{\rho^2_{c0}}{EI_{n0}} \text{Cos}\varphi \left(\frac{1}{3} - \frac{\text{Cos}^3\varphi}{3} \right) \\
& + \frac{\rho^2_{c0}}{GI_p} \text{Cos}\varphi \left(\frac{2}{3} - \frac{3\text{Cos}\varphi}{4} + \frac{\text{Cos}3\varphi}{12} \right) + \frac{\rho^2_{c0}}{EI_{n0}} \text{Cos}\varphi \left(\varphi - \frac{\text{Sin}\varphi}{2} - \frac{\text{Sin}2\varphi}{2} + \frac{\text{Sin}3\varphi}{6} \right)
\end{aligned}$$

$$Y_{32} = \text{Sin}\varphi$$

$$Y_{33} = \text{Cos}\varphi$$

$$\begin{aligned}
Y_{34} &= \rho_{c0} \text{Cos}\varphi \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\text{Cos}^2\varphi}{2} \right) + \frac{\rho_{c0}}{GI_p} \text{Sin}\varphi \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\text{Sin}2\varphi}{4} \right) \\
&+ \frac{\rho_{c0}}{EI_{n0}} \text{Sin}\varphi \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\text{Sin}2\varphi}{4} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{35} &= \rho_{c0} \text{Sin}\varphi \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\text{Cos}^2\varphi}{2} \right) \\
&+ \frac{\rho_{c0}}{GI_p} \text{Cos}\varphi \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\text{Sin}2\varphi}{4} \right) + \frac{\rho_{c0}}{EI_{n0}} \text{Cos}\varphi \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\text{Sin}2\varphi}{4} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{36} &= -\frac{\rho^2_{c0}}{GI_p} \text{Cos}\varphi \left(\varphi - \frac{3\text{Sin}\varphi}{2} + \frac{\text{Sin}2\varphi}{2} + \frac{\text{Sin}3\varphi}{6} \right) + \rho^2_{c0} \text{Cos}\varphi \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) \left(\frac{\text{Sin}^3\varphi}{3} \right) \\
&+ \rho^2_{c0} \text{Sin}\varphi \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) \left(\frac{1}{6} - \frac{\text{Cos}^2\varphi}{2} + \frac{\text{Cos}^3\varphi}{3} \right) + \frac{\rho^2_{c0}}{GI_p} \text{Sin}\varphi \left(\frac{2}{3} - \frac{3\text{Cos}\varphi}{4} + \frac{\text{Cos}3\varphi}{12} \right) \\
&- \frac{\rho^2_{c0}}{EI_{n0}} \text{Cos}\varphi \left(\varphi - \frac{\text{Sin}\varphi}{2} - \frac{\text{Sin}2\varphi}{2} + \frac{\text{Sin}3\varphi}{6} \right) + \frac{\rho^2_{c0}}{EI_{n0}} \text{Sin}\varphi \left(\frac{1}{3} - \frac{\text{Cos}^3\varphi}{3} \right)
\end{aligned}$$

$$Y_{44} = \text{Cos}\varphi$$

$$Y_{45} = -\text{Sin}\varphi$$

$$Y_{46} = \rho_{c0} \text{Sin}\varphi$$

$$Y_{54} = \text{Sin}\varphi$$

$$Y_{55} = \text{Cos}\varphi$$

$$Y_{56} = \rho_{c0} (1 - \text{Cos}\varphi) \quad (3.29)$$

$$Y_{66} = 1$$

şeklinde, çember eksenli dairesel sabit kesitli düzlemsel eğri eksenli kirişler için asal matris elde edilmiş olur.

3.3. Parabol Eksenli Dairesel Değişken Kesitli Kiriş Örneği

Parabolik bir kirişin eğrilik yarıçapı;

$$\rho_o(\varphi) = \frac{\rho_{c0}}{\cos^3 \varphi} \quad (3.30)$$

olarak ifade edilebilir. Burada ρ_{c0} referans koordinatındaki eğrilik yarıçapı olup sabittir. Rijitliklerin;

$$D_{nn}(\varphi) = \frac{EI_{n0}}{\cos \varphi} \quad D_{tt} = \frac{GI_p}{\cos \varphi} \quad C_{bb} = \frac{GA_0}{k_b \cos \varphi} \quad (3.31)$$

şeklinde değiştiği kirişler için hesap yapılacaktır. Burada; I_{n0} , A_0 , G , E ve k_b sembolleri bir önceki örnekte tanımlandığı gibidir.

Bu eşitlikler yardımıyla genel asal matris düzenlenirse;

$$Y_{11} = 1 \quad Y_{12} = -\rho_{c0} \tan \varphi \quad Y_{13} = -\rho_{c0} \left(\frac{\sec^2 \varphi}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$Y_{14} = \left(\frac{\rho^2_{c0}}{GI_p} - \frac{\rho^2_{c0}}{EI_{n0}} \right) \left[\frac{1 - [1 + 2\log(\cos \varphi)] \sec^2 \varphi}{4} \right] + \frac{\rho^2_{c0}}{GI_p} \left[\frac{[\varphi^2 + 2\log(\cos \varphi)]}{2\cos^2 \varphi} \right]$$

$$- \frac{\rho^2_{c0}}{EI_{n0}} [\log(\cos \varphi) + \varphi \tan \varphi]$$

$$Y_{15} = \frac{\rho^2_{c0}}{GI_p} \left(\frac{\varphi \sec^2 \varphi}{2} - \frac{\tan \varphi}{2} \right) + \frac{\rho^2_{c0}}{EI_{n0}} \left(-\frac{\varphi \sec^2 \varphi}{2} + \frac{\tan \varphi}{6} + \frac{\sec^2 \varphi \tan \varphi}{3} \right)$$

$$+ \left(\frac{\rho^2_{c0}}{EI_{n0}} - \frac{\rho^2_{c0}}{GI_p} \right) [\varphi - \tan \varphi - \log(\cos \varphi) \tan \varphi]$$

$$Y_{16} = -\frac{\rho^3_{c0}}{GI_p} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi \sec^4 \varphi}{8} \right) + \left(\frac{\rho^3_{c0}}{GI_p} - \frac{\rho^3_{c0}}{EI_{n0}} \right) \left(-\frac{\varphi \sec^2 \varphi}{2} + \frac{\tan \varphi}{6} + \frac{\sec^2 \varphi \tan \varphi}{3} \right)$$

$$- \frac{\rho^3_{c0}}{EI_{n0}} \left(-\varphi + \frac{5\tan \varphi}{6} + \log(\cos \varphi) \tan \varphi + \frac{\sec^2 \varphi \tan \varphi}{6} \right)$$

$$- \frac{\rho^3 c_0}{EI_{n0}} [\varphi - \tan\varphi - \log(\cos\varphi)\tan\varphi]$$

$$- \frac{\rho^3 c_0}{EI_{n0}} \left(\frac{\varphi \sec^2\varphi}{2} + \frac{\tan\varphi}{10} - \frac{7\sec^2\varphi \tan\varphi}{15} + \frac{\sec^4\varphi \tan\varphi}{15} \right) + \frac{\rho c_0 k_b}{GA_0} \tan\varphi$$

$$Y_{22} = \cos\varphi$$

$$Y_{23} = -\sin\varphi$$

$$Y_{24} = \frac{\rho c_0}{GI_p} \cos\varphi (-\varphi + \tan\varphi) + \frac{\rho c_0}{EI_{n0}} \cos\varphi \cdot \varphi + \left(\frac{\rho c_0}{GI_p} - \frac{\rho c_0}{EI_{n0}} \right) [\sin\varphi \log(\cos\varphi)]$$

$$Y_{25} = -\frac{\rho c_0}{GI_p} \sin\varphi \cdot \varphi - \frac{\rho c_0}{EI_{n0}} \sin\varphi (-\varphi + \tan\varphi) + \left(\frac{\rho c_0}{EI_{n0}} - \frac{\rho c_0}{GI_p} \right) [\cos\varphi \log(\cos\varphi)]$$

$$\begin{aligned} Y_{26} = & \frac{\rho^2 c_0}{EI_{n0}} \sin\varphi \left(\frac{-\varphi + \tan\varphi}{2} \right) + \rho^2 c_0 \sin\varphi \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) [-\varphi + \tan\varphi] \\ & + \rho^2 c_0 \cos\varphi \left(\frac{1}{EI_{n0}} + \frac{1}{GI_p} \right) \left[-\frac{\varphi}{2} + \log(\cos\varphi) + \frac{\sec^2\varphi}{2} \right] \\ & + \frac{\rho^2 c_0}{EI_{n0}} \sin\varphi \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{2\tan\varphi}{3} + \frac{\sec^2\varphi \tan\varphi}{6} \right) + \frac{\rho^2 c_0}{EI_{n0}} \cos\varphi [-\log(\cos\varphi)] \end{aligned}$$

$$Y_{32} = \sin\varphi$$

$$Y_{33} = \cos\varphi$$

$$Y_{34} = \frac{\rho c_0}{EI_{n0}} \varphi \sin\varphi + \frac{\rho c_0}{GI_p} \sin\varphi (-\varphi + \tan\varphi) + \rho c_0 \cos\varphi \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) [-\log(\cos\varphi)]$$

$$Y_{35} = \frac{\rho c_0}{GI_p} \varphi \cos\varphi + \frac{\rho c_0}{EI_{n0}} \cos\varphi (-\varphi + \tan\varphi) + \rho c_0 \sin\varphi \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) [-\log(\cos\varphi)]$$

$$\begin{aligned} Y_{36} = & \frac{\rho^2 c_0}{GI_p} \cos\varphi \left(\frac{\varphi - \tan\varphi}{2} \right) + \rho^2 c_0 \cos\varphi \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) [-\varphi + \tan\varphi] \\ & + \rho^2 c_0 \sin\varphi \left(\frac{1}{EI_{n0}} + \frac{1}{GI_p} \right) \left[-\frac{\varphi}{2} + \log(\cos\varphi) + \frac{\sec^2\varphi}{2} \right] \\ & - \frac{\rho^2 c_0}{EI_{n0}} \cos\varphi \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{2\tan\varphi}{3} + \frac{\sec^2\varphi \tan\varphi}{6} \right) + \frac{\rho^2 c_0}{EI_{n0}} \sin\varphi [-\log(\cos\varphi)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{45} &= -\sin\varphi & Y_{44} &= \cos\varphi & Y_{46} &= \rho_{c0}\sin\varphi\left(\frac{\sec^2\varphi-1}{2}\right) + \rho_{c0}\sin\varphi \\
Y_{55} &= \cos\varphi & Y_{54} &= \sin\varphi & Y_{56} &= -\rho_{c0}\cos\varphi\left(\frac{\sec^2\varphi-1}{2}\right) + \rho_{c0}\sin\varphi\tan\varphi \\
Y_{66} &= 1
\end{aligned} \tag{3.32}$$

şeklinde, parabol eksenli dairesel değişken kesitli düzlemsel eğri eksenli kirişler için asal matris elde edilmiş olur.

3.4. Parabol Eksenli Dairesel Sabit Kesitli Kiriş Örneği

Parabolik bir kirişin eğrilik yarıçapı;

$$\rho_o(\varphi) = \frac{\rho_{c0}}{\cos^3\varphi} \tag{3.30}$$

şeklinde ikinci örnekte olduğu gibi ifade edilebilir. Aynı şekilde, burada ρ_{c0} referans koordinatındaki eğrilik yarıçapı olup sabittir. Rijitlikler; (3.28) eşitliklerinde olduğu gibi;

$$D_{nn} = EI_{n0} = \text{Sabit} \quad D_{tt} = GI_p = \text{Sabit} \quad C_{bb} = \frac{1}{k_b} GA_0 = \text{Sabit}$$

alınacak ve bu halde, parabol eksenli dairesel sabit kesitli kirişler için hesap yapılacaktır. Buradaki, I_{n0} , A_0 , G , E ve k_b sembolleri daha önce ifade edildiği gibidir.

Bu eşitlikler yardımıyla genel asal matris düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
Y_{11} &= 1 & Y_{12} &= -\rho_{c0}\tan\varphi & Y_{13} &= \rho_{c0}\left(\frac{\sec^2\varphi-1}{2}\right) \\
Y_{14} &= \left(\frac{\rho^2_{c0}}{GI_p} - \frac{\rho^2_{c0}}{EI_{n0}}\right) \left[\frac{1+(2-3\cos\varphi)\sec^3\varphi}{6}\right] - \frac{\rho^2_{c0}}{GI_p} \left[-\frac{1}{12} + [\sec^3\varphi(20-21\cos\varphi \right. \\
&\quad \left. +12\cos 2\varphi -7\cos 3\varphi +6\log(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2})\sin\varphi -6\log(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2})\sin\varphi \right]
\end{aligned}$$

$$+ 6\text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} - \text{Sin}\frac{\varphi}{2})\text{Sin}3\varphi - 6\text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} + \text{Sin}\frac{\varphi}{2})\text{Sin}3\varphi)\frac{1}{48}\Big]$$

$$- \frac{\rho^2 c_0}{EI_{n0}} \left[-\frac{\text{Sin}\frac{\varphi}{2}}{\text{Cos}\frac{\varphi}{2} - \text{Sin}\frac{\varphi}{2}} + \frac{\text{Sin}\frac{\varphi}{2}}{\text{Cos}\frac{\varphi}{2} + \text{Sin}\frac{\varphi}{2}} - \text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} - \text{Sin}\frac{\varphi}{2})\text{Tan}\varphi \right.$$

$$\left. + \text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} + \text{Sin}\frac{\varphi}{2})\text{Tan}\varphi \right]$$

$$Y_{15} = \frac{\rho^2 c_0}{2GI_p} \left(\frac{\text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} - \text{Sin}\frac{\varphi}{2}) - \text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} + \text{Sin}\frac{\varphi}{2})}{2} - \text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} - \text{Sin}\frac{\varphi}{2})\text{Sec}^2\varphi \right.$$

$$\left. + \text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} + \text{Sin}\frac{\varphi}{2})\text{Sec}^2\varphi - \frac{1}{4(1 - \text{Sin}\varphi)} + \frac{1}{4(1 + \text{Sin}\varphi)} \right)$$

$$+ \frac{\rho^2 c_0}{4EI_{n0}} \left(-\frac{\text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} - \text{Sin}\frac{\varphi}{2})}{4} + \frac{\text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} + \text{Sin}\frac{\varphi}{2})}{4} + \text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} - \text{Sin}\frac{\varphi}{2})\text{Sec}^2\varphi \right.$$

$$\left. - \text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} + \text{Sin}\frac{\varphi}{2})\text{Sec}^2\varphi + \frac{1}{8(1 - \text{Sin}\varphi)} - \frac{1}{8(1 + \text{Sin}\varphi)} + \frac{1}{8(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} - \text{Sin}\frac{\varphi}{2})^4} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} + \text{Sin}\frac{\varphi}{2})^4} \right) + \left(\frac{\rho^2 c_0}{2EI_{n0}} - \frac{\rho^2 c_0}{2GI_p} \right) \left[-\text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} - \text{Sin}\frac{\varphi}{2}) + \text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} + \text{Sin}\frac{\varphi}{2}) \right.$$

$$\left. - 2\text{Tan}\varphi + \text{Sec}\varphi\text{Tan}\varphi \right]$$

$$Y_{16} = \frac{\rho^3 c_0}{GI_p} \left[-\frac{\text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} - \text{Sin}\frac{\varphi}{2})}{32} + \frac{\text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} + \text{Sin}\frac{\varphi}{2})}{32} + \frac{\text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} - \text{Sin}\frac{\varphi}{2})\text{Sec}^2\varphi}{8} \right.$$

$$\left. - \frac{\text{Log}(\text{Cos}\frac{\varphi}{2} + \text{Sin}\frac{\varphi}{2})\text{Sec}^2\varphi}{8} + \frac{1}{64(1 - \text{Sin}\varphi)} - \frac{1}{64(1 + \text{Sin}\varphi)} + \frac{1}{64\left[\text{Cos}\frac{\varphi}{2} - \text{Sin}\frac{\varphi}{2}\right]^4} \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{64 \left[\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right]^4} \left] + \left(\frac{2\rho^3 c_0}{GI_p} - \frac{\rho^3 c_0}{EI_{no}} \right) \left[\frac{3 \log(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2})}{16} \right. \\
& - \frac{3 \log(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2})}{16} + \frac{\tan \varphi}{3} - \frac{3 \sec \varphi \tan \varphi}{16} + \frac{\sec^3 \varphi \tan \varphi}{24} \left. \right] \\
& - \frac{\rho^3 c_0}{EI_{no}} \left[- \frac{\log(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2})}{16} + \frac{\log(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2})}{16} + \frac{\log(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}) \sec^2 \varphi}{4} \right. \\
& - \frac{\log(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}) \sec^2 \varphi}{4} + \frac{1}{32 \left[\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right]^4} + \frac{1}{32 \left[\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right]^4} \\
& + \frac{1}{32(1 - \sin \varphi)} - \frac{1}{32(1 + \sin \varphi)} \left. \right] - \frac{\rho^3 c_0}{GI_p} \left[\frac{3 \log(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2})}{8} - \frac{3 \log(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2})}{8} \right. \\
& + \frac{2 \tan \varphi}{3} - \frac{3 \sec \varphi \tan \varphi}{8} + \frac{\sec^3 \varphi \tan \varphi}{8} \left. \right] - \frac{\rho^3 c_0}{EI_{no}} \left[- \frac{\log(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2})}{2} \right. \\
& - \tan \varphi + \frac{\sec \varphi \tan \varphi}{2} + \frac{\log(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2})}{2} \left. \right] - \frac{\rho^3 c_0}{EI_{no}} \left[\frac{\log(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2})}{64} \right. \\
& - \frac{\log(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2})}{64} - \frac{3 \log(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}) \sec^2 \varphi}{32} + \frac{3 \log(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}) \sec^2 \varphi}{32} \\
& + \frac{1}{384 \left[\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right]^6} - \frac{1}{384 \left[\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right]^6} - \frac{1}{128(1 - \sin \varphi)} + \frac{1}{128(1 + \sin \varphi)} \left. \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\rho_{c0} k_b}{GA_0} \left[-\frac{\text{Log}(\text{Cos} \frac{\varphi}{2} - \text{Sin} \frac{\varphi}{2})}{2} + \frac{\text{Sec} \varphi \text{Tan} \varphi}{2} + \frac{\text{Log}(\text{Cos} \frac{\varphi}{2} + \text{Sin} \frac{\varphi}{2})}{2} \right]$$

$$Y_{22} = \text{Cos} \varphi$$

$$Y_{23} = -\text{Sin} \varphi$$

$$Y_{24} = \rho_{c0} \text{Sin} \varphi \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) (-1 + \text{Sec} \varphi) + \frac{\rho_{c0}}{GI_p} \text{Cos} \varphi \left[\frac{\text{Log}(\text{Cos} \frac{\varphi}{2} - \text{Sin} \frac{\varphi}{2})}{2} \right. \\ \left. + \frac{\text{Sec} \varphi \text{Tan} \varphi}{2} - \frac{\text{Log}(\text{Cos} \frac{\varphi}{2} + \text{Sin} \frac{\varphi}{2})}{2} \right] + \frac{\rho_{c0}}{EI_{n0}} \text{Cos} \varphi \left[-\text{Log}(\text{Cos} \frac{\varphi}{2} - \text{Sin} \frac{\varphi}{2}) \right. \\ \left. + \text{Log}(\text{Cos} \frac{\varphi}{2} + \text{Sin} \frac{\varphi}{2}) \right]$$

$$+ \text{Log}(\text{Cos} \frac{\varphi}{2} + \text{Sin} \frac{\varphi}{2})]$$

$$Y_{25} = -\frac{\rho_{c0}}{GI_p} \text{Sin} \varphi \left[-\text{Log}(\text{Cos} \frac{\varphi}{2} - \text{Sin} \frac{\varphi}{2}) + \text{Log}(\text{Cos} \frac{\varphi}{2} + \text{Sin} \frac{\varphi}{2}) \right]$$

$$- \frac{\rho_{c0}}{EI_{n0}} \text{Sin} \varphi \left[\frac{\text{Log}(\text{Cos} \frac{\varphi}{2} - \text{Sin} \frac{\varphi}{2})}{2} + \frac{\text{Sec} \varphi \text{Tan} \varphi}{2} - \frac{\text{Log}(\text{Cos} \frac{\varphi}{2} + \text{Sin} \frac{\varphi}{2})}{2} \right]$$

$$+ \rho_{c0} \text{Cos} \varphi \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) (-1 + \text{Sec} \varphi)$$

$$Y_{26} = \frac{\rho^2_{c0}}{GI_p} \text{Sin} \varphi \left[\frac{\text{Log}(\text{Cos} \frac{\varphi}{2} - \text{Sin} \frac{\varphi}{2})}{4} + \frac{\text{Sec} \varphi \text{Tan} \varphi}{4} - \frac{\text{Log}(\text{Cos} \frac{\varphi}{2} + \text{Sin} \frac{\varphi}{2})}{4} \right]$$

$$- \frac{\rho^2_{c0}}{GI_p} (\text{Sin} \varphi + \text{Cos} \varphi) \left[\frac{1}{3} - \frac{\text{Sec} \varphi}{2} + \frac{\text{Sec}^3 \varphi}{6} \right] + \frac{\rho^2_{c0}}{GI_p} \text{Cos} \varphi \left[\frac{2}{3} - \text{Sec} \varphi + \frac{\text{Sec}^3 \varphi}{3} \right]$$

$$+ \frac{\rho^2_{c0}}{EI_{n0}} \text{Sin} \varphi \left[\frac{\text{Log}(\text{Cos} \frac{\varphi}{2} - \text{Sin} \frac{\varphi}{2})}{2} + \frac{\text{Sec} \varphi \text{Tan} \varphi}{2} - \frac{\text{Log}(\text{Cos} \frac{\varphi}{2} + \text{Sin} \frac{\varphi}{2})}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho^2 c_0}{EI_{n0}} \cos\varphi \left[\frac{1}{3} - \frac{\sec\varphi}{2} + \frac{\sec^3\varphi}{6} \right] + \frac{\rho^2 c_0}{EI_{n0}} \cos\varphi (-1 + \sec\varphi) \\
& + \frac{\rho^2 c_0}{EI_{n0}} \sin\varphi \left[\frac{\sec^3\varphi \tan\varphi}{8} \right. \\
& \left. - \frac{3\log(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2})}{16} + \frac{3\log(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2})}{16} - \frac{5\sec\varphi \tan\varphi}{16} \right]
\end{aligned}$$

$$Y_{32} = \sin\varphi$$

$$Y_{33} = \cos\varphi$$

$$\begin{aligned}
Y_{34} = & \frac{\rho c_0}{EI_{n0}} \sin\varphi \left[-\log(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}) + \log(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}) \right] \\
& + \frac{\rho c_0}{GI_p} \sin\varphi \left[\frac{\log(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2})}{2} + \frac{\sec\varphi \tan\varphi}{2} - \frac{\log(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2})}{2} \right]
\end{aligned}$$

$$+ \rho c_0 \cos\varphi \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) (-1 + \sec\varphi)$$

$$\begin{aligned}
Y_{35} = & \frac{\rho c_0}{GI_p} \cos\varphi \left[-\log(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}) + \log(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}) \right] \\
& + \frac{\rho c_0}{EI_{n0}} \cos\varphi \left[\frac{\log(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2})}{2} + \frac{\sec\varphi \tan\varphi}{2} - \frac{\log(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2})}{2} \right]
\end{aligned}$$

$$+ \rho c_0 \sin\varphi \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) (-1 + \sec\varphi)$$

$$Y_{36} = -\frac{\rho^2 c_0}{GI_p} \cos\varphi \left[\frac{\log(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2})}{4} + \frac{\sec\varphi \tan\varphi}{4} - \frac{\log(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2})}{4} \right]$$

$$+ \rho^2 c_0 \cos\varphi \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) \left[\frac{\log(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2})}{2} + \frac{\sec\varphi \tan\varphi}{2} - \frac{\log(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2})}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\rho^2 c_0}{EI_{n0}} \cos\varphi \left[\frac{\sec^3\varphi \tan\varphi}{8} - \frac{3\log(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2})}{16} + \frac{3\log(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2})}{16} \right. \\
& \left. - \frac{5\sec\varphi \tan\varphi}{16} \right] - \rho^2 c_0 \sin\varphi \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) \left[\frac{1}{3} - \frac{\sec\varphi}{2} + \frac{\sec^3\varphi}{6} \right] \\
& + \frac{\rho^2 c_0}{GI_p} \sin\varphi \left[\frac{2}{3} - \sec\varphi + \frac{\sec^3\varphi}{3} \right] + \frac{\rho^2 c_0}{EI_{n0}} \sin\varphi (-1 + \sec\varphi)
\end{aligned}$$

$$Y_{44} = \cos\varphi$$

$$Y_{45} = -\sin\varphi$$

$$Y_{46} = \rho_{c0} \sin\varphi \left(\frac{\sec^2\varphi - 1}{2} - 1 \right)$$

$$Y_{54} = \sin\varphi$$

$$Y_{55} = \cos\varphi$$

$$Y_{56} = -\rho_{c0} \cos\varphi \left(\frac{\sec^2\varphi - 1}{2} \right) + \rho_{c0} \sin\varphi \tan\varphi$$

$$Y_{66} = R_{b0}$$

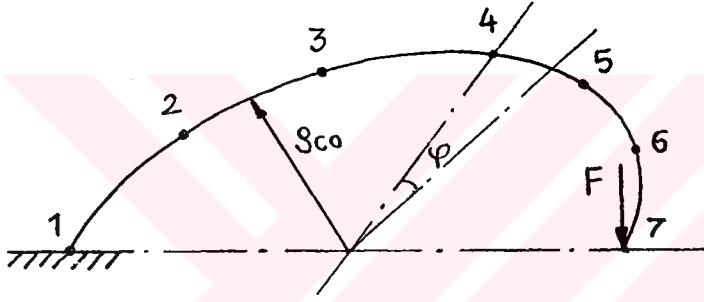
(3.33)

şeklinde, parabol eksenli dairesel sabit kesitli düzlemsel eğri eksenli kirişler için asal matris elde edilmiş olur.

BÖLÜM 4

SAYISAL ÖRNEKLER

4.1. Ankastre-Serbest Mesnetli, Serbest Ucundan Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan, Dairesel Sabit Kesitli Çember Eksenli Kiriş



Şekil - 4.1. Bir ucundan ankastre bağlı, diğer ucundan tekil bir yük etkisi altında bulunan dairesel sabit kesitli çember eksenli kiriş

Yarıdaki şekilde, yükleme ve bağlama durumu gösterilen eğri eksenli kiriş için statik hesap yapılacaktır. Örnek (3.2)' de de belirtildiği gibi çember eksenli bir kirişin eğrilik yarıçapı;

$$\rho_0(\varphi) = \rho_{c0} = \text{sabit}$$

olarak ifade edilebilir. Burada; ρ_{c0} referans koordinatındaki eğrilik yarıçapıdır ve sabittir. Rijitlikler; (3.28) denkleminde olduğu gibi;

$$D_{m0} = EI_{n0} = \text{sabit} \quad D_{tt} = GI_p = \text{sabit} \quad C_{bb} = \frac{1}{k_b} GA_0 = \text{sabit}$$

alınacaktır. Burada, daha önce tanımlandığı gibi, I_{n0} ve A_0 sırasıyla referans koordinatındaki eylemsizlik momenti ve kiriş kesit alanı değeri, E ve G sırasıyla

elastiklik ve kayma modülleri, k_b ise kayma gerilmesinin keside uniform olarak dağılmadığını ifade eden sabittir.

Eğri eksenli kirişin şekildeki yükleme ve bağlama durumu için, sınır şartları ;

$$\begin{aligned} v(-\pi/2) &= 0 & R_b(\pi/2) &= F \\ \Omega_n(-\pi/2) &= 0 & M_n(\pi/2) &= 0 \\ \Omega_t(-\pi/2) &= 0 & M_t(\pi/2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

şeklinde belirlenebilir.

Öte yandan dairesel sabit kesit için;

$$I_{n0} = \frac{\pi d^4}{64} \quad \text{ve} \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad (4.2)$$

şeklinde olacağından, $I_p = 2I_{n0}$ olarak hesaplanabilir. Ayrıca; kirişin kesit alanı,

$$A_0 = \frac{\pi d^2}{4} \quad (4.3)$$

şeklinde dir. Ve tablo – 2.1’ den dairesel kesit için, $k_b = 10/9$ olarak alınabilir.

Elde edilen bu verilere göre rijitlik ifadeleri yeniden düzenlenirse;

$$D_{nn} = EI_{n0} \quad D_{tt} = 2GI_{n0} \quad C_{bb} = \frac{9\pi}{40} Gd^2 \quad (4.4)$$

olarak elde edilebilirler.

Aşağıda, şekil-4.1’ deki yükleme ve mesnetleme durumu için, çember eksenli dairesel sabit kesitli eğri eksenli kirişin Mapple programı yardımıyla yapılan çözümü verilmiştir.

Burada;

$$\begin{aligned} \rho_{c0} &= 0.2 \text{ m}, & E &= 0.207 \times 10^{12} \text{ N/m}^2, & G &= 0.8 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 \\ F &= 500 \text{ N}, & d &= 0.02 \text{ m} \end{aligned}$$

şeklinde seçilmiştir.

$$I_{n0} = \frac{\pi d^4}{64}; \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad A_0 = \frac{\pi d^2}{4}; \quad k_b = \frac{10}{9}$$

$$\underline{Y} = \text{linalg_matrix}(6, 6, [Y_{1,1}, Y_{1,2}, Y_{1,3}, Y_{1,4}, Y_{1,5}, Y_{1,6}, Y_{2,1}, Y_{2,2}, Y_{2,3}, Y_{2,4}, Y_{2,5}, Y_{2,6}, \\ Y_{3,1}, Y_{3,2}, Y_{3,3}, Y_{3,4}, Y_{3,5}, Y_{3,6}, Y_{4,1}, Y_{4,2}, Y_{4,3}, Y_{4,4}, Y_{4,5}, Y_{4,6}, Y_{5,1}, Y_{5,2}, Y_{5,3}, Y_{5,4}, Y_{5,5}, \\ Y_{5,6}, Y_{6,1}, Y_{6,2}, Y_{6,3}, Y_{6,4}, Y_{6,5}, Y_{6,6}])$$

$$YI = \text{matrix}_{1..6, 1..6}; \quad y0 = \text{linalg_vector}(6); \quad y = \text{linalg_vector}(6); \quad ye = \text{linalg_vector}(6)$$

$$YE = \text{linalg_matrix}(6, 6, [YE_{1,1}, YE_{1,2}, YE_{1,3}, YE_{1,4}, YE_{1,5}, YE_{1,6}, YE_{2,1}, YE_{2,2}, YE_{2,3}, \\ YE_{2,4}, YE_{2,5}, YE_{2,6}, YE_{3,1}, YE_{3,2}, YE_{3,3}, YE_{3,4}, YE_{3,5}, YE_{3,6}, YE_{4,1}, YE_{4,2}, YE_{4,3}, YE_{4,4}, \\ YE_{4,5}, YE_{4,6}, YE_{5,1}, YE_{5,2}, YE_{5,3}, YE_{5,4}, YE_{5,5}, YE_{5,6}, YE_{6,1}, YE_{6,2}, YE_{6,3}, YE_{6,4}, YE_{6,5}, \\ YE_{6,6}])$$

$$b = \text{linalg_vector}(6, [0, 0, 0, 0, 0, F])$$

$$Y_{1,1} = 1$$

$$Y_{1,1} = 1$$

$$Y_{1,2} = -\rho c_0 \int_0^\varphi \cos \psi d\psi$$

$$Y_{1,2} = -\rho c_0 \sin \varphi$$

$$Y_{1,3} = \rho c_0 \int_0^\varphi \sin \psi d\psi$$

$$Y_{1,3} = \rho c_0 (-\cos \varphi + 1)$$

$$Y_{1,4} = \rho^2 c_0$$

$$\left(\left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) \int_0^\varphi \sin \psi \int_0^\psi \sin \xi \cos \xi d\xi d\psi - \int_0^\varphi \cos \psi \left(\frac{\int_0^\psi \cos(\xi)^2 d\xi}{EI_{n0}} + \frac{\int_0^\psi \sin(\xi)^2 d\xi}{GI_p} \right) d\psi \right)$$

$$Y_{1,4} = \rho^2 c_0 \left(\left(\frac{32}{G\pi d^4} - \frac{64}{E\pi d^4} \right) \left(\frac{1}{6} \cos(\varphi)^3 - \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{1}{3} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{16 - 2\cos(\varphi)^3 G + 6G\cos \varphi + 6G\varphi \sin \varphi + \cos(\varphi)^3 E + 3E\cos \varphi + 3E\varphi \sin \varphi}{3E\pi d^4 G} + \frac{64(G + E)}{3E\pi d^4 G} \right)$$

$$Y_{1,5} = \rho^2 c_0$$

$$\left(\int_0^\varphi \sin \psi \int_0^\psi \frac{\cos(\xi)^2}{GI_p} + \frac{\sin(\xi)^2}{EI_{n0}} d\xi d\psi + \int_0^\varphi \cos(\varphi) \int_0^\psi \cos(\xi) \sin(\xi) \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) d\xi d\psi \right)$$

$$Y_{1,5} = \rho^2 c_0$$

$$\left(\frac{16 - E \sin(\varphi)^3 - 3E \sin(\varphi) + 3E\varphi \cos(\varphi) + 2G \sin(\varphi)^3 - 6G \sin(\varphi) + 6G\varphi \cos(\varphi)}{3 G \pi d^4 E} \right. \\ \left. + \frac{16 \sin(\varphi) (-2G \cos(\varphi)^2 + 2G + E \cos(\varphi)^2 - E)}{3 G \pi d^4 E} \right)$$

$$Y_{1,6} = \frac{\rho_{c0} k_b \int_0^\varphi 1 d\psi}{GA_0} - \rho^3 c_0$$

$$\int_0^\varphi \cos(\psi) \int_0^\psi \left(\frac{\cos(\xi)^2}{EI_{n0}} + \frac{\sin(\xi)^2}{GI_p} \right) \int_0^\xi \cos(\ell) d\ell + \cos(\xi) \sin(\xi) \left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GI_p} \right) \int_0^\xi \sin(\ell) d\ell d\xi \\ + \sin(\varphi) \int_0^\psi \left(\frac{\sin(\xi)^2}{EI_{n0}} + \frac{\cos(\xi)^2}{GI_p} \right) \int_0^\xi \sin(\ell) d\ell + \cos(\xi) \sin(\xi) \left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GI_p} \right) \int_0^\xi \cos(\ell) d\ell d\xi d\psi$$

$$Y_{1,6} = \frac{40}{9} \frac{\rho_{c0} \varphi}{G \pi d^2} + \frac{8}{3} \rho^3 c_0 \left[-E \sin(\varphi) \cos(\varphi)^3 + E \sin(\varphi) \cos(\varphi) + 12E\varphi - 2E \sin(\varphi)^3 \right. \\ \left. - 16E \sin(\varphi) + 6E\varphi \cos(\varphi) + 4G \sin(\varphi)^3 - 16G \sin(\varphi) + 12G\varphi \cos(\varphi) - E \sin(\varphi)^3 \cos(\varphi) \right. \\ \left. + 4G \sin(\varphi) \cos(\varphi)^2 - 2E \sin(\varphi) \cos(\varphi)^2 \right] / (G \pi d^4 E)$$

$$Y_{2,1} = 0; \quad Y_{2,2} = \cos(\varphi); \quad Y_{2,3} = -\sin(\varphi)$$

$$Y_{2,1} = 0 \quad Y_{2,2} = \cos(\varphi) \quad Y_{2,3} = -\sin(\varphi)$$

$$Y_{2,4} = \rho_{c0} \left(\cos(\varphi) \int_0^\varphi \frac{\cos(\psi)^2}{EI_{n0}} + \frac{\sin(\psi)^2}{GI_p} d\psi + \sin(\varphi) \int_0^\varphi \cos(\psi) \sin(\psi) \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) d\psi \right)$$

$$Y_{2,4} = \rho_{c0} \left(16 \frac{\cos(\varphi)(2G\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 2G\varphi - E\sin(\varphi)\cos(\varphi) + E\varphi)}{G\pi d^4 E} \right.$$

$$\left. + \sin(\varphi) \left(16 \frac{\cos(\varphi)^2(-2G + E)}{G\pi d^4 E} - 16 \frac{-2G + E}{G\pi d^4 E} \right) \right)$$

$$Y_{2,5} = \rho_{c0} \left(-\sin(\varphi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\psi)^2}{GI_p} + \frac{\sin(\psi)^2}{EI_{n0}} d\psi - \cos(\varphi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\psi)\sin(\psi) \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) d\psi \right)$$

$$Y_{2,5} = \rho_{c0} \left(-16 \frac{\sin(\varphi)(E\sin(\varphi)\cos(\varphi) + E\varphi - 2G\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 2G\varphi)}{G\pi d^4 E} \right.$$

$$\left. - \cos(\varphi) \left(16 \frac{\cos(\varphi)^2(-2G + E)}{G\pi d^4 E} - 16 \frac{-2G + E}{G\pi d^4 E} \right) \right)$$

$$Y_{2,6} = \rho^2_{c0} \cos(\varphi)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(\psi)^2}{EI_{n0}} + \frac{\sin(\psi)^2}{GI_p} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\xi) d\xi + \cos(\psi)\sin(\psi) \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\xi) d\xi d\psi$$

$$Y_{2,6} = \rho^2_{c0} \cos(\varphi)$$

$$\left(-\frac{16 \cos(\varphi)(2E\sin(\varphi)^2 + 4E + 2E\cos(\varphi)^2 + 6G\cos(\varphi) - 3E\cos(\varphi))}{3 G\pi d^4 E} + 16 \frac{E + 2G}{G\pi d^4 E} \right)$$

$$Y_{3,1} = 0; \quad Y_{3,2} = \sin(\varphi); \quad Y_{3,3} = \cos(\varphi)$$

$$Y_{3,1} = 0; \quad Y_{3,2} = \sin(\varphi); \quad Y_{3,3} = \cos(\varphi)$$

$$Y_{3,4} = \rho_{c0} \left(\sin(\varphi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(\psi)^2}{EI_{n0}} + \frac{\sin(\psi)^2}{GI_p} \right) d\psi + \cos(\varphi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\psi)\sin(\psi) \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) d\psi \right)$$

$$Y_{3,4} = \rho_{c0} \left(16 \frac{\sin(\varphi)(2G\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 2G\varphi - E\sin(\varphi)\cos(\varphi) + E\varphi)}{G\pi d^4 E} \right.$$

$$+ \cos(\varphi) \left(-16 \frac{\cos(\varphi)^2 (-2G + E)}{G\pi d^4 E} + 16 \frac{-2G + E}{G\pi d^4 E} \right)$$

$$Y_{3,5} = \rho c_0 \left(\cos(\varphi) \int_0^{\varphi} \frac{\cos(\psi)^2}{GI_p} + \frac{\sin(\psi)^2}{EI_{n0}} d\psi + \sin(\varphi) \int_0^{\varphi} \cos(\psi) \sin(\psi) \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) d\psi \right)$$

$$Y_{3,5} = \rho c_0 \left(16 \frac{\cos(\varphi)(E \sin(\varphi) \cos(\varphi) + E\varphi - 2G \sin(\varphi) \cos(\varphi) + 2G\varphi)}{G\pi d^4 E} \right. \\ \left. + \sin(\varphi) \left(-16 \frac{\cos(\varphi)^2 (-2G + E)}{G\pi d^4 E} + 16 \frac{-2G + E}{G\pi d^4 E} \right) \right)$$

$$Y_{3,6} = \rho^2 c_0$$

$$\left(\sin(\varphi) \int_0^{\varphi} \left(\frac{\cos(\psi)^2}{EI_{n0}} + \frac{\sin(\psi)^2}{GI_p} \right) \int_0^{\psi} \cos(\xi) d\xi + \cos(\psi) \sin(\psi) \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) \int_0^{\psi} \sin(\xi) d\xi d\psi \right. \\ \left. - \cos(\varphi) \int_0^{\varphi} \left(\frac{\cos(\psi)^2}{GI_p} + \frac{\sin(\psi)^2}{EI_{n0}} \right) \int_0^{\psi} \sin(\xi) d\xi + \cos(\psi) \sin(\psi) \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) \int_0^{\psi} \cos(\xi) d\xi d\psi \right)$$

$$Y_{3,6} = \rho^2 c_0$$

$$\left(\sin(\varphi) \left(-\frac{16 \cos(\varphi)(2E \sin(\varphi)^2 + 4E + 2E \cos(\varphi)^2 + 6G \cos(\varphi) - 3E \cos(\varphi))}{3 G\pi d^4 E} + 16 \frac{E + 2G}{G\pi d^4 E} \right) \right. \\ \left. - \frac{16}{3} \cos(\varphi) [3E \sin(\varphi) \cos(\varphi) + 3E\varphi - 2E \sin(\varphi) \cos(\varphi)^2 - 4E \sin(\varphi) - 6G \sin(\varphi) \cos(\varphi) \right. \\ \left. + 6G\varphi - 2E \sin(\varphi)^3] / (G\pi d^4 E) \right)$$

$$Y_{4,1} = 0; \quad Y_{4,2} = 0; \quad Y_{4,3} = 0; \quad Y_{4,4} = \cos(\varphi) \quad Y_{4,5} = -\sin(\varphi);$$

$$Y_{4,6} = \rho c_0 \left(\cos(\varphi) \int_0^{\varphi} \cos(\psi) d\psi + \sin(\varphi) \int_0^{\varphi} \sin(\psi) d\psi \right)$$

$$Y_{4,1} = 0; \quad Y_{4,2} = 0; \quad Y_{4,3} = 0; \quad Y_{4,4} = \cos(\varphi) \quad Y_{4,5} = -\sin(\varphi);$$

$$Y_{4,6} = \rho c_0 [\sin(\varphi) \cos(\varphi) + \sin(\varphi) (-\cos(\varphi) + 1)]$$

$$Y_{5,1} = 0; \quad Y_{5,2} = 0; \quad Y_{5,3} = 0; \quad Y_{5,4} = \sin(\varphi) \quad Y_{5,5} = \cos(\varphi)$$

$$Y_{5,1} = 0; \quad Y_{5,2} = 0; \quad Y_{5,3} = 0; \quad Y_{5,4} = \sin(\varphi) \quad Y_{5,5} = \cos(\varphi)$$

$$Y_{5,6} = \rho_{c0} \left(\sin(\varphi) \int_0^\varphi \cos(\psi) d\psi - \cos(\varphi) \int_0^\varphi \sin(\psi) d\psi \right)$$

$$Y_{5,6} = \rho_{c0} [\sin(\varphi)^2 - \cos(\varphi)(-\cos(\varphi) + 1)]$$

$$Y_{6,1} = 0; \quad Y_{6,2} = 0; \quad Y_{6,3} = 0; \quad Y_{6,4} = 0 \quad Y_{6,5} = 0 \quad Y_{6,6} = 1$$

$$Y_{6,1} = 0; \quad Y_{6,2} = 0; \quad Y_{6,3} = 0; \quad Y_{6,4} = 0 \quad Y_{6,5} = 0 \quad Y_{6,6} = 1$$

$$YE_{1,1} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -1.570796327, Y_{1,1}));$$

$$YE_{1,2} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -1.570796327, Y_{1,2}));$$

$$YE_{1,3} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -1.570796327, Y_{1,3}));$$

$$YE_{1,4} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -1.570796327, Y_{1,4}));$$

$$YE_{1,5} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -1.570796327, Y_{1,5}));$$

$$YE_{1,6} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -1.570796327, Y_{1,6}));$$

$$YE_{2,1} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -1.570796327, Y_{2,1}));$$

$$YE_{2,2} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -1.570796327, Y_{2,2}));$$

$$YE_{2,3} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -1.570796327, Y_{2,3}));$$

$$YE_{2,4} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -1.570796327, Y_{2,4}));$$

$$YE_{2,5} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -1.570796327, Y_{2,5}));$$

$$YE_{2,6} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -1.570796327, Y_{2,6}));$$

$$YE_{3,1} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -1.570796327, Y_{3,1}));$$

$$YE_{3,2} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -1.570796327, Y_{3,2}));$$

$$YE_{3,3} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -1.570796327, Y_{3,3}));$$

$$YE_{3,4} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = - 1.570796327 , Y_{3,4})) ;$$

$$YE_{3,5} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = - 1.570796327 , Y_{3,5})) ;$$

$$YE_{3,6} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = - 1.570796327 , Y_{3,6})) ;$$

$$YE_{4,1} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{4,1})) ;$$

$$YE_{4,2} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{4,2})) ;$$

$$YE_{4,3} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{4,3})) ;$$

$$YE_{4,4} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{4,4})) ;$$

$$YE_{4,5} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{4,5})) ;$$

$$YE_{4,6} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{4,6})) ;$$

$$YE_{5,1} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{5,1})) ;$$

$$YE_{5,2} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{5,2})) ;$$

$$YE_{5,3} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{5,3})) ;$$

$$YE_{5,4} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{5,4})) ;$$

$$YE_{5,5} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{5,5})) ;$$

$$YE_{5,6} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{5,6})) ;$$

$$YE_{6,1} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{6,1})) ;$$

$$YE_{6,2} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{6,2})) ;$$

$$YE_{6,3} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{6,3})) ;$$

$$YE_{6,4} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{6,4})) ;$$

$$YE_{6,5} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{6,5})) ;$$

$$YE_{6,6} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = 1.570796327 , Y_{6,6})) ;$$

$$YE_{1,1} = 1$$

$$YE_{1,2} = 1. \rho_{c0}$$

$$YE_{1,3} = 1.000000000 \rho_{c0}$$

$$YE_{1,4} = \rho^2_{c0}$$

$$\left(\frac{10.66666667}{G\pi d^4} - \frac{21.33333334}{E\pi d^4} - \frac{16}{3} \frac{9.424777961G + 4.712388980E}{E\pi d^4 G} + \frac{64}{3} \frac{G + E}{E\pi d^4 G} \right)$$

$$YE_{1,5} = \rho^2_{c0} \left(-\frac{16}{3} \frac{4.000000001E + 4.000000002G}{G\pi d^4 E} - 5.333333333 \frac{2G - 1E}{G\pi d^4 E} \right)$$

$$YE_{1,6} = -6.981317008 \frac{\rho_{c0}}{G\pi d^2} + \frac{8}{3} \frac{\rho^3_{c0} (-8.495559198E + 12.00000000G)}{G\pi d^4 E}$$

$$YE_{2,1} = 0$$

$$YE_{2,2} = -.205103807 \cdot 10^{-9}$$

$$YE_{2,3} = 1$$

$$YE_{2,4} = \rho_{c0} \left(-.3281654091 \cdot 10^{-8} \frac{-3.141592654G - 1.570796327E}{G\pi d^4 E} + 16 \cdot \frac{-2G + E}{G\pi d^4 E} \right)$$

$$YE_{2,5} = \rho_{c0} \left(16 \cdot \frac{-3.141592654G - 1.570796327E}{G\pi d^4 E} - .3281654091 \cdot 10^{-8} \frac{-2G + E}{G\pi d^4 E} \right)$$

$$YE_{2,6} = -.2051033807 \cdot 10^{-9}$$

$$\rho^2_{c0} \left(.1093884697 \cdot 10^{-8} \frac{6.000000001E - .1230620284 \cdot 10^{-8} G}{G\pi d^4 E} + 16 \frac{E + 2G}{G\pi d^4 E} \right)$$

$$YE_{3,1} = 0$$

$$YE_{3,2} = -1$$

$$YE_{3,3} = -.2051033807 \cdot 10^{-9}$$

$$YE_{3,4} = \rho_{c0} \left(-16 \cdot \frac{-3.141592654G - 1.570796327E}{G\pi d^4 E} - .3281654091 \cdot 10^{-8} \frac{-2G + E}{G\pi d^4 E} \right)$$

$$YE_{3,5} = \rho_{C0} \left(- .3281654091.10^{-8} \frac{- 3.141592654G - 1.570796327E}{G\pi d^4 E} - 16 \frac{- 2G + E}{G\pi d^4 E} \right)$$

$$YE_{3,6} = \rho^2_{C0} \left(- .1093884697.10^{-8} \frac{6.0000000001E - .1230620284.10^{-8} G}{G\pi d^4 E} - 16 \frac{E + 2G}{G\pi d^4 E} \right. \\ \left. + .1093884697.10^{-8} \frac{1.287611020E - 9.424777963G}{G\pi d^4 E} \right)$$

$$YE_{4,1} = 0$$

$$YE_{4,2} = 0$$

$$YE_{4,3} = 0$$

$$YE_{4,4} = - .2051033807.10^{-9}$$

$$YE_{4,5} = - 1.$$

$$YE_{4,6} = .9999999998 \rho_{C0}$$

$$YE_{5,1} = 0$$

$$YE_{5,2} = 0$$

$$YE_{5,3} = 0$$

$$YE_{5,4} = 1.$$

$$YE_{5,5} = - .2051033807.10^{-9}$$

$$YE_{5,6} = 1.000000000 \rho_{C0}$$

$$YE_{6,1} = 0$$

$$YE_{6,2} = 0$$

$$YE_{6,3} = 0$$

$$YE_{6,4} = 0$$

$$YE_{6,5} = 0$$

$$YE_{6,6} = 1$$

$$YI = \text{linalg_inverse}(\text{matrix}(\underline{Y}))$$

$$\begin{aligned}
YI = & \left[1, \frac{\sin(\varphi)\rho_{c0}}{\%1}, \frac{(\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2 - \cos(\varphi))\rho_{c0}}{\%1}, -\frac{16}{3}(-3\cos(\varphi)^4 E + 6\cos(\varphi)^4 G \right. \\
& - 6\cos(\varphi)^3 G + 3\cos(\varphi)^3 E - 4E\sin(\varphi)^2 \cos(\varphi)^2 + 8G\sin(\varphi)^2 \cos(\varphi)^2 - 6G\cos(\varphi)^2 \\
& - 3E\cos(\varphi)^2 + 3E\sin(\varphi)^2 \cos(\varphi) + 6G\cos(\varphi) - 6G\sin(\varphi)^2 \cos(\varphi) + 3E\cos(\varphi) \\
& + 2\sin(\varphi)^4 G - \sin(\varphi)^4 E + 6G\varphi\sin(\varphi) + 3E\varphi\sin(\varphi) - 2\sin(\varphi)^2 G - 5E\sin(\varphi)^2)\rho_{c0}^2 / \\
& (\%1G\pi d^4 E), \frac{16}{3}(-4\sin(\varphi)\cos(\varphi)^3 G + 2E\sin(\varphi)\cos(\varphi)^3 - 2E\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\
& + 3E\varphi\cos(\varphi) + 6G\varphi\cos(\varphi) + 2E\sin(\varphi)^3 \cos(\varphi) + 4G\sin(\varphi)\cos(\varphi) - 4G\sin(\varphi)^3 \cos(\varphi) \\
& - 6G\sin(\varphi) - 3E\sin(\varphi))\rho_{c0}^2 / (\%1G\pi d^4 E), -\frac{8}{9}(-36\rho_{c0}^2 G\sin(\varphi)\cos(\varphi)^2 \\
& - 42\rho_{c0}^2 E\sin(\varphi)\cos(\varphi)^2 - 12\rho_{c0}^2 E\sin(\varphi)^3 \cos(\varphi)^2 + 18\rho_{c0}^2 \cos(\varphi)\sin(\varphi)^2 E\varphi \\
& + 18\rho_{c0}^2 \cos(\varphi)^3 E\varphi + 36\rho_{c0}^2 \cos(\varphi)\sin(\varphi)^2 G\varphi + 36\rho_{c0}^2 \cos(\varphi)^3 G\varphi - 12\rho_{c0}^2 \sin(\varphi) \\
& \cos(\varphi)^4 E - 36\rho_{c0}^2 \sin(\varphi)^3 G - 18\sin(\varphi)^3 \rho_{c0}^2 E - 27\rho_{c0}^2 E\sin(\varphi)^3 \cos(\varphi) \\
& - 9\rho_{c0}^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi)^3 E + 36\rho_{c0}^2 E\varphi\cos(\varphi)^2 + 60\rho_{c0}^2 G\cos(\varphi)\sin(\varphi)^3 \\
& + 24\rho_{c0}^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi)^3 G + 5\cos(\varphi)^2 \varphi d^2 E + 18\rho_{c0}^2 E\cos(\varphi)^3 \sin(\varphi)^3 - 48\rho_{c0}^2 G\sin(\varphi)^3 \\
& \cos(\varphi)^3 - 24\rho_{c0}^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi)^5 G + 9\rho_{c0}^2 \cos(\varphi)^5 \sin(\varphi)E + 9\rho_{c0}^2 \cos(\varphi)\sin(\varphi)^5 E \\
& - 24\rho_{c0}^2 \sin(\varphi)^5 \cos(\varphi)G + 5\sin(\varphi)^2 E\varphi d^2 + 18\rho_{c0}^2 \sin(\varphi)^2 E\varphi - 36\rho_{c0}^2 \sin(\varphi)^2 G\varphi)\rho_{c0} / \\
& (\%1G\pi d^4 E) \Big] \\
& \left[0, \frac{\cos(\varphi)}{\%1}, \frac{\sin(\varphi)}{\%1}, -16 \frac{(2G\varphi\cos(\varphi) + E\varphi\cos(\varphi) + 2G\sin(\varphi) - E\sin(\varphi))\rho_{c0}}{\%1G\pi d^4 E}, \right. \\
& \left. -16(2\cos(\varphi)^3 G - \cos(\varphi)^3 E + 2G\sin(\varphi)^2 \cos(\varphi) - E\sin(\varphi)^2 \cos(\varphi) - 2G\cos(\varphi) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E \cos(\varphi) + E \varphi \sin(\varphi) + 2G\varphi \sin(\varphi)) \rho_{c0} / (\%1 G \pi d^4 E), \frac{16}{3} (6 \cos(\varphi)^3 G - \cos(\varphi)^3 E \\
& - 6 \cos(\varphi)^3 G + 7 \cos(\varphi)^3 E - 4 E \sin(\varphi)^2 \cos(\varphi)^3 + 12 G \sin(\varphi)^2 \cos(\varphi)^3 - 6 E \cos(\varphi)^2 \\
& + 3 E \sin(\varphi)^2 \cos(\varphi)^2 - 6 G \sin(\varphi)^2 \cos(\varphi)^2 + 6 G \sin(\varphi) \cos(\varphi)^2 G \varphi \\
& + 3 \sin(\varphi) \cos(\varphi)^2 E \varphi - 6 \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)^4 G + 3 \cos(\varphi) \sin(\varphi) E \varphi - 6 G \sin(\varphi)^2 \cos(\varphi) \\
& - 3 \sin(\varphi)^4 \cos(\varphi) E + 6 \cos(\varphi) \sin(\varphi) G \varphi + 3 E \cos(\varphi) \sin(\varphi)^2 - 6 \sin(\varphi)^2 \\
& + 6 \sin(\varphi)^3 G \varphi + 3 \sin(\varphi)^3 E \varphi) \rho_{c0}^2 / (\%1 G \pi d^4 E) \Big] \\
& \left[0, -\frac{\sin(\varphi)}{\%1}, \frac{\cos(\varphi)}{\%1}, 16(E \sin(\varphi)^2 \cos(\varphi) + E \varphi \sin(\varphi) - 2 G \sin(\varphi)^2 \cos(\varphi) \right. \\
& + 2 G \varphi \sin(\varphi) G - 2 \cos(\varphi)^3 G + \cos(\varphi)^3 E + 2 G \cos(\varphi) - E \cos(\varphi)) \rho_{c0} / (\%1 G \pi d^4 E), \\
& - 16 \frac{(E \varphi \cos(\varphi) + 2 G \varphi \cos(\varphi) - 2 G \sin(\varphi) + E \sin(\varphi)) \rho_{c0}}{\%1 G \pi d^4 E}, \frac{16}{3} (-2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)^4 E \\
& + 6 \cos(\varphi)^3 G \varphi + 3 \cos(\varphi)^3 E \varphi - 2 E \sin(\varphi)^3 \cos(\varphi)^2 - 6 G \sin(\varphi) \cos(\varphi)^2 \\
& - E \sin(\varphi) \cos(\varphi)^2 - 3 E \sin(\varphi)^3 \cos(\varphi) + 3 \cos(\varphi) \sin(\varphi)^2 E \varphi + 6 G \sin(\varphi)^3 \cos(\varphi) \\
& + 6 \cos(\varphi) \sin(\varphi)^2 G \varphi + 3 E \sin(\varphi)^3 - 3 \sin(\varphi)^2 E \varphi - 6 G \sin(\varphi)^3 - 6 \sin(\varphi)^2 G \varphi) \rho_{c0}^2 \\
& \left. / (\%1 G \pi d^4 E) \right] \\
& \left[0, 0, 0, \frac{\cos(\varphi)}{\%1}, \frac{\sin(\varphi)}{1}, -\rho_{c0} \sin(\varphi) \right] \\
& \left[0, 0, 0, -\frac{\sin(\varphi)}{\%1}, \frac{\cos(\varphi)}{1}, -(\cos(\varphi) - 1) \rho_{c0} \right] \\
& [0, 0, 0, 0, 0, 1]
\end{aligned}$$

$$\%1 = \cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2$$

$$y_0 = \text{linalg_linsolve} (Y E, b)$$

$$y_0 = \lfloor 4000000000.10^{-112}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_{c0} F (.5555555555 \cdot 10^{113} d^2 E + .3273239544 \cdot 10^{114} \rho_{c0}^2 E - .1453520910 \cdot 10^{114} \rho_{c0}^2 G)}{G d^4 E}, \\
& - .4000000000 \cdot 10^{-112} \frac{\rho_{c0}^2 F (.4546479089 \cdot 10^{114} E + .4000000000 \cdot 10^{114} G)}{G d^4 E}, \\
& .1000000000 \cdot 10^{-84} \frac{\rho_{c0}^2 F (.130929581 \cdot 10^{87} E + .581408364 \cdot 10^{86} G)}{G d^4 E}, -.999999998 \rho_{c0} F, \\
& 1.000000000 \rho_{c0} F, F]
\end{aligned}$$

$$y = \text{linalg_multiply}(\underline{Y}, y_0)$$

$$y = [4000000000 \cdot 10^{-112}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_{c0} F (.5555555555 \cdot 10^{113} d^2 E + .3273239544 \cdot 10^{114} \rho_{c0}^2 E - .1453520910 \cdot 10^{114} \rho_{c0}^2 G)}{G d^4 E} \\
& + .4000000000 \cdot 10^{-112} \frac{\rho_{c0}^3 \sin(\varphi) F (.4546479089 \cdot 10^{114} E + .4000000000 \cdot 10^{114} G)}{G d^4 E}, \\
& + .1000000000 \cdot 10^{-84} \frac{\rho_{c0}^3 (-\cos(\varphi) + 1) F (.130929581 \cdot 10^{87} E + .581408364 \cdot 10^{86} G)}{G d^4 E} \\
& - .999999998 \rho_{c0}^3 \left(\left(\frac{32}{G \pi d^4} - \frac{64}{E \pi d^4} \right) \left(\frac{1}{6} \cos(\varphi)^3 - \frac{1}{2} \cos(\varphi) + \frac{1}{3} \right) \right. \\
& \left. - \frac{16 - 2 \cos(\varphi)^3 G + 6 G \cos(\varphi) + 6 G \varphi \sin(\varphi) + \cos(\varphi)^3 E + 3 E \cos(\varphi) + 3 E \varphi \sin(\varphi)}{3 E \pi d^4 G} \right. \\
& \left. + \frac{64}{3} \frac{G + E}{E \pi d^4 G} \right) F + 1.000000000 \rho_{c0}^3 \\
& \left(- \frac{16 - E \sin(\varphi)^3 - 3 E \sin(\varphi) + 3 E \varphi \cos(\varphi) + 2 G \sin(\varphi)^3 - 6 G \sin(\varphi) + 6 G \varphi \cos(\varphi)}{3 G \pi d^4 E} \right. \\
& \left. + \frac{16}{3} \frac{\sin(\varphi) (-2 G \cos(\varphi)^2 + 2 G + E \cos(\varphi)^2 - E)}{G \pi d^4 E} \right) F + \left(\frac{40}{9} \frac{\rho_{c0} \varphi}{G \pi d^2} + \frac{8}{3} \rho_{c0}^3 \right. \\
& \left. (-E \sin(\varphi) \cos(\varphi)^3 + E \sin(\varphi) \cos(\varphi) + 12 E \varphi - 2 E \sin(\varphi)^3 - 16 E \sin(\varphi) + 6 E \varphi \cos(\varphi)) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4G\sin(\varphi)^3 - 16G\sin(\varphi) + 12G\varphi\cos(\varphi) - E\sin(\varphi)^3\cos(\varphi) + 4G\sin(\varphi)\cos(\varphi)^2 \\
& - 2E\sin(\varphi)\cos(\varphi)^2) / (G\pi d^4 E) \Big) F, \\
& - .400000000.10^{-112} \frac{\rho_{c0}^2 \cos(\varphi) F(.4546479089.10^{114} E + .400000000.10^{114} G)}{Gd^4 E}, \\
& - .100000000.10^{-84} \frac{\rho_{c0}^2 \sin(\varphi) F(.130929581.10^{87} E + .581408364.10^{86} G)}{Gd^4 E} \\
& - .999999998\rho_{c0}^2 \left(16 \frac{\cos(\varphi)(2G\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 2G\varphi - E\sin(\varphi)\cos(\varphi) + E\varphi)}{G\pi d^4 E} \right. \\
& \left. + \sin(\varphi) \left(16 \frac{\cos(\varphi)^2(-2G + E)}{G\pi d^4 E} - 16 \frac{-2G + E}{G\pi d^4 E} \right) \right) F + 1.000000000\rho_{c0}^2 \\
& \left(- 16 \frac{\sin(\varphi)(E\sin(\varphi)\cos(\varphi) + E\varphi - 2G\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 2G\varphi)}{G\pi d^4 E} \right. \\
& \left. - \cos(\varphi) \left(16 \frac{\cos(\varphi)^2(-2G + E)}{G\pi d^4 E} - 16 \frac{-2G + E}{G\pi d^4 E} \right) \right) F + \rho_{c0}^2 \cos(\varphi) \\
& \left(- \frac{16}{3} \frac{\cos(\varphi)(2E\sin(\varphi)^2 + 4E + 2E\cos(\varphi)^2 + 6G\cos(\varphi) - 3E\cos(\varphi))}{G\pi d^4 E} + 16 \frac{E + 2G}{G\pi d^4 E} \right) \\
& F, - .400000000.10^{-112} \frac{\rho_{c0}^2 \sin(\varphi) F(.4546479089.10^{114} E + .400000000.10^{114} G)}{Gd^4 E} \\
& + .100000000.10^{-84} \frac{\rho_{c0}^2 \cos(\varphi) F(.130929581.10^{87} E + .581408364.10^{86} G)}{Gd^4 E} \\
& - .999999998\rho_{c0}^2 \left(16 \frac{\sin(\varphi)(2G\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 2G\varphi - E\sin(\varphi)\cos(\varphi) + E\varphi)}{G\pi d^4 E} \right. \\
& \left. + \cos(\varphi) \left(- 16 \frac{\cos(\varphi)^2(-2G + E)}{G\pi d^4 E} + 16 \frac{-2G + E}{G\pi d^4 E} \right) \right) F + 1.000000000\rho_{c0}^2 \\
& \left(16 \frac{\cos(\varphi)(E\sin(\varphi)\cos(\varphi) + E\varphi - 2G\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 2G\varphi)}{G\pi d^4 E} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin(\varphi) \left(-16 \frac{\cos(\varphi)^2 (-2G + E)}{G\pi d^4 E} + 16 \frac{-2G + E}{G\pi d^4 E} \right) F + \rho_{c0}^2 (\sin(\varphi) \\
& \left(-\frac{16}{3} \frac{\cos(\varphi)(2E\sin(\varphi)^2 + 4E + 2E\cos(\varphi)^2 + 6G\cos(\varphi) - 3E\cos(\varphi))}{G\pi d^4 E} + 16 \frac{E + 2G}{G\pi d^4 E} \right) \\
& - \frac{16}{3} \cos(\varphi)(3E\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 3E\varphi - 2E\sin(\varphi)\cos(\varphi)^2 - 4E\sin(\varphi) \\
& - 6G\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 6G\varphi - 2E\sin(\varphi)^3) / (G\pi d^4 E) F, -.999999998\cos(\varphi)\rho_{c0}F \\
& - 1.000000000\sin(\varphi)\rho_{c0}F + \rho_{c0}\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \sin(\varphi)(-\cos(\varphi) + 1))F, \\
& - .999999998\sin(\varphi)\rho_{c0}F + 1.000000000\cos(\varphi)\rho_{c0}F \\
& + \sin(\varphi)^2 \rho_{c0} - \cos(\varphi)(-\cos(\varphi) + 1))F, F]
\end{aligned}$$

```

ye1 = simplify(eval(subs( rho_c0 = .2, E = .207.10^12, G = .8.10^11, F = 500, d = .02, y1 )));
simp(eval(subs( rho_c0 = .2, E = .207.10^12, G = .8.10^11, F = 500, d = .02, phi = -1.5707, y1 )));
simp(eval(subs( rho_c0 = .2, E = .207.10^12, G = .8.10^11, F = 500, d = .02, phi = -.78539, y1 )));
simp(eval(subs( rho_c0 = .2, E = .207.10^12, G = .8.10^11, F = 500, d = .02, phi = -.39269, y1 )));
simp(eval(subs( rho_c0 = .2, E = .207.10^12, G = .8.10^11, F = 500, d = .02, phi = 0, y1 )));
simp(eval(subs( rho_c0 = .2, E = .207.10^12, G = .8.10^11, F = 500, d = .02, phi = .39269, y1 )));
simp(eval(subs( rho_c0 = .2, E = .207.10^12, G = .8.10^11, F = 500, d = .02, phi = .78539, y1 )));
simp(eval(subs( rho_c0 = .2, E = .207.10^12, G = .8.10^11, F = 500, d = .02, phi = 1.5707, y1 )));

```

$$\begin{aligned}
ye_1 = & .005006944444 + .004432367152 \sin(\varphi) - .001610634587 \cos(\varphi) \\
& - .9464413947 \cdot 10^{-13} \cos(\varphi)^3 + .002821732563 \varphi \sin(\varphi) + .003187519831 \varphi \\
& .1591549431 \cdot 10^{-11} \\
& - .0002024968476 \\
& .0009950309006
\end{aligned}$$

. 003396309861

. 006890890071

. 01107276133

. 01887862319

```

ye2 = simplify(eval(subs( rhoCo = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, y2 )));
simp(eval(subs( rhoCo = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = -1.5707, y2 )));
simp(eval(subs( rhoCo = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = -.78539, y2 )));
simp(eval(subs( rhoCo = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = -.39269, y2 )));
simp(eval(subs( rhoCo = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = 0, y2 )));
simp(eval(subs( rhoCo = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = .39269, y2 )));
simp(eval(subs( rhoCo = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = .78539, y2 )));
simp(eval(subs( rhoCo = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = 1.5707, y2 )));

ye2 = -. 0239686672 Cos (phi) - . 0221618357 Sin (phi) - . 763943726.10-12 Cos (phi)2 Sin (phi)
- . 01410866282 phi Cos (phi) + . 001806831480 Cos (phi)3 - . 01410866283 phi Sin (phi)
- . 01591549431 Cos (phi)2

```

. 9549296584.10⁻¹¹

- . 008596558536

- . 02282461096

. 003396309861

- . 05002397895

- . 05560891154

- . 04432367151

```

ye3 = simplify(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, y3 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = -1.5707, y3 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = -.78539, y3 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = -.39269, y3 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = 0, y3 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = .39269, y3 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = .78539, y3 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = 1.5707, y3 )));

```

```

ye3 = -.02216183572 Sin(phi) + .02396866724 cos(phi) + .100000000.10-12 Cos(phi)3
-.0141086628 phi Sin(phi) + .118092967.10-11 Cos(phi)2 Sin(phi) + .584098641.10-11 phi Cos(phi)
- .3953408785.10-11 Cos(phi) Sin(phi)
      - .3183098861.10-11
      .02478379930
      .02850488660
      .003396309861
      .01154295188
      - .006557769364
      - .04432367147

```

```

ye4 = simplify(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, y4 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = -1.5707, y4 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = -.78539, y4 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = -.39269, y4 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = 0, y4 )));

```

```
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = .39269, y4 )));
```

```
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = .78539, y4 )));
```

```
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = 1.5707, y4 )));
```

```
ye4 = - 100.Cos (phi)
```

```
0
```

```
- 70.71067811
```

```
- 92.38795325
```

```
- 100
```

```
- 92.38795325
```

```
- 70.71067811
```

```
0
```

```
ye5 = simplify(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, y5 )));
```

```
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = -1.5707, y5 )));
```

```
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = -.78539, y5 )));
```

```
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = -.39269, y5 )));
```

```
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = 0, y5 )));
```

```
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = .39269, y5 )));
```

```
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = .78539, y5 )));
```

```
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = 1.5707, y5 )));
```

```
ye5 = - 100.Sin (phi) + 100
```

```
200
```

```
170.7106781
```

```
138.2683432
```

100

61.73165676

29.28932188

. 2051033807.10⁻⁷

```

ye6 = simplify(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, y6 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = -1.5707, y6 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = - .78539, y6 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = - .39269, y6 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = 0, y6 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = .39269, y6 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = .78539, y6 )));
simp(eval(subs( rhoC0 = .2, E = .207.1012, G = .8.1011, F = 500, d = .02, phi = 1.5707, y6 )));

```

ye6 = 500

500

500

500

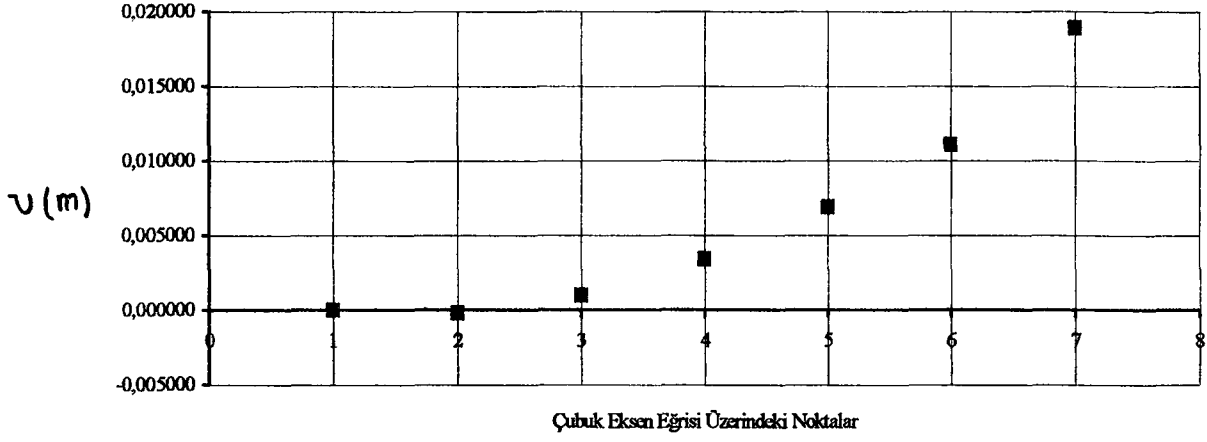
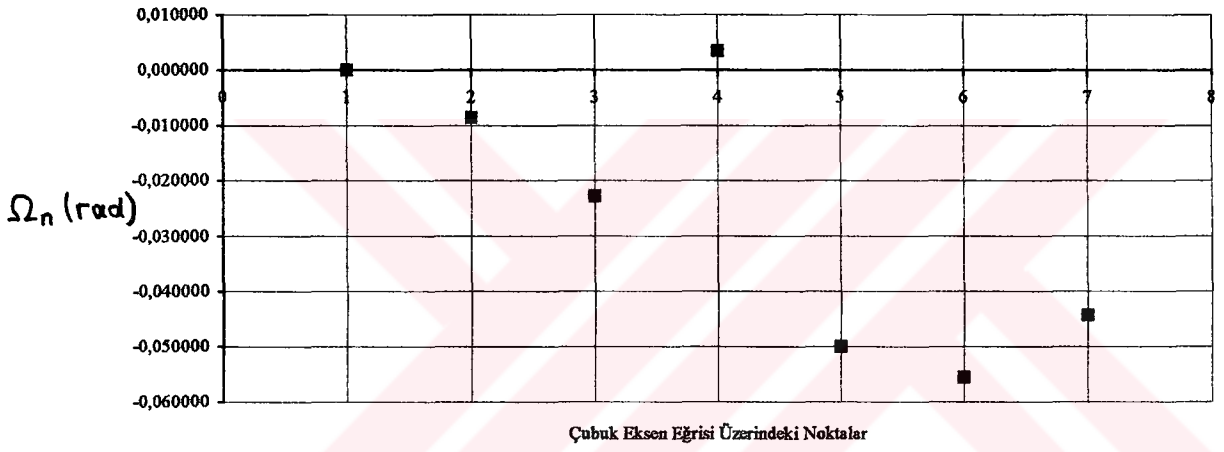
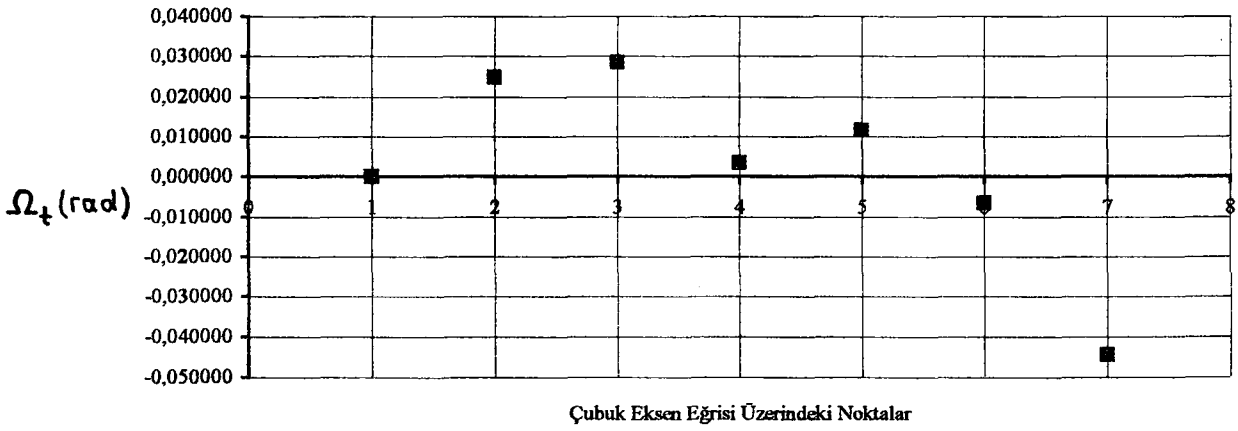
500

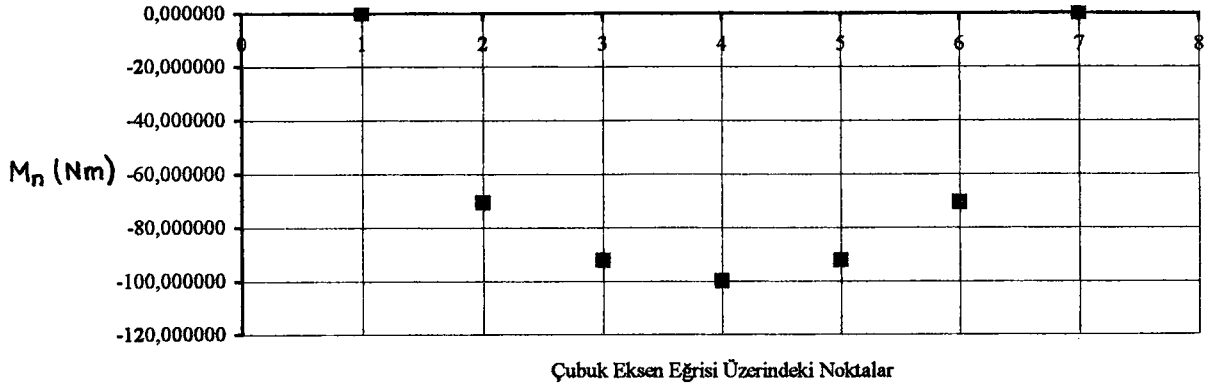
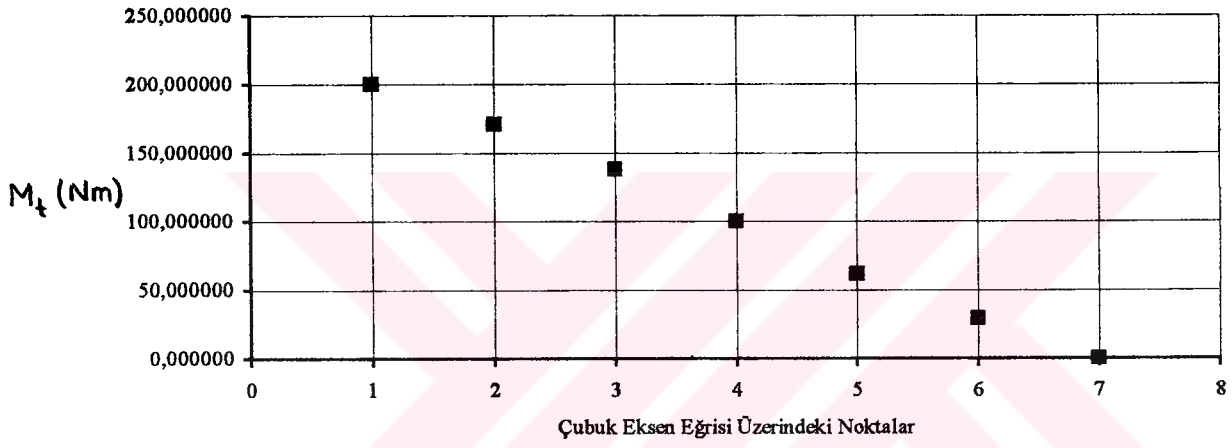
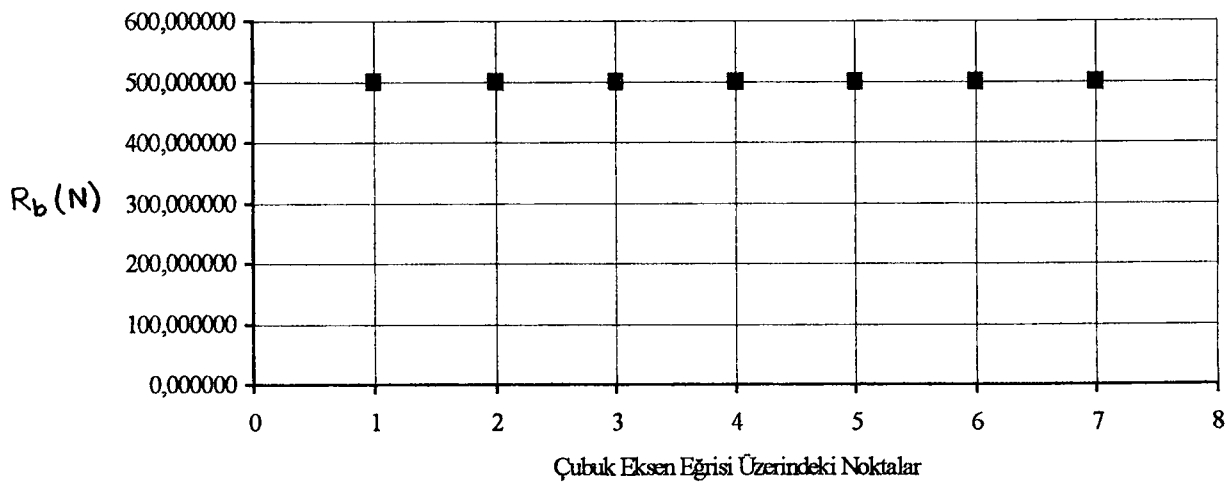
500

500

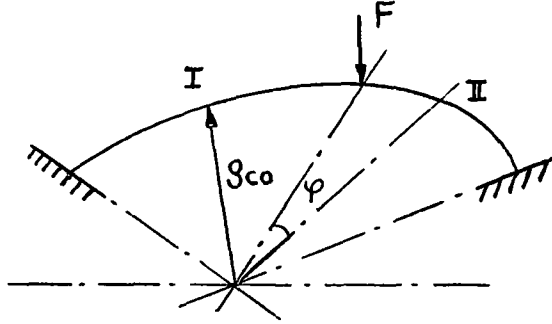
şeklinde elde edilir.

Aşağıdaki grafiklerde; v , Ω_n , Ω_t , M_n , M_t ve R_b ' nin kiriş eksen eğrisi üzerinde bulunan farklı ϕ açılarna haiz noktadaki (Şekil-4.1) değerleri gösterilmektedir.

Şekil - 4.2. ($v - \phi$) DeğişimiŞekil - 4.3. ($\Omega_n - \phi$) DeğişimiŞekil - 4.4. ($\Omega_t - \phi$) Değişimi

Şekil - 4.5. ($M_n - \phi$) DeğişimiŞekil - 4.6. ($M_t - \phi$) DeğişimiŞekil - 4.7. ($R_b - \phi$) Değişimi

4.2. İki Ucundan Ankastre Mesnetli ve Orta Noktasından Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan Dikdörtgen Sabit Kesitli Çember Eksenli Kiriş



Şekil - 4.8. İki Ucundan Ankastre Mesnetli ve Orta Noktasından Etkiyen F Tekil Yükünü Taşıyan Dikdörtgen Sabit Kesitli Çember Eksenli Kiriş

Yarıdaki şekilde, yükleme ve mesnetleme durumu gösterilen eğri eksenli kiriş için statik hesap yapılacaktır. Örnek (3.2)' de de belirtildiği gibi çember eksenli bir kirişin eğrilik yarıçapı;

$$\rho_0(\varphi) = \rho_{c0} = \text{sabit}$$

olarak ifade edilebilir. Burada ρ_{c0} referans koordinatındaki eğrilik yarıçapıdır ve sabittir. Rijitlikler; (3.28) denkleminde olduğu gibi;

$$D_{mm} = EI_{n0} = \text{sabit} \quad D_{tt} = GI_p = \text{sabit} \quad C_{bb} = \frac{1}{k_b} GA_0 = \text{sabit}$$

alınacaktır. Burada, daha önce tanımlandığı gibi, I_{n0} ve A_0 sırasıyla referans koordinatındaki eylemsizlik momenti ve kiriş kesit alanı değeri, E ve G sırasıyla elastiklik ve kayma modülleri, k_b ise kayma gerilmesinin keside uniform olarak dağılmadığını ifade eden sabittir. Tablo – 2.1' den dikdörtgen kesit için, $k_b = 6/5$ olarak alınabilir.

Eğri eksenli kirişin şekildeki yükleme ve mesnetleme durumu için, sınır şartları ;

$$\begin{aligned} v_1(-\pi/4) &= 0 & \Omega_{n1}(-\pi/4) &= 0 & \Omega_{t1}(-\pi/4) &= 0 \\ v_2(\pi/4) &= 0 & \Omega_{n2}(\pi/4) &= 0 & \Omega_{t2}(\pi/4) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde belirlenebilir.

Aşağıda, şekil-4.8' deki yükleme ve mesnetleme durumu için, çember eksenli dikdörtgen sabit kesitli eğri eksenli kirişin Mapple programı yardımıyla yapılan çözümü verilmiştir. Burada;

$$\begin{aligned} \rho_{c0} &= 108 \text{ in.}, & E &= 4240 \text{ psi}, & G &= 1760 \text{ psi}, & F &= 11 \text{ kips}, \\ I_{n0} &= 354 \text{ in.}^4 & I_p &= 24.5 \text{ in.}^4, & A_0 &= 72 \text{ in.}^2 \end{aligned}$$

şeklinde seçilmiştir.

$$\underline{Y} = \text{linalg_matrix} (6, 6, [Y_{1,1}, Y_{1,2}, Y_{1,3}, Y_{1,4}, Y_{1,5}, Y_{1,6}, Y_{2,1}, Y_{2,2}, Y_{2,3}, Y_{2,4}, Y_{2,5}, Y_{2,6}, \\ Y_{3,1}, Y_{3,2}, Y_{3,3}, Y_{3,4}, Y_{3,5}, Y_{3,6}, Y_{4,1}, Y_{4,2}, Y_{4,3}, Y_{4,4}, Y_{4,5}, Y_{4,6}, Y_{5,1}, Y_{5,2}, Y_{5,3}, Y_{5,4}, Y_{5,5}, \\ Y_{5,6}, Y_{6,1}, Y_{6,2}, Y_{6,3}, Y_{6,4}, Y_{6,5}, Y_{6,6}])$$

$$YI = \text{matrix}_{1..6, 1..6} ; \quad y0 = \text{linalg_vector} (6) ; \quad y = \text{linalg_vector} (6) ; \quad ye = \text{linalg_vector} (6)$$

$$YE = \text{linalg_matrix} (6, 6, [YE_{1,1}, YE_{1,2}, YE_{1,3}, YE_{1,4}, YE_{1,5}, YE_{1,6}, YE_{2,1}, YE_{2,2}, YE_{2,3}, \\ YE_{2,4}, YE_{2,5}, YE_{2,6}, YE_{3,1}, YE_{3,2}, YE_{3,3}, YE_{3,4}, YE_{3,5}, YE_{3,6}, YE_{4,1}, YE_{4,2}, YE_{4,3}, YE_{4,4}, \\ YE_{4,5}, YE_{4,6}, YE_{5,1}, YE_{5,2}, YE_{5,3}, YE_{5,4}, YE_{5,5}, YE_{5,6}, YE_{6,1}, YE_{6,2}, YE_{6,3}, YE_{6,4}, YE_{6,5}, \\ YE_{6,6}])$$

$$Y_{1,1} = 1$$

$$Y_{1,1} = 1$$

$$Y_{1,2} = -\rho_{c0} \int_0^{\varphi} \cos \psi d\psi$$

$$Y_{1,2} = -\rho_{c0} \sin \varphi$$

$$Y_{1,3} = \rho_{c0} \int_0^{\varphi} \sin \psi d\psi$$

$$Y_{1,3} = \rho_{c0} (-\cos \varphi + 1)$$

$$Y_{1,4} = \rho^2 c_0$$

$$\left(\left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) \int_0^{\varphi} \sin \psi \int_0^{\psi} \sin \xi \cos \xi d\xi d\psi - \int_0^{\varphi} \cos \psi \left(\frac{\int_0^{\psi} \cos(\xi)^2 d\xi}{EI_{n0}} + \frac{\int_0^{\psi} \sin(\xi)^2 d\xi}{GI_p} \right) d\psi \right)$$

$$Y_{1,4} = \rho^2 c_0 \left(\left(\frac{32}{G\pi d^4} - \frac{64}{E\pi d^4} \right) \left(\frac{1}{6} \cos(\varphi)^3 - \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{1}{3} \right) \right)$$

$$\frac{16 - 2\cos(\varphi)^3 G + 6G\cos\varphi + 6G\varphi\sin\varphi + \cos(\varphi)^3 E + 3E\cos\varphi + 3E\varphi\sin\varphi}{3} + \frac{64(G + E)}{3E\pi d^4 G}$$

$$Y_{1,5} = \rho^2 c_0$$

$$\left(\int_0^\varphi \sin\psi \int_0^\psi \frac{\cos(\xi)^2}{GI_p} + \frac{\sin(\xi)^2}{EI_{n0}} d\xi d\psi + \int_0^\varphi \cos(\varphi) \int_0^\psi \cos(\xi) \sin(\xi) \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) d\xi d\psi \right)$$

$$Y_{1,5} = \rho^2 c_0$$

$$\left(\frac{16 - E\sin(\varphi)^3 - 3E\sin(\varphi) + 3E\varphi\cos(\varphi) + 2G\sin(\varphi)^3 - 6G\sin(\varphi) + 6G\varphi\cos(\varphi)}{3} \right. \\ \left. + \frac{16 \sin(\varphi)(-2G\cos(\varphi)^2 + 2G + E\cos(\varphi)^2 - E)}{3G\pi d^4 E} \right)$$

$$Y_{1,6} = \frac{\rho_{c0} k_b \int_0^\varphi 1 d\psi}{GA_0} - \rho^3 c_0$$

$$\int_0^\varphi \cos(\psi) \int_0^\psi \left(\frac{\cos(\xi)^2}{EI_{n0}} + \frac{\sin(\xi)^2}{GI_p} \right) \int_0^\xi \cos(\ell) d\ell + \cos(\xi) \sin(\xi) \left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GI_p} \right) \int_0^\xi \sin(\ell) d\ell d\xi \\ + \sin(\varphi) \int_0^\psi \left(\frac{\sin(\xi)^2}{EI_{n0}} + \frac{\cos(\xi)^2}{GI_p} \right) \int_0^\xi \sin(\ell) d\ell + \cos(\xi) \sin(\xi) \left(\frac{1}{EI_n} - \frac{1}{GI_p} \right) \int_0^\xi \cos(\ell) d\ell d\xi d\psi$$

$$Y_{1,6} = \frac{40}{9} \frac{\rho_{c0}\varphi}{G\pi d^2} + \frac{8}{3} \rho^3 c_0 \left[-E\sin(\varphi)\cos(\varphi)^3 + E\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 12E\varphi - 2E\sin(\varphi)^3 \right. \\ \left. - 16E\sin(\varphi) + 6E\varphi\cos(\varphi) + 4G\sin(\varphi)^3 - 16G\sin(\varphi) + 12G\varphi\cos(\varphi) - E\sin(\varphi)^3 \cos(\varphi) \right. \\ \left. + 4G\sin(\varphi)\cos(\varphi)^2 - 2E\sin(\varphi)\cos(\varphi)^2 \right] / (G\pi d^4 E)$$

$$Y_{2,1} = 0; \quad Y_{2,2} = \cos(\varphi); \quad Y_{2,3} = -\sin(\varphi)$$

$$Y_{2,1} = 0 \quad Y_{2,2} = \cos(\varphi) \quad Y_{2,3} = -\sin(\varphi)$$

$$Y_{2,4} = \rho_{c0} \left(\cos\varphi \int_0^\varphi \frac{\cos(\psi)^2}{EI_{n0}} + \frac{\sin(\psi)^2}{GI_p} d\psi + \sin(\varphi) \int_0^\varphi \cos(\psi) \sin(\psi) \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) d\psi \right)$$

$$Y_{2,4} = \rho c_0 \left(16 \frac{\cos(\varphi)(2G\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 2G\varphi - E\sin(\varphi)\cos(\varphi) + E\varphi)}{G\pi d^4 E} \right. \\ \left. + \sin(\varphi) \left(16 \frac{\cos(\varphi)^2(-2G + E)}{G\pi d^4 E} - 16 \frac{-2G + E}{G\pi d^4 E} \right) \right) \\ Y_{2,5} = \rho c_0 \left(-\sin(\varphi) \int_0^{\varphi} \frac{\cos(\psi)^2}{GI_p} + \frac{\sin(\psi)^2}{EI_{n0}} d\psi - \cos(\varphi) \int_0^{\varphi} \cos(\psi)\sin(\psi) \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) d\psi \right)$$

$$Y_{2,5} = \rho c_0 \left(-16 \frac{\sin(\varphi)(E\sin(\varphi)\cos(\varphi) + E\varphi - 2G\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 2G\varphi)}{G\pi d^4 E} \right. \\ \left. - \cos(\varphi) \left(16 \frac{\cos(\varphi)^2(-2G + E)}{G\pi d^4 E} - 16 \frac{-2G + E}{G\pi d^4 E} \right) \right)$$

$$Y_{2,6} = \rho^2 c_0 \cos(\varphi)$$

$$\int_0^{\varphi} \left(\frac{\cos(\psi)^2}{EI_{n0}} + \frac{\sin(\psi)^2}{GI_p} \right) \int_0^{\psi} \cos(\xi) d\xi + \cos(\varphi) \sin(\varphi) \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) \int_0^{\varphi} \sin(\xi) d\xi d\psi$$

$$Y_{2,6} = \rho^2 c_0 \cos(\varphi)$$

$$\left(-\frac{16 \cos(\varphi)(2E\sin(\varphi)^2 + 4E + 2E\cos(\varphi)^2 + 6G\cos(\varphi) - 3E\cos(\varphi))}{3 G\pi d^4 E} + 16 \frac{E + 2G}{G\pi d^4 E} \right)$$

$$Y_{3,1} = 0; \quad Y_{3,2} = \sin(\varphi); \quad Y_{3,3} = \cos(\varphi)$$

$$Y_{3,1} = 0; \quad Y_{3,2} = \sin(\varphi); \quad Y_{3,3} = \cos(\varphi)$$

$$Y_{3,4} = \rho c_0 \left(\sin(\varphi) \int_0^{\varphi} \left(\frac{\cos(\psi)^2}{EI_{n0}} + \frac{\sin(\psi)^2}{GI_p} \right) d\psi + \cos(\varphi) \int_0^{\varphi} \cos(\psi)\sin(\psi) \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) d\psi \right)$$

$$Y_{3,4} = \rho c_0 \left(16 \frac{\sin(\varphi)(2G\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 2G\varphi - E\sin(\varphi)\cos(\varphi) + E\varphi)}{G\pi d^4 E} \right.$$

$$\left. + \cos(\varphi) \left(-16 \frac{\cos(\varphi)^2(-2G + E)}{G\pi d^4 E} + 16 \frac{-2G + E}{G\pi d^4 E} \right) \right)$$

$$Y_{3,5} = \rho c_0 \left(\cos(\varphi) \int_0^{\varphi} \frac{\cos(\psi)^2}{GI_p} + \frac{\sin(\psi)^2}{EI_{n0}} d\psi + \sin(\varphi) \int_0^{\varphi} \cos(\psi) \sin(\psi) \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI_{n0}} \right) d\psi \right)$$

$$Y_{3,5} = \rho c_0 \left(16 \frac{\cos(\varphi)(E \sin(\varphi) \cos(\varphi) + E\varphi - 2G \sin(\varphi) \cos(\varphi) + 2G\varphi)}{G\pi d^4 E} \right.$$

$$\left. + \sin(\varphi) \left(-16 \frac{\cos(\varphi)^2 (-2G + E)}{G\pi d^4 E} + 16 \frac{-2G + E}{G\pi d^4 E} \right) \right)$$

$$Y_{3,6} = \rho^2 c_0$$

$$\left(\sin(\varphi) \int_0^{\varphi} \left(\frac{\cos(\psi)^2}{EI_{n0}} + \frac{\sin(\psi)^2}{GI_p} \right) \int_0^{\psi} \cos(\xi) d\xi + \cos(\psi) \sin(\psi) \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) \int_0^{\psi} \sin(\xi) d\xi d\psi \right.$$

$$\left. - \cos(\varphi) \int_0^{\varphi} \left(\frac{\cos(\psi)^2}{GI_p} + \frac{\sin(\psi)^2}{EI_{n0}} \right) \int_0^{\psi} \sin(\xi) d\xi + \cos(\psi) \sin(\psi) \left(\frac{1}{EI_{n0}} - \frac{1}{GI_p} \right) \int_0^{\psi} \cos(\xi) d\xi d\psi \right)$$

$$Y_{3,6} = \rho^2 c_0$$

$$\left(\sin(\varphi) \left(-\frac{16}{3} \frac{\cos(\varphi)(2E \sin(\varphi)^2 + 4E + 2E \cos(\varphi)^2 + 6G \cos(\varphi) - 3E \cos(\varphi))}{G\pi d^4 E} + 16 \frac{E + 2G}{G\pi d^4 E} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{16}{3} \cos(\varphi) [3E \sin(\varphi) \cos(\varphi) + 3E\varphi - 2E \sin(\varphi) \cos(\varphi)^2 - 4E \sin(\varphi) - 6G \sin(\varphi) \cos(\varphi) + 6G\varphi - 2E \sin(\varphi)^3] / (G\pi d^4 E) \right)$$

$$Y_{4,1} = 0; \quad Y_{4,2} = 0; \quad Y_{4,3} = 0; \quad Y_{4,4} = \cos(\varphi) \quad Y_{4,5} = -\sin(\varphi);$$

$$Y_{4,6} = \rho c_0 \left(\cos(\varphi) \int_0^{\varphi} \cos(\psi) d\psi + \sin(\varphi) \int_0^{\varphi} \sin(\psi) d\psi \right)$$

$$Y_{4,1} = 0; \quad Y_{4,2} = 0; \quad Y_{4,3} = 0; \quad Y_{4,4} = \cos(\varphi) \quad Y_{4,5} = -\sin(\varphi);$$

$$Y_{4,6} = \rho c_0 [\sin(\varphi) \cos(\varphi) + \sin(\varphi) (-\cos(\varphi) + 1)]$$

$$Y_{5,1} = 0; \quad Y_{5,2} = 0; \quad Y_{5,3} = 0; \quad Y_{5,4} = \sin(\varphi) \quad Y_{5,5} = \cos(\varphi)$$

$$Y_{5,1} = 0; \quad Y_{5,2} = 0; \quad Y_{5,3} = 0; \quad Y_{5,4} = \sin(\varphi) \quad Y_{5,5} = \cos(\varphi)$$

$$Y_{5,6} = \rho_{c0} \left(\sin(\varphi) \int_0^{\varphi} \cos(\psi) d\psi - \cos(\varphi) \int_0^{\varphi} \sin(\psi) d\psi \right)$$

$$Y_{5,6} = \rho_{c0} [\sin(\varphi)^2 - \cos(\varphi)(-\cos(\varphi) + 1)]$$

$$Y_{6,1} = 0; \quad Y_{6,2} = 0; \quad Y_{6,3} = 0; \quad Y_{6,4} = 0 \quad Y_{6,5} = 0 \quad Y_{6,6} = 1$$

$$Y_{6,1} = 0; \quad Y_{6,2} = 0; \quad Y_{6,3} = 0; \quad Y_{6,4} = 0 \quad Y_{6,5} = 0 \quad Y_{6,6} = 1$$

$$YE_{1,1} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -.7853981635, Y_{1,1}));$$

$$YE_{1,2} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -.7853981635, Y_{1,2}));$$

$$YE_{1,3} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -.7853981635, Y_{1,3}));$$

$$YE_{1,4} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -.7853981635, Y_{1,4}));$$

$$YE_{1,5} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -.7853981635, Y_{1,5}));$$

$$YE_{1,6} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -.7853981635, Y_{1,6}));$$

$$YE_{2,1} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -.7853981635, Y_{2,1}));$$

$$YE_{2,2} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -.7853981635, Y_{2,2}));$$

$$YE_{2,3} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -.7853981635, Y_{2,3}));$$

$$YE_{2,4} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -.7853981635, Y_{2,4}));$$

$$YE_{2,5} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -.7853981635, Y_{2,5}));$$

$$YE_{2,6} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -.7853981635, Y_{2,6}));$$

$$YE_{3,1} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -.7853981635, Y_{3,1}));$$

$$YE_{3,2} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -.7853981635, Y_{3,2}));$$

$$YE_{3,3} = \text{eval}(\text{subs}(\varphi = -.7853981635, Y_{3,3}));$$

$$YE_{3,4} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = -.7853981635 , Y_{3,4})) ;$$

$$YE_{3,5} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = -.7853981635 , Y_{3,5})) ;$$

$$YE_{3,6} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = -.7853981635 , Y_{3,6})) ;$$

$$YE_{4,1} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{1,1})) ;$$

$$YE_{4,2} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{1,2})) ;$$

$$YE_{4,3} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{1,3})) ;$$

$$YE_{4,4} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{1,4})) ;$$

$$YE_{4,5} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{1,5})) ;$$

$$YE_{4,6} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{1,6})) ;$$

$$YE_{5,1} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{2,1})) ;$$

$$YE_{5,2} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{2,2})) ;$$

$$YE_{5,3} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{2,3})) ;$$

$$YE_{5,4} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{2,4})) ;$$

$$YE_{5,5} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{2,5})) ;$$

$$YE_{5,6} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{2,6})) ;$$

$$YE_{6,1} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{3,1})) ;$$

$$YE_{6,2} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{3,2})) ;$$

$$YE_{6,3} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{3,3})) ;$$

$$YE_{6,4} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{3,4})) ;$$

$$YE_{6,5} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{3,5})) ;$$

$$YE_{6,6} = \text{eval} (\text{subs} (\varphi = .7853981635 , Y_{3,6})) ;$$

$$YE_{1,1} = 1$$

$$YE_{1,2} = .7071067813 \rho_{c0}$$

$$YE_{1,3} = .2928932189 \rho_{c0}$$

$$YE_{1,4} = -\frac{1}{2} \frac{\rho^2_{c0} (-.030426071EI_{n0} + .5553603674GI_p)}{EI_{n0}GI_p}$$

$$YE_{1,5} = -\frac{1}{2} \frac{\rho^2_{c0} (-.1517464140EI_{n0} + .1517464140GI_p)}{EI_{n0}GI_p}$$

$$YE_{1,6} = \frac{1}{2} \frac{\rho_{c0} (-1.570796327EI_{n0}I_p - .004836350\rho^2_{c0}A_0EI_{n0} + .151746414\rho^2_{c0}A_0GI_p)}{GA_0EI_{n0}I_p}$$

$$YE_{2,1} = 0$$

$$YE_{2,2} = .7071067811$$

$$YE_{2,3} = .7071067813$$

$$YE_{2,4} = \frac{1}{2} \frac{\rho_{c0} (-1.262467149GI_p + .1517464140EI_{n0})}{EI_{n0}GI_p}$$

$$YE_{2,5} = -.2776801838 \frac{\rho_{c0}(EI_{n0} + GI_p)}{EI_{n0}GI_p}$$

$$YE_{2,6} = -.3535533906 \frac{\rho^2_{c0} (-.0857864379EI_{n0} - .5000000001GI_p)}{EI_{n0}GI_p}$$

$$YE_{3,1} = 0$$

$$YE_{3,2} = -.7071067813$$

$$YE_{3,3} = .7071067811$$

$$YE_{3,4} = .2776801838 \frac{\rho_{c0}(EI_{n0} + GI_p)}{EI_{n0}GI_p}$$

$$YE_{3,5} = \frac{1}{2} \frac{\rho_{c0} (-1.262467149EI_{n0} + .1517464140GI_p)}{EI_{n0}GI_p}$$

$$YE_{3,6} = -\frac{1}{2} \frac{\rho^2 c_0 (.1517464140EI_{n0} + .1517464140GI_p)}{EI_{n0}GI_p}$$

$$YE_{4,1} = 1$$

$$YE_{4,2} = -.7071067813 \rho_{c0}$$

$$YE_{4,3} = .2928932189 \rho_{c0}$$

$$YE_{4,4} = -\frac{1}{2} \frac{\rho^2 c_0 (-.030426071EI_{n0} + .5553603674GI_p)}{EI_{n0}GI_p}$$

$$YE_{4,5} = -\frac{1}{2} \frac{\rho^2 c_0 (-.1517464140EI_{n0} - .1517464140GI_p)}{EI_{n0}GI_p}$$

$$YE_{4,6} = \frac{1}{2} \frac{\rho_{c0} (1.570796327EI_{n0}I_p + .004836350\rho^2 c_0 A_0 EI_{n0} - .1517464140\rho^2 c_0 A_0 GI_p)}{GA_0 EI_{n0}I_p}$$

$$YE_{5,1} = 0$$

$$YE_{5,2} = .7071067811$$

$$YE_{5,3} = -.7071067813$$

$$YE_{5,4} = \frac{1}{2} \frac{\rho_{c0} (1.262467149GI_p - .1517464140EI_{n0})}{EI_{n0}GI_p}$$

$$YE_{5,5} = -.2776801838 \frac{\rho_{c0} (EI_{n0} + GI_p)}{EI_{n0}GI_p}$$

$$YE_{5,6} = -.3535533906 \frac{\rho^2 c_0 (-.0857864379EI_{n0} - .5000000001GI_p)}{EI_{n0}GI_p}$$

$$YE_{6,1} = 0$$

$$YE_{6,2} = .7071067813$$

$$YE_{6,3} = .7071067811$$

$$YE_{6,4} = .2776801838 \frac{\rho_{c0}(EI_{n0} + GI_p)}{EI_{n0}GI_p}$$

$$YE_{6,5} = \frac{1}{2} \frac{\rho_{c0}(1.262467149EI_{n0} - .1517464140GI_p)}{EI_{n0}GI_p}$$

$$YE_{6,6} = -\frac{1}{2} \frac{\rho_{c0}(-.1517464140EI_{n0} - .1517464140GI_p)}{EI_{n0}GI_p}$$

$$b = \text{linalg_vector}(6, [0, 0, 0, -F YE_{4,6}, -F YE_{5,6}, -F YE_{6,6}])$$

$$b = \left[0, 0, 0, -\frac{1}{2} \frac{F\rho_{c0}(1.57079632EI_{n0}I_p + .00483635\rho_{c0}^2A_0EI_{n0} - .151746414\rho_{c0}^2A_0GI_p)}{GA_0EI_{n0}I_p}, \right.$$

$$.3535533906 \frac{F\rho_{c0}(-.0857864379EI_{n0} - .5000000001GI_p)}{EI_{n0}GI_p},$$

$$\left. \frac{1}{2} \frac{F\rho_{c0}(-.1517464140EI_{n0} - .1517464140GI_p)}{EI_{n0}GI_p} \right]$$

$$YI = \text{linalg_inverse}(\text{matrix}(Y))$$

$$YI = \frac{F\rho_{c0}(-.0857864379 EI_{n0} - .5000000001 GI_p)}{EI_{n0}GI_p}$$

$$\frac{1}{2} \frac{(-2EI_{n0}\text{Cos}(\varphi)^2 + 2EI_{n0}\text{Cos}(\varphi) - 2EI_{n0}\text{Sin}(\varphi)^2 + EI_{n0}\varphi\text{Sin}(\varphi) + GI_p\varphi\text{Sin}(\varphi))\rho_{c0}^2}{\%1EI_{n0}GI_p},$$

$$\frac{1}{2} \frac{(-EI_{n0}\text{Sin}(\varphi) + EI_{n0}\varphi\text{Cos}(\varphi) - GI_p\text{Sin}(\varphi) + GI_p\varphi\text{Cos}(\varphi))\rho_{c0}^2}{\%1EI_{n0}GI_p},$$

$$-\frac{1}{2}(\rho_{c0}^2A_0\text{Sin}(\varphi)EI_{n0}\text{Cos}(\varphi)^3 - \rho_{c0}^2A_0\text{Sin}(\varphi)GI_p\text{Cos}(\varphi)^3 + 2\rho_{c0}^2A_0EI_{n0}\varphi\text{Cos}(\varphi)^2$$

$$+ 2\text{Cos}(\varphi)^2\varphi EI_{n0}I_p - 2\rho_{c0}^2A_0\text{Cos}(\varphi)^2EI_{n0}\text{Sin}(\varphi) - \rho_{c0}^2A_0\text{Cos}(\varphi)EI_{n0}\text{Sin}(\varphi)$$

$$+ \rho_{c0}^2A_0EI_{n0}\varphi\text{Cos}(\varphi) + \rho_{c0}^2A_0\text{Cos}(\varphi)GI_p\text{Sin}(\varphi) + \rho_{c0}^2A_0GI_p\varphi\text{Cos}(\varphi)$$

$$+ 2\text{Sin}(\varphi)^2EI_{n0}\varphi I_p - \rho_{c0}^2A_0\text{Sin}(\varphi)^2GI_p\varphi - \rho_{c0}^2A_0GI_p\text{Sin}(\varphi) + \rho_{c0}^2A_0\text{Sin}(\varphi)^2EI_{n0}\varphi$$

$$-\rho^2_{c0} A_0 EI_{n0} \sin(\varphi) \rho_{c0} / (\%1 GA_0 I_{n0} I_p)]$$

$$\left[0, \frac{\cos(\varphi)}{\%1}, \frac{\sin(\varphi)}{\%1}, -\frac{1}{2} \frac{(GI_p \varphi \cos(\varphi) + EI_{n0} \varphi \cos(\varphi) - EI_{n0} \sin(\varphi) + GI_p \sin(\varphi)) \rho_{c0}}{\%1 EI_{n0} GI_p}, \right.$$

$$-\frac{1}{2} \frac{(EI_{n0} + GI_p) \varphi \sin(\varphi) \rho_{c0}}{\%1 EI_{n0} GI_p}, \frac{1}{2} (-EI_{n0} \cos(\varphi)^4 + GI_p \cos(\varphi)^4 + 2EI_{n0} \cos(\varphi)^3$$

$$-EI_{n0} \cos(\varphi)^2 - GI_p \cos(\varphi)^2 + \cos(\varphi) EI_{n0} \varphi \sin(\varphi) + \cos(\varphi) GI_p \varphi \sin(\varphi)$$

$$-2EI_{n0} \sin(\varphi)^2 + EI_{n0} \varphi \sin(\varphi) + GI_p \varphi \sin(\varphi)) \rho^2_{c0} / (\%1 EI_{n0} GI_p)]$$

$$\left[0, -\frac{\sin(\varphi)}{\%1}, \frac{\cos(\varphi)}{\%1}, \frac{1}{2} \frac{(EI_{n0} + GI_p) \varphi \sin(\varphi) \rho_{c0}}{\%1 EI_{n0} GI_p}, \right.$$

$$-\frac{1}{2} \frac{(EI_{n0} \varphi \cos(\varphi) + GI_p \varphi \cos(\varphi) + EI_{n0} \sin(\varphi) - GI_p \sin(\varphi)) \rho_{c0}}{\%1 EI_{n0} GI_p},$$

$$\frac{1}{2} (EI_{n0} \sin(\varphi) \cos(\varphi)^3 - \sin(\varphi) GI_p \cos(\varphi)^3 - 2EI_{n0} \sin(\varphi) \cos(\varphi)^2 + GI_p \varphi \cos(\varphi)$$

$$+ EI_{n0} \varphi \cos(\varphi) + \sin(\varphi) GI_p \cos(\varphi) - EI_{n0} \sin(\varphi) \cos(\varphi) - GI_p \sin(\varphi) - \sin(\varphi)^2 \varphi EI_{n0}$$

$$- \sin(\varphi)^2 \varphi GI_p + EI_{n0} \sin(\varphi)) \rho^2_{c0} / (\%1 EI_{n0} GI_p)]$$

$$\left[0, 0, 0, \frac{\cos(\varphi)}{\%1}, \frac{\sin(\varphi)}{\%1}, -\frac{\sin(\varphi) \rho_{c0}}{\%1} \right]$$

$$\left[0, 0, 0, -\frac{\sin(\varphi)}{\%1}, \frac{\cos(\varphi)}{\%1}, \frac{(\cos(\varphi)^2 - \cos(\varphi) + \sin(\varphi)^2) \rho_{c0}}{\%1} \right]$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 1]$$

$$\%1 = \cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2$$

$$y_0 = \text{linalg_insolve}(YE, b)$$

$$y_0 = [-.100000000.10^{-19} F \rho_{c0} (1677746759.10^{38} \rho^2_{c0} A_0 E^2 I_{n0}^2$$

$$\begin{aligned}
& +.6682384094.10^{38} \rho^2_{c0} A_0 EI_{n0} GI_p + .5968347855.10^{37} \rho^2_{c0} A_0 G^2 I_p^2 \\
& +.2523873393.10^{40} EI_{n0} GI_p^2 + .5603779840.10^{39} E^2 I_{n0} I_p) / (GA_0 EI_{n0} I_p \\
& +.6426990820.10^{20} GI_p + .1426990818.10^{20} EI_{n0})), 0, .1800000000.10^{-8} \\
& \frac{F \rho^2_{c0} (.3938557609.10^{27} E^2 I_{n0}^2 + .4270132495.10^{27} EI_{n0} GI_p + .3315748858.10^{26} G^2 I_p^2)}{EI_{n0} GI_p (.6426990820.10^{20} GI_p + .1426990818.10^{20} EI_{n0})}, \\
& -.3000000000.10^{-9} \frac{F \rho_{c0} (.1251617811.10^{29} EI_{n0} + .2977507653.10^{29} GI_p)}{.6426990820.10^{20} GI_p + .1426990818.10^{20} EI_{n0}}, 0, \\
& -.5000000000 F] \\
v_0 & = \text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, y_{01}))) \\
v_0 & = - 3.765980700 \\
\Omega_{n0} & = \text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, y_{02}))) \\
\Omega_{n0} & = 0 \\
\Omega_{t0} & = \text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, y_{03}))) \\
\Omega_{t0} & = .1349759307 \\
M_{n0} & = \text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, y_{04}))) \\
M_{n0} & = - 295.7027332 \\
M_{t0} & = \text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, y_{05}))) \\
M_{t0} & = 0 \\
R_{b0} & = \text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, y_{06}))) \\
R_{b0} & = - 5.500000000
\end{aligned}$$

$$y = \text{linalg_multibly} (Y , y_0)$$

$$\begin{aligned}
y = & \left[-.1000000000.10^{-19} F \rho_{c0} (.1677746759.10^{38} \rho^2_{c0} A_0 E^2 I_{n0}^2 \right. \\
& + .6682384094.10^{38} \rho^2_{c0} A_0 E I_{n0} G I_p + .5968347855.10^{37} \rho^2_{c0} A_0 G^2 I_p^2 \\
& + .2523873393.10^{40} E I_{n0} G I_p^2 + .560379840.10^{39} E^2 I_{n0}^2 I_p) / (G A_0 E I_{n0} I_p \%1) \\
& + .1800000000.10^{-8} \frac{\rho^3_{c0} (-\text{Cos}(\varphi) + 1) F \%3}{E I_{n0} G I_p \%1} \\
& + .1500000000.10^{-9} \frac{\rho^3_{c0} (2 E I_{n0} \text{Cos}(\varphi) - 2 E I_{n0} + G I_p \varphi \text{Sin}(\varphi) + E I_{n0} \varphi \text{Sin}(\varphi)) F \%2}{E I_{n0} G I_p \%1} \\
& - .2500000000 \rho_{c0} (2 \varphi E I_{n0} I_p + 2 \rho^2_{c0} A_0 E I_{n0} \varphi - 3 \rho^2_{c0} A_0 E I_{n0} \text{Sin}(\varphi) \\
& + \rho^2_{c0} A_0 E I_{n0} \varphi \text{Cos}(\varphi) - \rho^2_{c0} A_0 G I_p \text{Sin}(\varphi) + \rho^2_{c0} A_0 G I_p \varphi \text{Cos}(\varphi)) F / (G A_0 E I_{n0} I_p), \\
& - .1800000000.10^{-8} \frac{\rho^2_{c0} \text{Sin}(\varphi) F \%3}{E I_{n0} G I_p \%1} \\
& - .1500000000.10^{-9} \frac{\rho^2_{c0} (G I_p \varphi \text{Cos}(\varphi) + E I_{n0} \varphi \text{Cos}(\varphi) - E I_{n0} \text{Sin}(\varphi) + G I_p \text{Sin}(\varphi)) F \%2}{E I_{n0} G I_p \%1} \\
& - .2500000000 \frac{\rho^2_{c0} \text{Cos}(\varphi) (2 E I_{n0} \text{Cos}(\varphi) - E I_{n0} \text{Cos}^2(\varphi) + G I_p \text{Cos}^2(\varphi) - E I_{n0} - G I_p) F}{E I_{n0} G I_p}, \\
& .1800000000.10^{-8} \frac{\rho^2_{c0} \text{Cos}(\varphi) F \%3}{E I_{n0} G I_p \%1} - .1500000000.10^{-9} \frac{\rho^2_{c0} \text{Sin}(\varphi) \varphi (E I_{n0} + G I_p) F \%2}{E I_{n0} G I_p \%1} \\
& + .2500000000 \frac{\rho^2_{c0} (-E I_{n0} \text{Sin}(\varphi) + E I_{n0} \varphi \text{Cos}(\varphi) - G I_p \text{Sin}(\varphi) + G I_p \varphi \text{Cos}(\varphi)) F}{E I_{n0} G I_p}, \\
& - .3000000000.10^{-9} \frac{\rho_{c0} \text{Cos}(\varphi) F \%2}{\%1} - .5000000000 \rho_{c0} \text{Sin}(\varphi) F, \\
& - .3000000000.10^{-9} \frac{\rho_{c0} \text{Sin}(\varphi) F \%2}{\%1} - .5000000000 (\rho_{c0} - \rho_{c0} \text{Cos}(\varphi)) F, -.5000000000 F]
\end{aligned}$$

$$\%1 = .6426990820.10^{20} GI_p + .1426990818.10^{20} EI_{n0}$$

$$\%2 = 1.1251617811.10^{29} EI_{n0} + .2977507653.10^{29} GI_p$$

$$\%3 = .3938557609.10^{27} E^2 I_{n0}^2 + .4270132495.10^{27} EI_{n0} GI_p + .3315748858.10^{26} G^2 I_p^2$$

$$ye_1 = \text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, y_1)));$$

$$\text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, \varphi = 0, y_1)))$$

$$ye_1 = -69.14330979 + 65.41046307 \cos(\varphi) + 41.14288869 \varphi \sin(\varphi) - 160.6822384 \varphi$$

$$+ 243.3243213 \sin(\varphi) - 82.64677041 \varphi \cos(\varphi)$$

$$- 3.765980700$$

$$ye_2 = \text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, y_2)));$$

$$\text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, \varphi = 0, y_2)))$$

$$ye_2 = .2246997630 \sin(\varphi) - .3809526732 \varphi \cos(\varphi) + 1.487755101 \cos^2(\varphi)$$

$$- .7225072278 \cos^3(\varphi) - .7652478737 \cos(\varphi)$$

$$0$$

$$ye_3 = \text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, y_3)));$$

$$\text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, \varphi = 0, y_3)))$$

$$ye_3 = .1349759307 \cos(\varphi) - .3809526732 \varphi \sin(\varphi) - .7652478738 \sin(\varphi)$$

$$+ .7652478738 \varphi \cos(\varphi)$$

$$.1349759307$$

$$ye_4 = \text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, y_4)));$$

$$\text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, \varphi = 0, y_4)))$$

$$ye_4 = -295.7027332 \cos(\varphi) - 594. \sin(\varphi)$$

$$- 295.7027332$$

$$\begin{aligned}
y_{e5} &= \text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, y_5))); \\
&\text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, \varphi=0, y_5))) \\
y_{e5} &= -295.7027332 \sin(\varphi) - 594. + 594. \cos(\varphi)
\end{aligned}$$

$$0$$

$$\begin{aligned}
y_{e6} &= \text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, y_6))); \\
&\text{simp}(\text{eval}(\text{subs}(\rho_{c0}=108, E=4240, G=1760; F=11, I_{n0}=354, I_p=24.5, A_0=72, \varphi=0, y_6))) \\
y_{e6} &= -5.500000000 \\
&- 5.500000000
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Aşağıdaki tabloda, şekil 4.8'deki örneğe ait, bu çalışmada elde edilen sonuçlar ile Pantazopoulou'nun çalışmasında elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Tablo 4.1. İki ucundan ankastre mesnetli ve orta noktasından etkiyen F tekil yükünü taşıyan dikdörtgen sabit kesitli çember eksenli kirişin orta noktasındaki kesite ait değerler.

Başlangıç değerleri	Pantazopoulou'nun sonuçları	Bu çalışmada elde edilen sonuçlar
v_0 (in.)	- 0.38743	- 3.765980700
Ω_{n0} (rad)	0.017574	0
Ω_{t0} (rad)	0.017504	0.1349759307
M_{n0} (kip-in.)	- 194.3	- 295.7027332
M_{t0} (kip-in.)	-	0
R_b (kips)	- 5.5	- 5.500000000

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, eğri eksenli düzlemsel kirişlerin statik problemi incelenmiş, eğri eksenli düzlemsel kirişi karakterize eden büyüklüklerin matematiksel ifadeleri, kayma deformasyonu ve eksen uzaması etkileri ihmal edilmeden elde edilmeye çalışılmıştır. Konu ile ilişkin literatür araştırması yapılmış, mevcut çalışmalar incelenerek, çözüm sistematığı ve yapılan kabuller araştırılmıştır. Fakat incelenen çalışmaların çoğunun yaklaşık yöntemler kullandığı görülmüştür. Ayrıca, bu çalışmaların birçoğunda kayma deformasyonu ve eksen uzaması gibi etkilerin ihmal edildiği belirlenmiştir.

Öte yandan, literatürde mevcut çalışmaların çoğu kayma deformasyonu ve eksen uzaması gibi etkileri ihmal etmese bile, konuyu düzlemde incelemişlerdir.

Bilgisayarların gelişmesiyle, çalışmalarda, sonlu elemanlar gibi çeşitli sayısal yöntemler ağırlık kazanmaya başlamıştır. Özellikle birçok çalışma, yapısal analiz paket programlarını kullanmışlardır. Bu paket programlar, genellikle doğrusal eksenli çubuk eleman kullanmaktadır. Dolayısıyla sonuçlarda, yöntemin yaklaşık olmasından kaynaklanan hatanın yanısıra, kullanılan elemandan kaynaklanan hatanın da bulunacağı açıktır.

Bu çalışmada ise, diferansiyel denklem takımı, kayma deformasyonu ve eksen uzaması etkileri gözönüne alınarak verilmiştir. Diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir. Böylece, birçok çalışmada ancak yaklaşık hesabı yapılabilen eğri eksenli düzlemsel kirişlerin, düzlem dışı statik probleminin kesin hesabı yapılmıştır.

Eğri eksenli kirişlere ait temel diferansiyel denklem takımı, en genel durum için verilmiştir. Bu denklem takımı, düzlemsel kiriş durumu için düzenlenmiş ve başlangıç değerleri yöntemiyle çözüm elde edilmiştir.

Düzlemsel eğri eksenli kirişin statik probleminin çözümünde, eksen eğri tipi bilinen dairesel sabit kesitli bir düzlemsel kirişin, herhangi bir noktasından ve herhangi bir doğrultuda tekil kuvvetle yüklenmesi durumu için çözüm elde edilmiştir. Düzlemsel eğri eksenli kirişin statik problemini karakterize eden büyüklükleri belirlerken ortaya çıkan denklem ve bünyesindeki integrallerin karmaşıklığı, bunların çözümünde bilgisayar kullanımı gereğini ortaya koymuştur. Bu amaçla, diferansiyel denklem takımları bünyesinde yer alan bütün integraller Mathematica Programı yardımıyla çözülmüştür. Elde edilen integral çözümleri analitik olarak birleştirilerek genel çözüme ulaşılmıştır.

Son bölümde; konunun daha iyi irdelenebilmesi amacıyla, ankastre-serbest mesnetli, serbest ucundan etkiyen F tekil yükünü taşıyan, sabit kesitli çember eksenli kiriş ve

iki ucundan ankastre mesnetli, orta noktasından etkiyen F tekil yükünü taşıyan, dikdörtgen sabit kesitli çember eksenli kirişin, Mapple programı yardımıyla yapılan çözümüne yer verilmiştir.

İlk örnekte, problemin çözümünde kullanılan büyüklükler tamamen keyfi seçilmiştir. Sonuçlar ϕ yay açıklığına bağlı olarak elde edilmiş, dolayısıyla herhangi bir büyüklüğün kiriş eksen eğrisi üzerinde herhangi bir noktadaki değerinin belirlenebilmesine olanak sağlanmıştır. Buna bağlı olarak v , Ω_n , Ω_t , M_n , M_t ve R_b 'nin kiriş eksen eğrisi üzerinde, keyfi olarak belirlenen, farklı yay açıklığına sahip yedi noktada değerleri hesaplanarak grafik üzerinde gösterilmiştir.

Grafikler incelendiğinde, çökmenin (v); ankastre mesnette (1 noktası) sıfır olmak üzere, kiriş serbest ucuna doğru arttığı görülmektedir. R_b ; tüm noktalarda 500 N olacak şekilde sabit kalmıştır. M_t ; ankastre uçta max. ve serbest uçta sıfır olacak şekilde hemen hemen lineer bir değişim göstermiştir. M_n ; ankastre ve serbest uçta sıfır değerini almış, max. değeri çubuk orta noktasında elde edilmiştir. Ω_n 'in ankastre uçta başlangıç değeri sıfırdır. Kiriş orta noktasında pozitif değerde olmasına rağmen diğer noktalarda negatif değer elde edilmiştir. Ω_t ise, 6 ve 7 noktalarında negatif, diğer noktalarda pozitif değerdedir.

İkinci örnek ise, Pantazopoulou'nun [8] makalesinden alınmıştır. Burada, kiriş kesiti dikdörtgen olup, kiriş; orta noktasındaki süreksizlikten dolayı iki bölgedir. Örnekle ilgili büyüklükler makaledeki gibi seçilmiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlarla, makaledeki sonuçları karşılaştırıp değerlendirebilmek amacıyla hesaplarda kiriş kesiti makalede olduğu gibi, yani dikdörtgen olarak alınmıştır. Örnekle ilgili karşılaştırmalı sonuçlar Tablo-4.1.'de verilmektedir. Sonuçlar irdelendiğinde, v , Ω_n , Ω_t ve M_n değerlerinde farklılıklar görülmektedir. Herşeyden önce, kiriş orta noktasında, yani kuvvetin etkidiği kesitte normal eksen etrafında bir dönme olması mümkün değildir. Bu nedenle $\Omega_n = 0$ olmalıdır. Ayrıca, bu çalışmada elde edilen v değeri ve Ω_t değeri, makalede elde edilen değerlerin yaklaşık 10 katı kadardır.

Burada önemli olan, kiriş kesitinin dikdörtgen olmasıdır. Bu çalışmada bütün hesaplar dairesel kesite göre yapılmıştır. Fakat, literatürdeki bir örneği çözmek ve sonuçları karşılaştırmak amacıyla, bu örnek çözülmüştür. Bahsedilen makalede, dikdörtgen kesit kullanıldığından ve kesit çarpılması dikkate alınmadığından sonuçlarda farklılıklar ortaya çıkmıştır. Bilindiği gibi, böyle bir etki altında kesit distorsiyona uğrar. Şekil değişiminden önce kiriş eksenine dik olan kesit, şekil değişiminden sonra, kiriş eksenine artık dik kalmayacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] LOVE, A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publication, Newyork, 1994
- [2] NAGANARAYANA, B. P., PRATHAP, G. Consistency Aspects of out-of-plane Bending, Torsion and Shear in a Quadratic Curved Beam Element, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 30, pp. 431-443, (1990)
- [3] TÜFEKÇİ, E. Eğri Eksenli Düzlemsel Çubukların Statik ve Dinamik Problemlerinin Analitik Çözümü, Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Kasım (1994)
- [4] İNAN, M. Elastik Çubukların Genel Teorisi, İ.T.Ü. Yayını, İstanbul, 1996
- [5] SUNDARAMOORTHY, R., PADMANABHAN, S. Equations of Curved Beams, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol 115, p 1094, May (1989)
- [6] ARTAN, R. The Analytical Calculation of Circular Rods of Variable Cross-Section by the Initial Values Method, Computers and Structures, Vol 62, No. 3, pp. 445-461, (1997)
- [7] WOLFRAM, S. Mathematica, Addison-Wesley Publishing Company, California, (1988)
- [8] PANTAZOPOULOU, S.J. Low-Order Interpolation Functions for Curved Beams, Journal of Engineering Mechanics, Vol 118, No. 2, pp 329-350, (1992)
- [9] PRATHAP, G. The Curved Beam-Deep Arch-Finite Ring Element Revisited, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 21, pp. 389-407, (1985)
- [10] TAMEROĞLU, S. Elastisite Teorisi, İ.T.Ü. Yayını, İstanbul, 1991

ÖZGEÇMİŞ

O. Yaşar DOĞRUER, 1970 yılında Aksaray’da doğdu. İlk, Orta ve Lise öğrenimini Ankara’da tamamladı. 1987 yılında Ankara Lisesi’nden, 1991 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Makina Mühendisliği Bölümü’nden mezun oldu. 1993 yılında Askerlik hizmetini tamamladı.

1994 yılında İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Anabilim Dalı, İmalat Programı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başlayan O. Yaşar DOĞRUER halen özel bir kuruluşta Makina Mühendisi olarak çalışmaktadır.



İ.T.Ü. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ