



EKSENEL DOĞRULTUDA FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TİMOSENKO KİRİŞİNİN SICAKLIK ETKİSİ ALTINDAKİ BURKULMA SONRASI DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

Şeref Doğuşcan Akbaş¹ ve Turgut Kocatürk²,
Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul

ÖZET

Bu çalışmada, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş her iki ucu sabit mesnet sınır şartlarına sahip bir kirişin sıcaklık etkisi altında burkulma sonrası davranışı Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde incelenmiştir. Kirişin malzeme özellikleri, kiriş eksen boyuna bir fonksiyona bağlı olarak değişmektedir. Bilindiği gibi burkulma sonrası davranış problemi lineer olmayan bir problem olduğundan, ele alınan problem geometrik lineer olmayan bir problemdir. Bununla birlikte, yer değiştirmiş konum üzerinden yazılan geometrik olarak lineer olmayan problemler daha sonra lineerleştirilerek çözüm elde edilmektedir. Buradaki çalışmada ise herhangi bir lineerleştirme yapılmamış olup burkulma sonrası davranış tam olarak incelenenilmektedir. Yani geometrik lineer olmama durumunda yer değiştirmeler ve dönmeler açısından herhangi bir sınırlama olmayıp tam geometrik lineer olmama hali göz önüne alınmıştır. Problemin çözümüne toplam Lagrangian formülasyonu kullanılarak sonlu elemanlar yöntemi ile gidilmiştir. Bu lineer olmayan sonlu eleman problemi Newton-Raphson ardışık yaklaşım (iterasyon) yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Çeşitli sayıda sonlu elemanlar alınarak yakınsama çalışmaları yapılmıştır. Nümerik hesaplamalarda MATLAB bilgisayar programlama dili kullanılmıştır. Bu çalışmada, sıcaklık değişimi ve farklı malzeme kompozisyonlarının kirişin burkulma ve burkulma sonrası davranışı üzerindeki etkileri incelenmiştir.

GİRİŞ

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM), iki veya daha fazla farklı malzemelerin bir yapı elamanı içerisinde dereceli olarak değişmesiyle oluşur. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde, farklı malzemelerin üstün özelliklerini birleştirerek daha dayanıklı bir malzeme oluşturulması hedeflenmiştir. Yüksek mukavemete sahip metallerin dayanımı yüksek sıcaklığa maruz ortamlarda ciddi bir şekilde düştüğünden, yüksek sıcaklığın olumsuz etkisinin azaltılması için metaller seramik ile kaplanmaktadır. Fakat bu tip termal bariyer sistemlerde bir takım olumsuz etkiler ortaya çıkmaktadır. Termal bariyer olarak kullanılan seramik ile metalin termal genleşme katsayıları arasındaki uyumsuzluk nedeniyle bu iki malzeme birleşimi ara yüzünde sıcaklıktan dolayı termal gerilmeler ortaya çıkmakta, kırılma ve çatlaklıklar meydana gelmektedir. Bu gibi olumsuz etkileri en aza indirmek amacıyla tasarlanan FDM, yapı elamanı boyunca malzemelerin heterojen bir biçimde kademeli olarak değişmesiyle oluşturularak, ara yüzlerdeki malzemelerin ısı genleşme katsayıları arasındaki uyumsuzlukları en aza indirip, bu bölgelerde oluşan ani kırılma ve çatlakların önlenmesini sağlamaktadır. FDM konsepti, 1984 te Japonya da bir uzay mekiği projesi sırasında, 10 mm den ince bir kesit için, 2000⁰ K seviyesinde bir yüzey sıcaklığına ve 1000⁰

¹ Araştırma görevlisi, İnşaat Müh. Böl., E-posta: serefda4@gmail.com

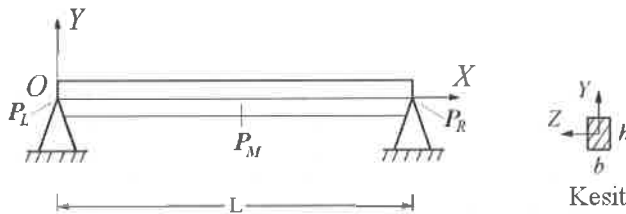
² Prof. Dr., İnşaat Müh. Böl., E-posta: kocaturk@yildiz.edu.tr

K'lık bir sıcaklık aralığına dayanabilecek bir ısı bariyer malzemesi önerisi ile ortaya çıkmıştır. 1984 ten bu yana, FDM ince filmleri çok geni çapta araştırılmaktadır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde malzeme yapı ve kompozisyonu cismin içerisinde kademeli/dereceli olarak değişir.

Fonksiyonel Derecelendirilmiş kirişlerin sıcaklık etkisi altındaki davranışları ile ilgili yapılan çalışmalar da; Ching ve Yen [15], iki boyutlu fonksiyonel derecelendirilmiş katı cisimlerin, hem mekanik hem de termal yüklemeler altında davranışını ağırsız Petrov-Galerkin yöntemi kullanarak incelemiştir. Li vd. [11], fonksiyonel derecelendirilmiş bir kirişin sıcaklık etkisi altında burkulma sonrası davranışını incelemiştir. Bu çalışmada Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak, her iki ucu ankastre mesnetli kirişin burkulma sonrası davranışını shooting yöntemi ile çözülmüştür. Nirmula vd. [12], üç tabakalı kompozit bir kirişin, termo-elastik gerilmelerinin analitik ifadelerini elde etmiştir. Çalışmada kirişin orta tabakası fonksiyonel dereceli malzemeden yapılmıştır. Na ve Kim [13], üniform ve üniform olmayan sıcaklık artışına maruz fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin üç boyutlu termal burkulma ve burkulma sonrası analizini sonlu elemanlar yöntemini kullanarak yapmıştır. Lu vd. [14], fonksiyonel derecelendirilmiş kalın kirişlerin iki boyutlu termo elastik analizini yapmıştır. Mohammadia ve Drydena [10], fonksiyonel derecelendirilmiş eğrisel bir kirişin termo-elastik gerilmelerini incelemiştir. Rahimi ve Davoodinik [8], fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko kirişinin termal davranışının analizini yapmıştır. Song ve Li [9], mekanik ve termal yüklemeye maruz her iki ucu ankastre mesnetli fonksiyonel derecelendirilmiş kemerlerin burkulma problemini incelemiştir. Ke vd. [7], kenarında çatlak içeren fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış kirişlerin burkulma sonrası davranışını Timoshenko kiriş teorisi ve Von Kármán kinematik bağıntılarıyla incelemiştir. Kiani ve Eslami [5], Euler- Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde, çeşitli termal yükleme tipi altında fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin burkulmasını incelemiştir. Anandrao [6], fonksiyonel derecelendirilmiş üniform narin kirişlerin termal burkulma sonrası davranışını Von-Karman şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkilerini temel alarak klasik Rayleigh-Ritz formülasyonu ve çok yönlü sonlu elemanlar yöntemi ile araştırmıştır. Kocatürk vd. [1], izleyici üniform yayılı yüke maruz fonksiyonel derecelendirilmiş konsol bir kirişin geometik lineer olmayan analizini Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde çözmüştür. Akbaş[2], fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin burkulma sonrası davranışını Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde incelemiştir. Kocatürk ve Akbaş [3], çeşitli sınır şartlarına sahip kirişlerin burkulma sonrası davranışını Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde incelemiştir.

TEORİ VE FORMÜLASYON

Fonksiyonel derecelendirilmiş, elastik ve izotrop malzemeden yapılmış her iki ucu basit mesnetli kiriş $O(XYZ)$ koordinat sistemi ile birlikte şekil 1 de gösterilmiştir.



Şekil 1: Her iki ucu sabit mesnetli kiriş

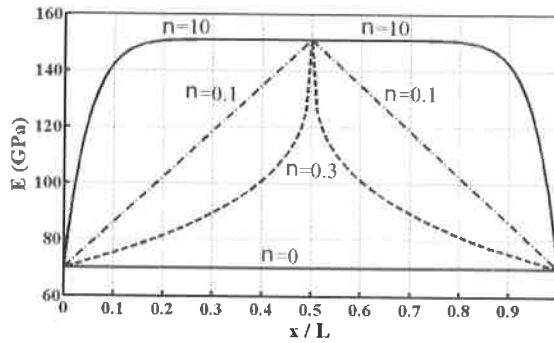
Nümerik hesaplarda, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin seramik malzeme zirkon ve metal malzeme olan alüminyumun karışımından oluştuğu düşünülmüştür. Kirişin yatayda iki farklı malzemenin kompozisyonundan oluştuğu, bu malzemelerin kirişin en uç yüzeyleri ile orta yüzeyinden yerleştirildiği düşünülmüştür. FDM'nin kiriş eksen boyunca değişen malzeme özelliklerinden herhangi biri P (E Elastisite modülü, α_x termal genleşme katsayısı, K termal iletkenlik katsayısı, T sıcaklık, ν Poisson oranı ve G Kayma modülü) aşağıda verilen, kiriş eksen boyunca belli bir fonksiyona bağlı olarak değişmektedir [17] modellenmiştir:

$$P(X) = (P_L - P_M) \left(1 - \frac{2X}{L}\right)^n + P_M \quad 0 \leq X \leq \frac{L}{2}$$

$$P(X) = (P_R - P_M) \left(\frac{2X}{L} - 1\right)^n + P_M \quad \frac{L}{2} \leq X \leq L \quad (1)$$

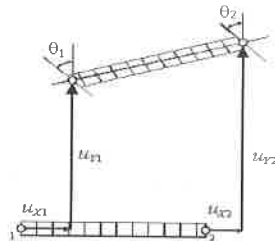
Burada, P : FDM'nin eksen boyunca değişen malzeme özelliklerinden herhangi biri. P_L : Kirişin sol kesitindeki malzemenin özellikleri. P_M : Kirişin orta kesitindeki malzemenin özellikleri. P_R : Kirişin sağ kesitindeki malzemenin özellikleri. n : eksen boyunca malzeme değişimini üstel dağılım kanununa göre (power-law) belirleyen pozitif bir katsayı. X : eksen yönündeki koordinat L : kiriş uzunluğu.

Eşitlik (1) deki denkleme göre elastisite modülünün kiriş uzunluğu boyunca dağılımı Şekil 2'de gösterilmiştir. Burada kirişin orta kesiti seramik ($E_A = E_{\text{Seramik}} = 151 \text{ GPa}$) ve sağ ve sol kesitleri ise Alüminyum ($E_U = E_{\text{Alüminyum}} = 70 \text{ GPa}$) dir.



Şekil 2: Elastisite modülünün kiriş uzunluğu boyunca değişimi

Buradaki çalışmada kirişlerin sıcaklık etkisi altındaki burkulma sonrası davranışları Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde incelenmiştir. Bilindiği gibi burkulma ve burkulma sonrası davranış bir geometrik lineer olmayan problemidir. Çalışmada, toplam Lagrangian formülasyonları üzerine temellendirilerek Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde sonlu eleman modeli kullanılmıştır. Toplam Lagrangian formülasyonlarının çözümü için, bilinen önceki adım çözümlerinden küçük adımlı artımlar yapılması yaklaşımı yolu kullanılmıştır. Bu çalışmada, Felippa [4] tarafından verilen homojen ve izotrop malzemeli Timoshenko kirişinin toplam Lagrangian sonlu elemanlar formülasyonları, sıcaklık ve fonksiyonel FDM için geliştirilmiştir. Timoshenko kiriş elemanının 2 düğüm noktalı sonlu eleman modeli Şekil 4.3 de gösterilmiştir. Her bir düğüm noktası üç serbestlik derecesine sahiptir. Bunlar, yatay ve dikey yer değiştirmeler olan u_{xi} ve u_{yi} ile Z eksenini etrafında dönme olan θ_i dir.



Şekil 3: İki düğüm noktalı kiriş elemanı

Green – Lagrange şekil değiştirme- yer değiştirme ilişkisi izleyen şekilde yazılır (Felippa [4]).

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{XX} \\ 2e_{XY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+u'_X) \cos \theta + u'_Y \sin \theta - Y\theta' - 1 \\ -(1+u'_X) \sin \theta + u'_Y \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e - Y\kappa \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\kappa = \theta' = \frac{\theta_2 - \theta_1}{L_0}; e = (1+u'_X) \cos \theta + u'_Y \sin \theta - 1; \gamma = -(1+u'_X) \sin \theta + u'_Y \cos \theta \quad (3)$$

Burada e aksenal şekil değiştirme, γ kayma şekil değiştirmesi, κ kirişin eğriliği, $u'_X = du_X / dX$, $u'_Y = du_Y / dX$, $\theta' = d\theta / dX$. Sıcaklık artışı ile birlikte İkinci Piola- Kirchhoff gerilme ifadeleri FDM için izleyen şekilde ifade edilir. Burada Felippa [4] tarafından verilen ifadelere, sıcaklık ile FDM ile sıcaklık etkileri eklenmiştir:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_{XX}(X) \\ s_{XY}(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1(X) \\ s_2(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1^0 + E(X)(e_1 - \alpha_X(X)T(Y)) \\ s_2^0 + G(X)e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1^0 \\ s_2^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E(X) & 0 \\ 0 & G(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 - \alpha_X(X)T(Y) \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Burada s_1^0 ve s_2^0 başlangıç gerilmeleri, E elastisite modülü, G kayma modülü, α_X , X doğrultusundaki termal genleşme katsayısı ve T sıcaklık artışını ifade ederler. Bu ifadeler eşitlik (1) de verilen denkleme göre X koordinatına bağlı birer fonksiyonlardır. Sıcaklık artışını temsil eden $T = T(Y)$ denklemi, ısı transfer denklemini (5) kullanarak elde edilir.

$$-\frac{d}{dY} \left[K(X) \frac{dT(Y)}{dY} \right] = 0 \quad (5)$$

$T(h/2) = T_{\bar{U}}$ ve $T(-h/2) = T_A$ sınır koşullarını kullanarak (5) eşitliğinin integrasyonu sonucunda izleyen eşitlik ortaya çıkar:

$$T(Y) = \frac{T_{\bar{U}} + T_A}{2} + \frac{(T_{\bar{U}} - T_A)}{h} Y \quad -0.5h \leq Y \leq 0.5h \quad (6)$$

Çubuk elemanı için şekil değiştirme enerjisi izleyen şekilde verilmiştir:

$$U = \int_{V_0} \left[\frac{1}{2} e^T E(x) e \right] d\bar{X} = \int_{A_0} \int_{L_0} \left[\frac{1}{2} (E(x) e_1^2 + G(x) e_2^2) \right] dA d\bar{X} \quad (7)$$

Alan integrallerin sonucunda, şekil değiştirme enerjisi kesit tesirleri cinsinden izleyen şekilde ifade edilir:

$$U = \int_{L_0} \left(\frac{1}{2} E(x) A_0 e^2 \right) d\bar{X} + \int_{L_0} \left(\frac{1}{2} G(x) A_0 \gamma^2 \right) d\bar{X} + \int_{L_0} \left(\frac{1}{2} E(x) I_0 \kappa^2 \right) d\bar{X} \quad (8)$$

İç kuvvet vektörü, şekil değiştirme enerjisinin düğüm yer değiştirmelerine göre birinci varyasyonu sonucunda elde edilir.

$$\delta U = \int_{L_0} (N \delta e + V \delta \gamma + M \delta \kappa) d\bar{X} = \int_{L_0} (z^T \delta h) d\bar{X} = \int_{L_0} (z^T B d\bar{X}) \delta u \quad (9)$$

$$\mathbf{p} = \int_{L_0} \mathbf{B}^T \mathbf{z} d\bar{X} \quad (10)$$

$\mathbf{B}$, şekil değiştirme - yer değiştirme matrisi olup Kocatürk vd. [1] tarafından verildiğinden burada yeniden yazılmayacaktır.

$$\mathbf{z}^T = [N, V, M], \quad \mathbf{h} = [e, \gamma, \kappa] \quad (11)$$

Burada, z kesit tesirleri vektörü olup, birleşenleri olan eksenel kuvvet N , kesme kuvveti V ve M eğilme momenti, ikinci-Piola Kirchhoff kesit tesirleridir.

Bu kesit tesirleri fiziki bir anlam taşımamakta olup, sadece şekil değiştirme enerjisinde ortaya çıkan matematiksel büyüklüklerdir. İkinci-Piola Kirchhoff gerilme tansörü ile Green-Lagrange şekil değiştirme tansörlerinin enerji açısından eşlenik olmasından dolayı, şekil değiştirme enerjisi ifadesinde kullanılırlar. Bünye bağıntılarını (Eşitlik 4) kullanılarak, ikinci-Piola Kirchhoff eksenel kuvveti N , kesme kuvveti V ve M eğilme momenti izleyen şekilde elde edilir:

$$N(X) = \int_A s_1(X) dA = \int_A [E(X)(e - Y\kappa - \alpha_X(X)T(Y))] dA = E(X)eA - E(X)\alpha_X(X) \left(\frac{T_T + T_B}{2} \right) A \quad (12)$$

$$V(X) = \int_A s_2(X) dA = \int_A [G(X)e_2] dA = G(X)A_0\gamma \quad (13)$$

$$M(X) = \int_A -Ys_1(X) dA = \int_A -Y[E(X)(e - Y\kappa - \alpha_X(X)T(Y))] dA \quad (14)$$

$$M(X) = E(X)I_0 \left(\kappa + \alpha_X(X) \frac{(T_T - T_B)}{h} \right) \quad (15)$$

Eşitlik (10) da verilen iç kuvvet vektörünün birinci varyasyonu teğet rijitlik matrisini verir:

$$\delta p = \int_{L_0} (B^T \delta z + \delta B^T z) d\bar{X} = (K_M + K_G) \delta u = K \delta u \quad (16)$$

Burada K_M malzeme rijitlik matrisi ve K_G ise geometrik rijitlik matrisi olup izleyen şekilde verilmiştir:

$$K_M = \int_{L_0} B_m^T S B_m dX \quad (17)$$

$$S = \begin{bmatrix} E(X)A & 0 & 0 \\ 0 & G(X)A & 0 \\ 0 & 0 & E(X)I_0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

K_G geometrik rijitlik matrisi olup Kocatürk vd. [1] tarafından verildiğinden burada yeniden yazılmayacaktır.

Timoshenko kiriş problemi için toplam Lagrangian formülasyonlarının çözümünde, bilinen önceki çözümlerden hareketle küçük adımlı artımsal yük yaklaşımı kullanıldı. Bilindiği gibi, tüm yükün tek adımda etkilmesi durumunda çözüm ancak lineer olmamanın yumuşak olması halinde mümkündür. Ayrıca artımsal işlem yolunun takibi aşırı sayıda iterasyon sayısını indirgemede ve fiziksel olarak doğru yolu izlemede faydalıdır. Burada artımsal işlem yolu ile birlikte Newton-Raphson ardışık yaklaşım yöntemi kullanılmış olup n inci yük artımında i inci iterasyon için çözüm izleyen formda elde edilir:

$$d\mathbf{u}_n^i = (\mathbf{K}_T^i)^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^i \quad (19)$$

Burada $(\mathbf{K}_T^i)_s$ i 'inci iterasyonda teğet doğrultudaki sistem rijitlik matrisi, $d\mathbf{u}_n^i$ i 'inci iterasyonda ve $n+1$ 'inci yük adımındaki artımsal çözüm vektörü, $(\mathbf{R}_{n+1}^i)_s$ i 'inci iterasyonda ve $n+1$ 'inci yük adımındaki sistem artık vektörüdür. Bu iterasyon işlemi, ardışık iki çözüm vektörü arasındaki fark Euclidean normunda seçilen bir tolerans kriterinden küçük olana kadar devam ettirilir. Söz konusu tolerans kriteri izleyen şekilde alınmıştır.

$$\sqrt{\frac{\left[\left(d\mathbf{u}_n^{i+1} - d\mathbf{u}_n^i \right)^T \left(d\mathbf{u}_n^{i+1} - d\mathbf{u}_n^i \right) \right]^2}{\left[\left(d\mathbf{u}_n^{i+1} \right)^T \left(d\mathbf{u}_n^{i+1} \right) \right]^2}} \leq \zeta_{tol} \quad (20)$$

Ardışık yaklaşımların bir serisi

$$\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{u}_{n+1}^i + d\mathbf{u}_{n+1}^i = \mathbf{u}_n + \Delta\mathbf{u}_n^i \quad (21)$$

verir, burada

$$\Delta\mathbf{u}_n^i = \sum_{k=1}^i d\mathbf{u}_n^k \quad (22)$$

Eşitlik (16) de bulunan, toplam Lagrangian sonlu eleman modeli için i'inci iterasyondaki teğet rijitlik matrisi $\left(K_T^i \right)_e$, Eşitlik (13)'de verilmiştir.

R_{n+1}^i artık vektörü ise izleyen şekilde ifade edilir:

$$\mathbf{R}_{n+1}^i = \mathbf{f} - \mathbf{p} \quad (23)$$

Burada $\mathbf{p}$ iç kuvvetler vektörü ve $\mathbf{f}$ dış kuvvetler vektörleri olup Kocatürk vd. [1] tarafından verilmiş olduğundan burada yeniden yazılmayacaktır.

Çalışmada bünye tansörü bileşenlerinin şekil değiştirme esnasında sabit kaldığı kabul edilmiştir.

Problemde ele alınan büyüklükler boyutsuzlaştırılırsa, izleyen ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{X}{L}, \quad \eta = \frac{Y}{L}, \quad U = \frac{u_x}{L}, \quad V = \frac{u_y}{L}, \quad T_r = \frac{T_\theta}{T_A}, \\ \lambda &= \delta^2 \alpha_M T_A, \quad P_H = \frac{p_H L^2}{E_M I}, \quad P_V = \frac{p_V L^2}{E_M I}, \quad \Delta = \frac{S - L}{L}, \quad \delta = \frac{L}{h} \\ \overline{\sigma}_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E_M T_m \alpha_{XM}}, \quad \overline{\sigma}_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{E_M T_m \alpha_{XM}} \end{aligned} \quad (24)$$

Burada α_M kirişin orta yüzeyindeki malzemenin termal genleşme katsayısı, δ L/h oranı (uzunluk/ yükseklik), P_H boyutsuz yatay mesnet tepkisi, P_V boyutsuz düşey mesnet tepkisi, Δ boyutsuz toplam eksenel uzama, S kirişin şekil değişimi sonrası uzunluğu, $\overline{\sigma}_{xx}$ boyutsuz Cauchy normal gerilmesi, $\overline{\sigma}_{xy}$ boyutsuz Cauchy kayma gerilmesi ve λ ise boyutsuz termal yükü temsil etmektedir. ve λ ise boyutsuz termal yükü temsil etmektedir.

SAYISAL SONUÇLAR

Bilinen birleştirme işlemlerinin kullanımıyla Eşitlik (12)'da verilen teğet rijitlik matrisi, iki düğüm noktalı eleman için Timoshenko kiriş teorisi üzerine temellendirilen toplam Lagrangian sonlu eleman modeline ilişkin eleman rijitlik matrislerinin kullanımıyla elde edilir. Bundan sonra önceden de belirtildiği gibi lineer olmayan problemlerin çözüm işlemi kullanılarak Timoshenko kirişinin toplam Lagrangian sonlu eleman modeli için ilgili çözümler elde edilir. Sayısal hesaplamalarda beş noktalı Gauss integral kuralı kullanılmıştır. Nümerik hesaplarda, farklı termal yükleme, malzeme dağılımı ve kirişin geometik özelliklerine göre, yer değiştirmeler, mesnet tepkileri, termal yükler, Cauchy

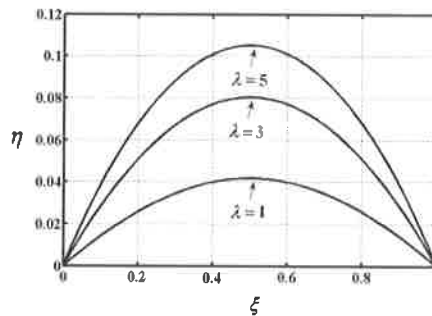
gerilmeleri incelenmiştir. Nümerik hesaplarda, kirişin seramik malzemesi zirkon (ZrO_2 ; $E=151 \text{ GPa}$, $\nu=0.2882$, $K=2.09 \text{ W/(m.K)}$, $\alpha=10 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$) ve metal malzemesinin alüminyumdan (Al ; $E=70 \text{ GPa}$, $\nu=0.31$, $K=204 \text{ W/(m.K)}$, $\alpha=23 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$) olduğu düşünülmüştür. Buradaki malzemelerin fiziksel özellikleri, Li vd. [11] yapmış olduğu çalışmadan alınmıştır. Kirişin yatayda iki farklı malzemenin kompozisyonundan oluştuğu, bu malzemelerin kirişin en uç yüzeyleri ile orta yüzeyinden yerleştirildiği düşünülmüştür. Kirişin orta yüzeyi seramikten yapıldığı, sağ ve sol yüzeyleri ise Alüminyumdan yapıldığı düşünülmüştür. Fonksiyonel derecelendirme katsayısı $n=0$ olduğunda, eşitlik (1)'e göre kiriş malzemesinin tamamı metal (homojen metal) olmaktadır.

Çeşitli sayılarda sonlu elemanlar alınarak yakınsama çalışması yapılmıştır. Kirişlerin yakınsama çalışması orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesine $V(0.5)$ göre, fonksiyonel derecelendirme katsayısı $n=5$, $T_r=3$, $\lambda=5$ ve $L/h=8$ değerleri için yapılmıştır. Tablo 1'den görülür ki sonlu eleman sayısı $m=100$ olduğunda göz önüne alınan yer değiştirmeler mükemmel olarak yakınsarlar. Bu yüzden sayısal hesaplamalarda sonlu eleman sayısı $m=100$ alınmıştır.

Tablo 1: Kirişlerin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesine göre $V(0.5)$, yakınsama çalışması.

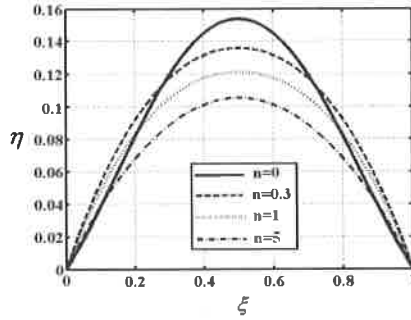
Kirişlerin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi $V(0.5)$			
m	$V(0.5)$	m	$V(0.5)$
20	0.2688	70	0.2704
30	0.2684	80	0.2706
40	0.2692	90	0.2707
50	0.2698	100	0.2708
60	0.2701	110	0.2708

Şekil 4 de, kirişin, $T_r=3$, $L/h=20$, $n=5$, $\lambda=1,3,5$ değerleri için burkulma sonrası konfigürasyonu verilmiştir.



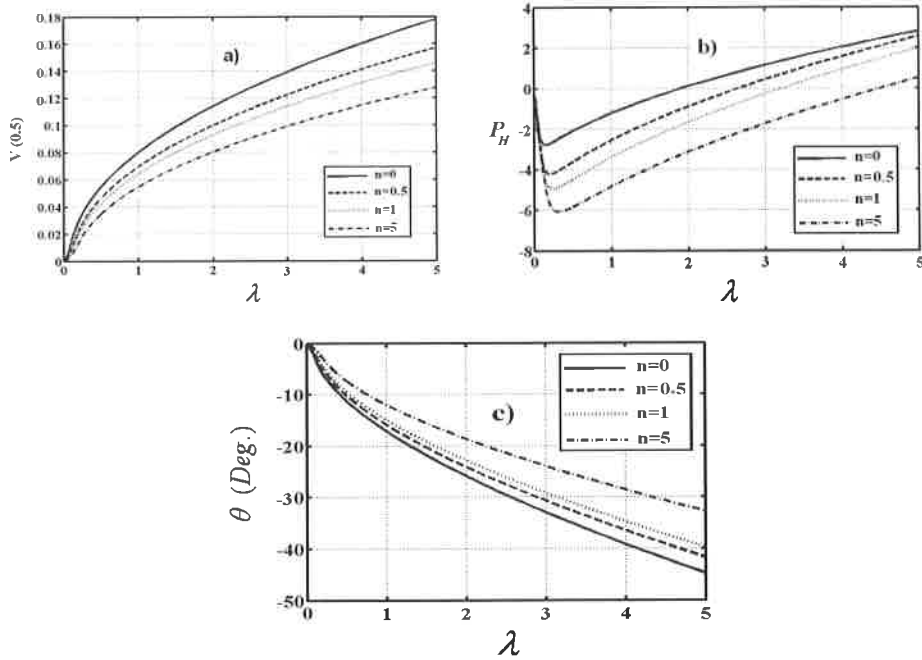
Şekil 4: $T_r=3$, $L/h=20$, $n=5$, $\lambda=1,3,5$ değerleri için kirişin burkulma sonrası konfigürasyonları

Şekil 5 de, kirişin, $T_r=3$, $L/h=20$, $\lambda=5$, $n=0,0.3,1,5$ değerleri için burkulma sonrası konfigürasyonu verilmiştir.



Şekil 5: $T_r = 3$, $L/h=20$, $\lambda = 5$, $n = 0, 0.3, 1, 5$ değerleri için kirişin burkulma sonrası konfigürasyonları

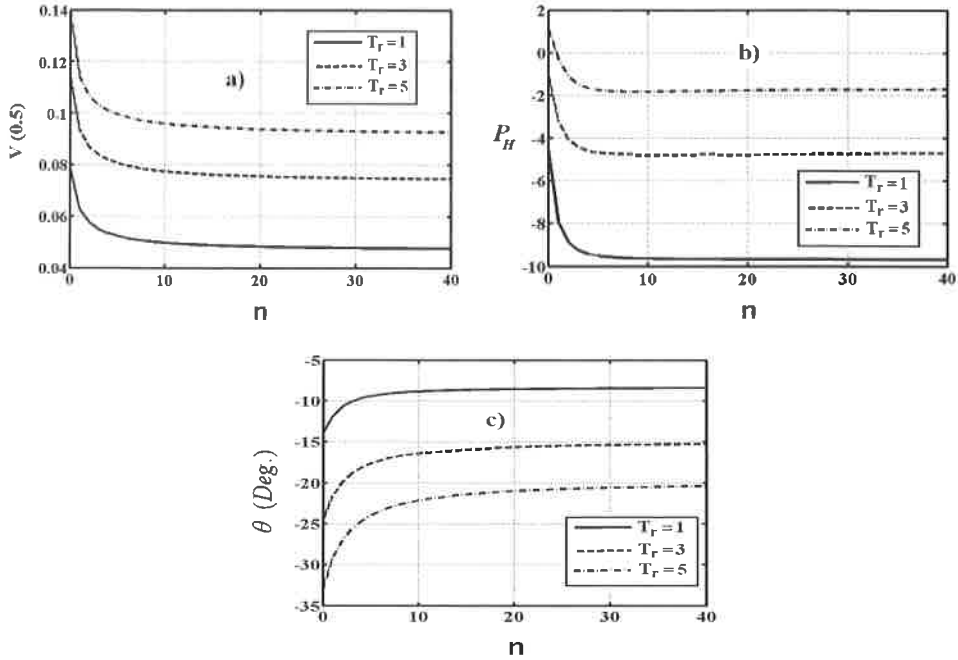
Şekil 6 da, $T_r = 5$, $L/h=20$ ve çeşitli fonksiyonel derecelendirme katsayısı n değerleri için kirişin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi, boyutsuz mesnet tepkisi ve mesnet dönme değerlerinin boyutsuz termal yük arasındaki ilişkileri gösterilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi, kritik termal burkulma yükünden sonra, çok küçük sıcaklık artışında kirişin yer değiştirme, mesnet momenti ve mesnet dönme açısı değerleri ciddi bir biçimde artmaktadır.



Şekil 6: $T_r = 5$, $L/h=20$, $n = 0, 0.5, 1, 5$ değerleri için a) kirişin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi $V(0.5)$ b) boyutsuz mesnet tepkisi c) mesnet dönme açısı ile boyutsuz termal yük λ arasındaki ilişkisi.

Şekil 7 de, $\lambda = 5$, $L/h=20$ ve çeşitli T_r (kirişin üst ve alt yüzeylerindeki sıcaklık değerlerinin oranı) için kirişin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi, boyutsuz mesnet tepkisi ve mesnet dönme değerlerinin fonksiyonel derecelendirme katsayısı n arasındaki ilişkileri gösterilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi, T_r arttıkça kirişlerin orta noktasının boyutsuz düşey yer

değiştirmesi ve mesnet tepkisi, fonksiyonel derecelendirme katsayısı n değerleri için artar. Çünkü T_r nin artması ile kirişin eğilme momenti de artar.



Şekil 7: $L/h=20$, $\lambda = 5$, $T_r = 1, 3, 5$ değerleri için a) kirişin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi $V(0.5)$ b) boyutsuz mesnet tepkisi c) mesnet dönme açısı ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı n arasındaki ilişkisi.

SONUÇLAR

Fonksiyonel derecelendirme katsayısı n artıkça, kiriş malzemesi, orta kesitte yer alan malzeme özelliklerine yaklaşır. Sayısal sonuçlarda orta kesitteki malzeme seramik (zirkon), yan kesitlerdeki ise metal (alüminyum) malzemesidir. Seramiğin (zirkon) mukavemet özellikleri, metalden (alüminyum) daha büyük olduğundan, fonksiyonel derecelendirme katsayısı n artıkça, yani kiriş malzemesi seramiğin (zirkon) özelliklerine yaklaştıkça kirişin rijitliği artmaktadır. Çünkü Elde edilen sonuçlardan da görülmektedir ki, fonksiyonel derecelendirme katsayısı n artıkça kirişin yer değiştirmesi, mesnet tepkileri ve dönme açıları azalmakta ve kiriş daha rijit bir duruma geçmektedir. Her iki ucu sabit mesnetli kirişin en çok zorlandığı yer, orta bölgesi olduğundan, orta bölgeye mukavemeti yüksek malzeme yerleştirmek kirişin daha rijit davranmasını sağlar. Böylesi bir yapı elemanı tasarımı, fonksiyonel derecelendirme katsayısı n , yapı elemanının mekanik davranışı üzerinde önemli bir rol oynamaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Kocatürk T, Şimşek M ve Akbaş Ş.D., Large displacement static analysis of a cantilever Timoshenko beam composed of functionally graded material. *Science and Engineering of Composite Materials*, 18,21-34, 2011.
- [2] Akbaş, Ş.D., *Sıcaklık etkisi altındaki fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin burkulma sonrası davranışlarının incelenmesi*, Yıldız Teknik Üniversitesi-Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, Mayıs dönemi raporu, 2011.
- [3] Kocatürk T ve Akbaş Ş.D., *Post-Buckling Analysis of Timoshenko Beams with Various Boundary Conditions Under Non-Uniform Thermal Loading*, *Structural Engineering and Mechanics*, Baskıda, 2011.
- [4] Felippa C.A., *Notes on Nonlinear Finite Element Methods*, 2011.
- [5] Kiani Y ve Eslami MR., *Thermal buckling analysis of functionally graded material beams*, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6(3), 229-238, 2010.
- [6] Anand Rao KS, Gupta RK, Ramchandran P ve Rao V., *Thermal post-buckling analysis of uniform slender functionally graded material beams*. *Structural Engineering and Mechanics*, 36(5), 545-560, 2010.
- [7] Ke L-L, Yang J ve Kitipornchai S., *Postbuckling analysis of edge cracked functionally graded Timoshenko beams under end shortening*, *Composite Structures*, 90(2), 152-160, 2009.
- [8] Rahimi GH ve Davoodini AR., *Thermal Behavior Analysis of the functionally graded Timoshenko's beam*. *IUST International Journal of Engineering Science*, 19(5-1), 105-113, 2008.
- [9] Song X ve Li S., *Nonlinear stability of fixed-fixed FGM arches subjected to mechanical and thermal loads*, *Advanced Materials Research*, 33-37, 699-706, 2008.
- [10] Mohammadia M ve Dryden JR., *Thermal Stress in a Nonhomogeneous Curved Beam*, *Journal of Thermal Stresses*, 31(7), 587-598, 2008.
- [11] Li S-R, Zhang J-H ve Zhao Y-G., *Thermal Post-Buckling of Functionally Graded Material Timoshenko Beams*. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 26(6), 803-810, 2006.
- [12] Nirmala K, Upadhyay PC, Prucz J ve Lyons D., *Thermo-elastic Stresses in Composite Beams with Functionally Graded Layer*. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 25(12), 1241-1254, 2006.
- [13] Na K-S ve Kim J-H., *Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-D finite element method*. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42(8-9), 749-756, 2006.
- [14] Lu C, Chen W ve Zhong Z., *Two-dimensional thermoelasticity solution for functionally graded thick beams*. *Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy*, 49(4), 451-460, 2006.
- [15] Ching HK ve Yen SC., *Meshless local Petrov-Galerkin analysis for 2D functionally graded elastic solids under mechanical and thermal loads*. *Composites: Part A*, 36, 223-240, 2005.
- [16] Khdeir AA., *Thermal buckling of cross-ply laminated composite beams*. *Acta Mechanica*, 149, 201-213, 2001.
- [17] Wakashima K, Hirano T ve Niino M., *Space applications of advanced structural materials*. *ESA, SP*, 303-397, 1990.