İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİTİ KADEMELİ DEĞİŞEN ÇEMBER EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ SERBEST TİTREŞİMLERİNİN KESİN ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mak. Müh. Öznur ÖZDEMİRCİ

Anabilim Dalı : MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ
Programı : MAKİNA TEORİSİ ve KONTROL

MAYIS 2003

<u>İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ</u>

KESİTİ KADEMELİ DEĞİŞEN ÇEMBER EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ SERBEST TİTREŞİMLERİNİN KESİN ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mak. Müh. Öznur ÖZDEMİRCİ
(503011157)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2003
Tezin Savunulduğu Tarih : 26 Mayıs 2003

Tez Danışmanı : Y. Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mustafa SAVCI

Doç. Dr. Ata MUĞAN

MAYIS 2003

ÖNSÖZ

Mühendislik problemleri içerisinde, çubuk teorisi ve eğri eksenli çubukların davranışları geniş bir yer tutar. Çalışmanın konusunu oluşturan, kesiti kademeli değişen eğri eksenli çubuklar, mühendisliğin pek çok alanında yapı elemanı olarak kullanılmaktadırlar. Bu çalışmada, kademeli kesitlere sahip çubukların, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliğinin dahil edilerek oluşturulan denklemlerinin, kesin çözümle çözülerek serbest titreşim frekanslarının elde edilmesi amaçlanmıştır. Frekans değerleri, kademenin farklı konumları gözönünde bulundurularak incelenmiş, elde edilen sonuçlar literatürdeki mevcut çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

Değerli tecrübesi ve bilgisi ile çalışmamın her aşamasında bana yol gösteren ve akademik çalışma prensiplerini kazandıran saygıdeğer hocam Y. Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ' ye teşekkür ederim.

Bu akademik çalışmanın oluşması için, yardımlarını ve değerli bilgilerini esirgemeyen İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi Mukavemet Birimi'nin çok kıymetli Öğretim Elemanlarına teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışmamda bana her zaman destek olan arkadaşlarım ve aileme de teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2003 Öznur ÖZDEMİRCİ

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

SEMBOL LİSTESİ

A	: Diferansiyel denklem takımının katsayılar matrisi
A	: Çubuğun dik kesit alanı
b	: Çubuk kesitinin derinliği
c	: Boyutsuz frekans
E	: Elastiklik modülü
F_n, F_b, F_t	: Kesite ait iç kuvvet bileşenleri
G	: Kayma modülü
h	: Çubuk kesitinin genişliği
η	: Kesit yükseklikleri oranı
I_1 , I_2, I_3	: Bölgelerin binormal eksene göre kesitlerin eylemsizlik momentleri
I_n , I_b	: Çubuk eğrisinin normal ve binormal eksenlerine göre kesitin eylemsizlik momentleri
I_p	: Polar eylemsizlik momenti
i	: Jiroskobik yarıçap
k_n, k_b	: Kayma gerilmesinin kesite üniform yayılmadığını gösteren sabitler
λ	: Narinlik oranı
M_n, M_b, M_t	: Kesite ait iç moment bileşenleri
m_n, m_b, m_t	: Çubuğa etkiyen yayılı dış moment bileşenleri
n, b, t	: Normal, binormal ve teğetsel koordinatları belirten indisler
q_n, q_b, q_t	: Çubuğa etkiyen yayılı dış kuvvet bileşenleri
R	: Eğrilik yarıçapı
s	: Yay uzunluğu
ξ	: Kademe açıklığının kiriş açıklığına oranı
ψ	: Kademe konumunu belirten açı
μ	: Çubuğun birim boyunun kütlesi
ρ	: Özgül kütle
ω	: Açısal frekans
$\Omega_n, \Omega_b, \Omega_t$	: Kesite ait dönme açısının bileşenleri
u, v, w	: Yer değiştirme bileşenleri
$\mathbf{y}$	: Diferansiyel denklem takımının değişkenler vektörü
$\mathbf{y_o}$	: Başlangıç değerleri vektörü
Φ	: Yay açıklığı, yay ölçüsü
Φ_T	: Toplam kiriş açısı
ν	: Poisson oranı

KESİTİ KADEMELİ DEĞİŞEN ÇEMBER EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ SERBEST TİTREŞİMLERİNİN KESİN ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Bu çalışmada, kesiti kademeli değişen eğri eksenli çubukların düzlem içindeki serbest titreşimleri, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri gözönüne alınarak incelenmiştir. Çubuk teorisinin verdiği denklemlerin kesin çözümleri elde edilmiştir. Literatürdeki çalışmalardan farklı olarak kademenin farklı konumları incelenmiş, asimetrik durumlar gözönüne alınmıştır.

Birinci bölümde, çubuk teorisi hakkında kısaca bilgi verilmiş ve çalışmanın kapsamı belirtilmiştir.

İkinci bölümde, eğri eksenli çubuklarla ilgili literatürdeki mevcut çalışmalar incelenmiş, kullanılan yöntemler hakkında bilgi verilmiştir. Sabit kesitli ve kesiti kademeli değişen çalışmalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm, eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı titreşimlerinin genel denklemlerini içermektedir. Çubuk statiğinin genel denklemlerine bağlı olarak, çubuk titreşimlerinin genel denklemleri D'Alambert Prensibiyle elde edilmiş ve düzlem içi serbest titreşimi ifade eden denklemlerin çözümlerine değinilmiştir. Kesin çözüm, sadece sabit kesitli çember eksenli çubuklar için sözkonusudur.

Dördüncü bölümde, kesiti kademeli değişen çember eksenli çubuğun düzlem içi titreşimlerinin kesin çözümü verilmiştir. Tek kademeli ve iki kademeli değişken kesitli çubuklar ayrı başlıklar altında incelenmiştir. Eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri gözönüne alınarak, Üçüncü bölümde verilen çözüm yöntemi ile sonuca ulaşılmıştır.

Beşinci ve altıncı bölümlerde, sırasıyla tek kademeli ve iki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların düzlem içi serbest titreşimleri incelenmiştir. Farklı mesnet tipleri, narinlik oranları, kademe oranları ve kademe konumları gözönüne alınarak, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin getirdiği katkılar ayrı ayrı incelenmiştir. Çalışmada, titreşimin ilk beş moduna ait boyutsuz frekans değerleri hesaplanmış, sonuçlar grafikler halinde verilmiştir. Ayrıca, mevcut eğri eksenli çubukların değişik sınır şartlarındaki serbest titreşimlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümleri verilmiş, kesin çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Yedinci bölümde, kademenin farklı konumlarına ait mod şekilleri verilmiş, kabullerin ve kademe konumunun mod şekli üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Sekizinci bölümde, tek kademeli ve iki kademeli çubuklarlın düzlem içi serbest titreşimleri ile ilgili literatürdeki benzer çalışmalarda yer alan örnekler çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Eğri eksenli çubukların titreşiminde, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal etmenin getirdiği hatanın, düşük narinlik oranları ve yüksek modlarda önemli olduğu görülmüştür. Bu etkilerin ve özellikle kademe konumunun boyutsuz frekans değeri ve çubuğun mod şekli üzerindeki etkileri incelenmiştir.

EXACT SOLUTION OF FREE IN-PLANE VIBRATIONS OF STEPPED CIRCULAR ARCHES

SUMMARY

In this study, the exact solution of free in-plane vibrations of stepped circular arches is given by considering axial extension, transverse shear deformation and rotatory inertia effects. Effects of different locations of the steps are also studied.

The first section is devoted to a general review of theory of curved beams and the aim of the study is given.

In the second section, the literature content about the curved beams having uniform and varying cross-sections is discussed and the methods used are evaluated. It has been recorded that most of the researchers calculated the natural frequencies of arches based on Euler-Bernoulli beam theory.

The governing equations based on D'Alambert principle for in-plane and out-of-plane free vibrations of curved beams are presented in the third section. The equations of the static problem are given by taking into account axial extension, transverse shear deformation, followed by the governing equations of in-plane vibration problem. The exact solution is obtained for only circular arches with uniform cross-sections.

In the fourth section, the exact solutions of differential equations, obtained in the third section, are given for stepped circular arches. In-plane vibrations of the arches having one step and two steps are investigated.

The frequency coefficients of these two kinds of stepped circular arches are given in the fifth and sixth sections. The effects of boundary conditions, opening angles, slenderness ratios and step ratios on the frequency coefficients for first five modes are given in diagrams. The effects of axial extension, transverse shear deformation and rotatory inertia are also considered individually. The natural frequencies obtained by using the finite element method are compared with the exact solutions.

In the seventh section, the mode shapes of stepped circular arches with respect to different positions of steps are given in figures.

The eighth section gives comparison between the results of the studies in literature and those obtained in this study. The reasons of differences are explained.

It is obtained that taking into account axial extension, transverse shear deformation and rotatory inertia effects gives a better approximation to the actual beam behavior for beams having low slenderness ratios especially in higher modes. The importance of these effects and positions of steps both on the calculation of frequency coefficients and the mode shapes of the arches is emphasized.

1. GİRİŞ

Çubuklar, günümüzde, birçok mühendislik alanında ve öncü endüstri kollarında yapısal eleman olarak kullanılmaktadırlar. Pek çok bilim adamı ve mühendis çubuklar ve çubuk teorisi üzerinde çalışmakta ve en doğru çözüm yöntemini aramaktadır.

Elastik çubukların hesabında elastisite teorisinin kullanılması gerekir. Ancak, oldukça karmaşık sınır değer problemlerinin ortaya çıkması nedeniyle çok basit durumlar dışında elastisite teorisinin kullanılması hemen hemen imkansızdır. Bu nedenle, elastisite teorisi kullanılarak yapılan araştırmalarda, problemi basitleştirmek için çubuk ekseni, çubuk kesiti ve çubuğa etkiyen dış kuvvetlerle ilgili varsayımlar ve kabuller yapılmaktadır. Böylece, sadece bazı özel hallerde uygulanabilecek çözümler elde edilmektedir.

Eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı titreşimlerini inceleyen çalışmalarda da bu tür basitleştirmeler görmek mümkündür. Çalışmalarda genellikle eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini hesaba katmayan Euler-Bernoulli çubuk teorisinin esas alındığı görülür. Böylece eşitlikler daha basit hale dönüşmekte ancak gerçek çubuk davranışından uzaklaşılmaktadır. Bunun yanısıra literatürdeki çalışmalarda, teorinin getirdiği denklemlerin çözümünde Ritz, Galerkin ve sonlu eleman gibi yaklaşık yöntemler kullanılarak sonuca ulaşılmıştır. Özellikle sayısal yöntemler ve bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte, yaygınlaşan sonlu eleman yöntemi çalışmaların büyük bölümünde uygulama alanı bulmuştur. Sadece basit problemler söz konusu olduğunda kesin çözüme başvurulmuştur.

Eğri eksenli çubukların düzlem içi titreşimlerini inceleyen pek çok çalışma olmasına rağmen, bunların çoğu sabit kesit alanına sahip çubukları ele almaktadır. Kesiti kademeli değişen eğri eksenli çubuklar oldukça az çalışmaya konu olmuştur. Euler-Bernoilli çubuk teorisi ve yaklaşık yöntemlerin kullanıldığı çalışmalarda, sadece ilk moda ait frekanslar ele alınmıştır.

1.1 Çalışmanın Amacı

Kesiti kademeli değişen çember eksenli çubukların düzlem içi titreşimlerinin ele alındığı bu çalışmada, çubuğa ait boyutsuz frekans değerleri kesin çözüm uygulanarak elde edilmiştir. Yapılan kaynak taramasıyla, literatürde bulunan mevcut çalışmalar incelenmiş, sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Öncelikle eğri eksenli çubuk titreşimlerinin genel denklemleri üzerinde durulmuştur. Denklemler eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini içermektedir. Başlangıç değerler yöntemi kullanılarak, çubuk ekseninin eğrisi, kesitin eksen boyunca değişimi, mesnetleme şartları ve yükleme durumu belirli olan her çubuğa uygulanabilecek genel bir çözüm elde edilmeye çalışılmıştır. Elde edilen birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, sadece katsayıların sabit olması durumunda mevcuttur. Bu durum, sabit kesitli çember eksenli çubuğu ifade etmektedir. Herhangi bir basitleştirici varsayım yapılmadan, birinci dereceden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem takımının kesin çözümü verilmiştir.

Daha sonra, sırayla tek kademeli ve iki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların düzlem içindeki serbest titreşimleri ele alınmıştır. Çubukların sabit kesit alanına sahip bölgeleri ayrı ayrı ele alınarak kesin çözüm uygulanmıştır. Kademenin farklı konumları gözönüne alınmış, asimetrik durumlar incelenmiştir. Sınır şartları, ankastre-ankastre, sabit-ankastre, sabit-sabit, ankastre-serbest ve serbest-serbest olarak belirlenmiştir. Farklı mesnet tipleri, kiriş açıları, kademe oranları, narinlik oranları ve kademe konumları için çubuğun ilk beş moduna ait düzlemsel serbest titreşimleri, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ayrı ayrı gözönüne alınarak incelenmiştir. Değişkenlerin, boyutsuz frekans üzerindeki etkisi grafikler halinde verilmiş ve sonuçlar yorumlanmıştır. Ayrıca ANSYS sonlu eleman paket programı yardımıyla, çubuk en uygun eleman tipiyle modellenmiş, kademenin farklı konumlarına ait doğal frekanslar elde edilerek teorik verilerle karşılaştırılmıştır. Kademe konumunun değişiminin çubuğun mod şekli üzerindeki etkisi de çalışmaya dahil edilmiştir.

Ardından, literatürdeki benzer çalışmalar çözülerek elde edilen frekans değerleri karşılaştırılmış, sonuçlar yorumlanmıştır.

2. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLAR ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR

Eğri eksenli çubukların, düzlem içi ve düzlem dışındaki serbest titreşimlerini inceleyen çalışmaların büyük bir kısmında, çubuk teorisinin denklemlerinin çözümünde yaklaşık yöntemlerin kullanıldığı görülmektedir. Çalışmalarda, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin ihmal edildiği Euler-Bernoulli çubuk teorisi esas alınarak, Ritz, Galerkin ve sonlu eleman yöntemi gibi yaklaşık yöntemlerle sonuca ulaşılmaktadır. Sadece basit durumlar söz konusu olduğuda kesin çözüm elde edilmiştir.

Literatürde eğri eksenli çubukların titreşimleri ile ilgili birçok çalışma bulunmakta ve yapılan çalışmaların çoğu sabit kesit alanına sahip sistemleri ele almaktadır. Love [1] tarafından ortaya konulan çalışma, eğri eksenli çubuklarla ilgili yapılan en önemli ve en eski çalışmalardan biridir. Çalışmada, dairesel kesitli tam bir daire halkası çubuğun düzlem içi ve düzlem dışı titreşimleri, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal eden Euler-Bernoulli çubuk teorisi ile ele alınmaktadır. Den Hartog'a ait olan çalışmada [2], yine dairesel kesitli, daire eksenli çubuğun titreşimleri incelenmektedir. Çubuk ekseninin uzamadığı ve uzadığı varsayımları yapılmış, enerji ifadeleri oluşturularak Rayleigh-Ritz yöntemiyle sonuca ulaşılmıştır.

Kesiti kademeli değişen eğri eksenli çubuklarla ilgili çalışmaların da birçoğunda sabit kesitli çubukta olduğu gibi, yukarıda bahsedilen etkiler ihmal eden Euler-Bernoulli teorisi ve yaklaşık yöntemler kullanılmaktadır. Aşağıda kesiti kademeli değişen eğri eksenli çubukların titreşimleri ile ilgili daha önceden yapılan çalışmaların bir incelemesi verilmektedir. İncelemede tarih sırasına bağlı kalınmaya çalışılmıştır.

2.1 Kesiti Kademeli Değişen Eğri Eksenli Çubuklar

De Irassar ve Laura'ya ait olan çalışmada [3], iki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların düzlem içi titreşimleri ele alınmaktadır. Kademenin ortada olması durumunda, çubukların serbest titreşimlerine ait ilk simetrik mod şekilleri, yaklaşık çözüm yöntemleri ile incelenmektedir. Ayrıca çalışmada, çubuğun konsantre kütle taşıması durumu da gözönüne alınmıştır.

Laura ve diğerleri [4], kesiti kademeli değişen çember eksenli çubuğun düzlemindeki titreşimlerini, konsantre kütle olması durumunu dahil ederek Rayleigh-Ritz yöntemi ile incelemekte ve sonuçları sonlu eleman yönteminin sonuçları ile karşılaştırmaktadır. Eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilerek, enerji ifadelerinde kütleye ait terimlere yer verilmiştir. Sabit-sabit, ankastre-ankastre ve ankastre-serbest sınır şartları için sonuçlar tablolar halinde sunularak. teorinin ve sonlu eleman yönteminin verdiği sonuçların uyumlu olduğu belirtilmektedir.

[5]'de, kesiti kademeli ve sürekli değişen, farklı eksen eğriliklerine sahip çubukların titreşimleri, polinom fonksiyonlar yaklaşımı ile Ritz yöntemini kullanarak incelenmektedir. Parabol, zincir eğrisi (catenary), spiral, daire ve sikloid şekillerinde eksenlere sahip çubukların doğal frekansları, farklı sınır şartları için sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırılarak tablolar halinde sunulmaktadır.

Auciello ve Rosa [6], çember eksenli çubukların titreşimlerini Euler-Bernoulli yardımıyla incelemekte, sonuçları diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlarla karşılaştırmaktadır. Çalışmada, tek bölgeli ve iki bölgeli kesiti kademeli değişen çember eksenli çubuklar ve sürekli değişken kesite sahip çubuklar ankastre-ankastre, sabit-sabit ve sabit-ankastre sınır koşulları için incelenmektedir.

Rossi ve Laura [7], iki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların titreşimlerini, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini gözönüne alarak, sonlu eleman yöntemi ile incelemektedir. Kademenin ortada bulunması durumunda, sabit-sabit ve ankastre-ankastre mesnet şartlarına sahip çubukları incelemekte, dinamik katılaşma olarak adlandırılan, frekans değişiminin kütle değişimine oranını da çalışmasında sunmaktadır.

Tong ve diğerlerine ait çalışmada [8], çember eksenli değişken kesitli çubukların serbest ve zorlanmış titreşimleri Euler-Bernoulli çubuk teorisi kullanılarak incelenmektedir. Sürekli değişken eğri eksenli çubukları, sabit kesitli elemanlara ayırmış ve herbir sabit kesitli çubuğun titreşim frekanslarını kesin çözümle elde etmiştir. Eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal ederek, elde ettiği sonuçlarda eleman sayısının arttıkça sonucun yakınsadığını göstermektedir.

Tüfekçi, [9] ve [10]'de sırayla tek kademeli ve iki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların düzlem içi titreşimlerine ait, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin dahil edildiği genel denklemleri, kesin çözümleriyle birlikte sunmaktadır. Çalışmalarda, beş farklı sınır koşulu için, farklı narinlik oranlarına, kademe oranlarına ve kiriş açılarına sahip çubuklar incelenmiştir.

Tüfekçi ve Özdemirci [11], iki kademeli değişken kesitli eğri eksenli çubuğu sabit kesit alanına sahip üç bölgeye ayırarak ele almaktadır. Çubuğun ilk beş moduna ait düzlem içi titreşimlerini, kesin çözümle incelemekte, dinamik katılaşma etkisini gözönüne almaktadır.

Liu and Wu [12], çember eksenli çubukların düzlemsel titreşimlerini, genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemini (Generalized differential quadrature rule) kullanarak incelemekte, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal etmektedir. Sabit kesitli, sürekli değişken ve kademeli değişken kesitli çubukların titreşimlerini inceleyerek Rayleigh-Ritz, Rayleigh-Schmidt, Galerkin, sonlu eleman ve hücre ayrıklaştırma (cell discretization) yöntemleri ile elde edilen sonuçları karşılaştırmıştır.

3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN GENEL DENKLEMLERİ VE KESİN ÇÖZÜM

3.1. Eğri Eksenli Çubuk Statiğinin Genel Denklemleri

Çubuk teorisinin tarihsel gelişimi incelendiğinde, günümüzde geniş ölçüde kullanılan çubuk teorisi denklemlerinin Euler-Bernoulli tarafından ortaya konulan denklemler olduğu görülmektedir. Euler-Bernoulli, çubuk ekseninin uzamadığını ve kesitte kayma meydana gelmediğini kabul etmektedir. Burada verilecek olan denklemlerde ise eksenel deformasyon ve kayma deformasyonu etkileri gözönüne alınacaktır.

Çubuk eksen eğrisi, üzerindeki her noktada birbirine dik iki birim vektör bağlı bir parametreli yönlendirilmiş bir ortamla temsil edilmektedir. Çubuğun yüksüz ve gerilmesiz olduğu başlangıç durumunda, birim vektörler uzay eğrisinin teğetine diktir ve çubuğun kesitini belirlemektedir. Bu durumda üçüncü vektör teğet birim vektörünü ifade eder. Çubuk şekil değiştirdikten sonra, kesit vektörleri yine birbirlerine dik birim vektörler olarak kalmaktadır. Başlangıçtaki teğet birim vektörü ise kesit vektörlerine dik kalmasına rağmen artık ne şekil değiştirmiş eksen eğrisine teğet ne de birim vektör olma şartı vardır. Böylece, çubuk dik kesitinin rijit olması varsayımı yapılmaktadır. Dik kesit ötelenir ve döner; ancak şekil değiştirmez. Yani kesit, serbestçe dönebileceği için şekil değiştirmeden sonraki eksene dik kalmayabilir [13].

Çubuk teorisinin w, u, Ω_b, M_b, F_t, F_n, olarak belirlenen altı bilinmeyeni, eğri eksenli düzlemsel çubuğun kendi düzlemindeki yerdeğiştirmesini ifade eden denklemlerde aşağıdaki gibi belirlenmiştir [14].

$$\frac{dw}{d\phi} = u + \frac{R(\phi)}{EA(\phi)} F_t$$

$$\frac{du}{d\phi} = -w + \frac{R(\phi)}{GA(\phi)/k_n} F_n + R(\phi)\Omega_b$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} M_b$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -R(\phi)F_n - R(\phi)m_b$$

$$\frac{dF_t}{d\phi} = F_n - R(\phi)q_t$$

$$\frac{dF_n}{d\phi} = -F_t - R(\phi)q_n \tag{3.1}$$

Yukarıdaki ifadelerde *u* ve *w* normal ve teğetsel yerdeğiştirmeler; Ω_b, binormal eksene ait dönme açısı; ϕ , açısal koordinat; *R*, deforme olmamış kiriş ekseninin eğrilik yarıçapı, F_n ve F_t iç kuvvetin normal ve teğetsel bileşenleri; M_b, binormal eksene ait iç momenti; q_n ve q_t, dış kuvvetler; m_b dış moment; *E*, malzemenin elastiklik (Young) modulü; *G*, malzemenin kayma modülü; k_n, gerilmelerin kesite üniform olarak yayılmadıklarını karakterize eden sabit; *A,* kesit alanı; I_b, binormal eksene göre eylemsizlik momentini temsil etmektedir.

Çubuğun kendi düzlemine dik doğrultudaki yerdeğiştirmelerini ifade eden denklemler ise;

$$\frac{dv}{d\phi} + R(\phi)\Omega_n - \frac{R(\phi)}{GA(\phi)/k_b} F_b = 0$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} + \Omega_t - \frac{R(\phi)}{EI_n(\phi)} M_n = 0$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} - \Omega_n - \frac{R(\phi)}{GI_p(\phi)} M_t = 0$$

$$\frac{dF_b}{d\phi} + R(\phi)q_b = 0$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} + M_t - R(\phi)F_b + R(\phi)m_n = 0$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} - M_n + R(\phi)m_t = 0 \qquad (3.2)$$

olarak elde edilirler.

3.2. Eğri Eksenli Çubuk Titreşimlerinin Genel Denklemleri

Eksen eğrisinin uzaması ve kayma deformasyonu etkilerinin göz önüne alındığı çubuk statiğinin genel denklemleri kullanılarak, çubukların titreşimlerini de incelemek mümkün olmaktadır. Çubuk titreşimlerini ifade eden denklemler D'Alambert Prensibi yardımıyla elde edilebilir. Bu prensibe göre, bir maddesel sistemin hareketinden dolayı, bir t anında meydana gelen eylemsizlik kuvvetleri aktif dış kuvvetler olarak, sisteme etki eden gerçek kuvvetlerle birlikte göz önüne alınırsa; sistem bütün bu kuvvetlerin etkisinde, t anındaki konumunda dengede bulunur. Böylece;

$$q_n = -\mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad q_b = -\mu\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad q_t = -\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$m_n = -\frac{\mu}{A}\left[I_n\frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial t^2}\right]$$

$$m_b = -\frac{\mu}{A}\left[I_b\frac{\partial^2 \Omega_b}{\partial t^2}\right]$$

$$m_t = -I_p\frac{\mu}{A}\frac{\partial^2 \Omega_t}{\partial t^2} \qquad (3.3)$$

q_n, q_b, q_t ve m_n, m_b, m_t ifadelerinde eylemsizlik kuvvetleri, dış yükler ve kuvvet çiftleri olarak alınırlar. Burada, μ birim boyun kütlesi, A kesit alanı, I_n , I_b sırasıyla kesitin normal ve binormal eksenlerine göre eylemsizlik momentlerini, I_p kesitin polar eylemsizlik momentini göstermektedir. Yer değiştirme büyüklükleri konumun ve zamanın fonksiyonlarıdır. Örneğin, yerdeğiştirme ifadesi $u(\phi,t) = u(\phi).e^{i\omega t}$ ve dış yük ifadesi $q_n = \mu\omega^2 u(\phi)e^{i\omega t}$ şeklinde gösterilir. Burada ω açısal frekansı, t ise zamanı ifade etmektedir. Böylece tüm büyüklüklerin de konumun ve zamanın fonksiyonları olacağı açıktır.

İfadelerde zaman fonksiyonu sadeleştirilerek, denklemler sadece konuma ve frekansa bağlı olarak elde edilirler. Kesit asal eksenleri ile, çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal eksenlerinin çakışması durumunda, düzlemsel eğri eksenli çubuğun kendi düzlemindeki serbest titreşimlerini ifade eden genel denklemler aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\frac{dw}{d\phi} = u + \frac{R(\phi)}{EA(\phi)} F_t$$

$$\frac{du}{d\phi} = -w + \frac{R(\phi)}{GA(\phi)/k_n} F_n + R(\phi)\Omega_b$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} M_b$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -R(\phi)F_n - R(\phi)\mu(\phi)\frac{I_b(\phi)}{A(\phi)}\omega^2\Omega_b$$

$$\frac{dF_t}{d\phi} = F_n - R(\phi)\mu(\phi)\omega^2 w$$

$$\frac{dF_n}{d\phi} = -F_t - R(\phi)\mu(\phi)\omega^2 u \tag{3.4}$$

Çubuğun kendi düzlemine dik doğrultudaki serbest titreşimlerini ifade eden denklemler ise;

$$\frac{dv}{d\phi} + R(\phi)\Omega_n - \frac{R(\phi)}{GA(\phi)/k_b} F_b = 0$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} + \Omega_t - \frac{R(\phi)}{EI_n(\phi)} M_n = 0$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} - \Omega_n - \frac{R(\phi)}{GI_p(\phi)} M_t = 0$$

$$\frac{dF_b}{d\phi} + R(\phi)\mu(\phi)\omega^2 v = 0$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} + M_t - R(\phi)F_b + R(\phi)\mu(\phi)\frac{I_n(\phi)}{A(\phi)}\omega^2\Omega_n = 0$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} - M_n + R(\phi)\mu(\phi)\frac{I_p(\phi)}{A(\phi)}\omega^2\Omega_t = 0 \tag{3.5}$$

olarak yazılabilir.

3.3. Eğri Eksenli Çubukların Düzlemsel Titreşimlerinin Kesin Çözümü

Eğri eksenli kirişin kendi düzlemindeki titreşimlerine ait (3.4) denklemleri, birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerden oluşmaktadır. Denklemler matris şeklinde ifade edildiğinde;

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi)\mathbf{y}(\phi) \tag{3.6}$$

yazılabilir. Burada **y**(ϕ), 6 elemanlı değişkenler vektörünü ve **A**(ϕ), 6×6 elemanlı katsayılar matrisini ifade etmek üzere,

$$\mathbf{y}(\phi) = \begin{bmatrix} w \\ u \\ \Omega_b \\ M_b \\ F_t \\ F_n \end{bmatrix} \quad \text{ve,}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & R/EA & 0 \\ -1 & 0 & R & 0 & 0 & Rk_n/GA \\ 0 & 0 & 0 & R/EI_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R\mu(I_b/A)\omega^2 & 0 & 0 & -R \\ R\mu\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & R\mu\omega^2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

olarak tanımlanır [14].

Yukarıda elde edilen **A** katsayılar matrisi, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin gözönüne alınması durumunda kullanılan matristir. Etkiler ayrı ayrı ele alınarak da çözüm yapılıp, doğal frekansları elde edilebilir.

Sadece eksenel deformasyon etkisinin hesaba katıldığı halde **A** matrisi;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & R/EA & 0 \\ -1 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R/EI_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R \\ R\mu\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & R\mu\omega^2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Sadece kayma deformasyonu etkisinin hesaba katıldığı halde **A** matrisi;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & R & 0 & 0 & Rk_n/GA \\ 0 & 0 & 0 & R/EI_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R \\ R\mu\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & R\mu\omega^2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Sadece dönme eylemsizliği etkisinin hesaba katıldığı halde **A** matrisi;

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R/EI_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R\mu(I_b/A)\omega^2 & 0 & 0 & -R \\ R\mu\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & R\mu\omega^2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Tüm etkiler ihmal edildiğinde **A** matrisi;

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R/EI_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R \\ R\mu\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & R\mu\omega^2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

olarak elde edilir.

Diferansiyel denklemin kesin çözümü sadece **A** katsayılar matrisinin tüm elemanlarının sabit sayılar olması durumunda mevcuttur. Bu durum, sabit kesitli çember eksenli çubukları ifade eder. Böylece (3.6) denkleminin çözümü ,

$$\mathbf{y}(\phi)=e^{\mathbf{A}\phi}\,\mathbf{y}(\phi_0) \tag{3.12}$$

şeklinde verilir.

$\phi_0 = 0$ olarak belirlenen düşey doğrultu, referans doğrultusu olarak alınmaktadır. Burada $\mathbf{y}(\phi_0)$, bilinen başlangıç değerleri vektörüdür. 6 bilinmeyen, çubuğun iki ucu için yazılan sınır şartları yardımıyla elde edilir.

Sınır şartlarından elde edilen 6 denklem homojen denklem takımı oluşturduğundan, sistemin sıfırdan farklı tek bir çözümünün olması katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması durumunda mevcuttur.

Sabit mesnet, ankastre mesnet ve serbest uç için sınır şartları aşağıdaki gibidir.

Sabit mesnet: $w(\phi) = 0$, $u(\phi) = 0$, $M_b(\phi) = 0$

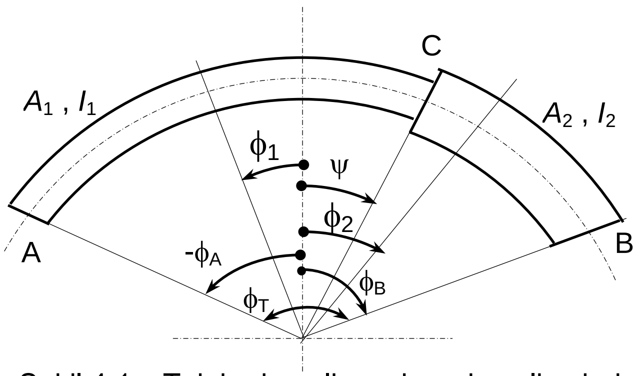
Ankastre mesnet: $w(\phi) = 0$, $u(\phi) = 0$, $\Omega_b(\phi) = 0$

Serbest uç: $M_b(\phi) = 0$, $F_t(\phi) = 0$, $F_n(\phi) = 0$

4. KESİTİ KADEMELİ DEĞİŞEN ÇEMBER EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİMLERİNİN KESİN ÇÖZÜMÜ

Kesiti kademeli değişen çember eksenli çubuk üzerindeki sabit kesit alanına sahip her bölge, düzlemsel eğri eksenli çubuğun kendi düzlemindeki titreşimlerini veren ifadeler (3.4) ve çözüm yolu kullanılarak incelenmektedir. Böylece eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri gözönüne alınarak sonuca ulaşılmaktadır. Etkiler ayrı ayrı ele alınarak da çözümler yapılacak, sonuçlar karşılaştırılacaktır.

4.1. Tek Kademeli Değişken Kesitli Çember Eksenli Çubuklar



Şekil 4.1. Tek kademeli çember eksenli çubuk

Sabit kesit alanına sahip iki farklı bölgeden oluşan tek kademeli çember eksenli çubukta, hareket denklemleri, iki bölge için ayrı ayrı ele alınarak çözüm yapılır [9]. Bölgeler,

Birinci Bölge: $-\phi_A \leq \phi_1 \leq \psi$

İkinci Bölge: $\psi \leq \phi_2 \leq \phi_B$

olarak sınırlandırılır.

İlk bölge için,

$$\frac{dw_1}{d\phi_1} = u_1 + \frac{R}{EA_1} F_{t1}$$

$$\frac{du_1}{d\phi_1} = -w_1 + \frac{R}{GA_1 / k_n} F_{n1} + R\Omega_{b1}$$

$$\frac{d\Omega_{b1}}{d\phi_1} = \frac{R}{EI_{b1}} M_{b1}$$

$$\frac{dM_{b1}}{d\phi_1} = -RF_{n1} - R\mu_1 \frac{I_{b1}}{A_1} \omega^2 \Omega_{b1}$$

$$\frac{dF_{t1}}{d\phi_1} = F_{n1} - R\mu_1 \omega^2 w_1$$

$$\frac{dF_{n1}}{d\phi_1} = -F_{t1} - R\mu_1 \omega^2 u_1 \qquad (4.1)$$

İkinci bölge için,

$$\frac{dw_2}{d\phi_2} = u_2 + \frac{R}{EA_2} F_{t2}$$

$$\frac{du_2}{d\phi_2} = -w_2 + \frac{R}{GA_2 / k_n} F_{n2} + R\Omega_{b2}$$

$$\frac{d\Omega_{b2}}{d\phi_2} = \frac{R}{EI_{b2}} M_{b2}$$

$$\frac{dM_{b2}}{d\phi_2} = -RF_{n2} - R\mu_2 \frac{I_{b2}}{A_2}\omega^2 \Omega_{b2}$$

$$\frac{dF_{t2}}{d\phi_2} = F_{n2} - R\mu_2 \omega^2 w_2$$

$$\frac{dF_{n2}}{d\phi_2} = -F_{t2} - R\mu_2 \omega^2 u_2 \tag{4.2}$$

denklemleri yazılır. 1 ve 2 indisleri kirişin bölgelerini temsil etmektedirler. Denklemler Bölüm 3'de belirtilen şekilde matris formuna getirildiğinde;

$$\frac{d\mathbf{y_1}}{d\phi_1} = \mathbf{A}_1(\phi_1)\mathbf{y}_1(\phi_1) \quad \text{ve} \quad \frac{d\mathbf{y_2}}{d\phi_2} = \mathbf{A}_2(\phi_2)\mathbf{y}_2(\phi_2) \tag{4.3}$$

elde edilir. Burada,

$$\mathbf{y}_1(\phi_1) = \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \\ \Omega_{b1} \\ M_{b1} \\ F_{t1} \\ F_{n1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & R/EA_1 & 0 \\ -1 & 0 & R & 0 & 0 & Rk_n/GA_1 \\ 0 & 0 & 0 & R/EI_{b1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R\mu_1(I_{b1}/A_1)\omega^2 & 0 & 0 & -R \\ R\mu_1\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & R\mu_1\omega^2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}_2(\phi_2) = \begin{bmatrix} w_2 \\ u_2 \\ \Omega_{b2} \\ M_{b2} \\ F_{t2} \\ F_{n2} \end{bmatrix} ve$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & R/EA_2 & 0 \\ -1 & 0 & R & 0 & 0 & Rk_n/GA_2 \\ 0 & 0 & 0 & R/EI_{b2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R\mu_2(I_{b2}/A_2)\omega^2 & 0 & 0 & -R \\ R\mu_2\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & R\mu_2\omega^2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

olarak tanımlanırlar. Elde edilen $\mathbf{A_1}$ ve $\mathbf{A_2}$ matrisleri eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin hesaba katıldığı durumu ifade ederler. Etkiler ayrı ayrı ele alınarak da katsayılar matrisleri oluşturulmuş ve sistem incelenmiştir.

(4.3) eşitliğinin, tek kademeli çember eksenli çubuk için çözümü, $\phi = \phi_{01}$ ve $\phi = \phi_{02}$ referans koordinatlarındaki başlangıç değerleri vektörleri $\mathbf{y_1}(\phi_{01})$ ve $\mathbf{y}_2(\phi_{02})$ 'nin bilinmesi ile elde edilir.

$$\mathbf{y}_1(\phi_1) = e^{\mathbf{A}_1\phi_1}\mathbf{y}_1(\phi_{01}) \qquad \mathbf{y}_2(\phi_2) = e^{\mathbf{A}_2\phi_2}\mathbf{y}_2(\phi_{02}) \tag{4.5}$$

Başlangıç değerleri vektörlerinin 12 elemanı, A ve B uçlarındaki sınır şartları, $\phi_1 = \psi$ ve $\phi_2 = \psi$ koordinatlarındaki süreklilik ve denge şartlarından elde edilen 12 denklem kullanılarak bulunabilir. Farklı mesnetleme şekilleri için sınır şartları önceki bölümde verilmişti. Süreklilik ve denge şartları ise aşağıda şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned} w_1(\psi) &= w_2(\psi) & u_1(\psi) &= u_2(\psi) \\ \Omega_{b1}(\psi) &= \Omega_{b2}(\psi) & M_{b1}(\psi) &= M_{b2}(\psi) \\ F_{t1}(\psi) &= F_{t2}(\psi) & F_{n1}(\psi) &= F_{n2}(\psi) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Matris formunda gösterimi;

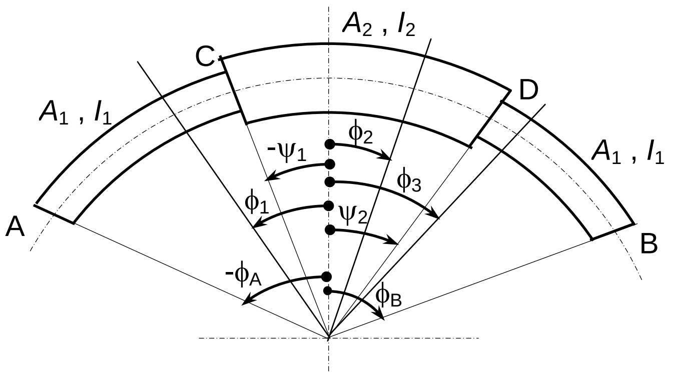
$$\mathbf{y_1}(\psi) = \mathbf{y}_2(\psi) \qquad \text{veya} \qquad e^{\mathbf{A}_1\psi}\mathbf{y_1}(\phi_{01}) = e^{\mathbf{A}_2\psi}\mathbf{y}_2(\phi_{02}) \tag{4.7}$$

şeklindedir. Sınır şartlarından elde edilen 6 eşitlik ve süreklilik şartlarından elde edilen 6 eşitlik, 4.8 eşitliğinde gösterildiği gibi matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X1} & \mathbf{0} \\ e^{A_1\psi} & -e^{A_2\psi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X2} \end{bmatrix}_{12\times 12} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{01} \\ \mathbf{y}_{02} \end{bmatrix}_{12\times 1} = [0]_{12\times 1} \tag{4.8}$$

Burada **X1**, 3×6 boyutunda eğri eksenli çubuğun A ucundaki sınır şartlarından elde edilen matris; **X2**, yine 3×6 boyutunda B ucundaki sınır şartlarından elde edilen matristir. **0**, 3×6 boyutunda sıfır matrisleridir. $\mathbf{y}_{01} = \mathbf{y}_{1}(\phi_{01})$ ve $\mathbf{y}_{02} = \mathbf{y}_{02}(\phi_{02})$ olarak tanımlanırlar. Elde edilen 12 eşitlik, homojen denklem takımı oluşturduklarından, $\mathbf{y}_{01}$ ve $\mathbf{y}_{02}$'nin sıfırdan farklı çözümleri ancak katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması durumunda mevcuttur. Determinant ifadesi, ω ile simgelenen doğal frekansa bağlı bir ifadedir. Böylece doğal frekanslar elde edilir. Aynı çözüm yolu diğer kabuller için de uygulanabilir.

4.2. İki Kademeli Değişken Kesitli Çember Eksenli Çubuklar



Şekil 4.2. İki kademeli çember eksenli çubuk

Sabit kesit alanına sahip üç farklı bölgeden oluşan iki kademeli çember eksenli çubukta, tek kademeli de olduğu gibi her bölge için hareket denklemleri ayrı ayrı ele alınarak çözüm yapılır [10]. Sistem asimetriktir ve bölgeler,

Birinci Bölge: $-\phi_A \le \phi_1 \le -\psi_1$

İkinci Bölge: $-\psi_1 \le \phi_2 \le \psi_2$

Üçüncü bölge: $\psi_2 \le \phi_3 \le \phi_B$

olarak sınırlandırılırlar.

Hareket denklemleri matris formunda aşağıdaki şekilde ifade edilirler.

$$\frac{d\mathbf{y_1}}{d\phi_1} = \mathbf{A}_1(\phi_1)\mathbf{y}_1(\phi_1)\ , \quad \frac{d\mathbf{y_2}}{d\phi_2} = \mathbf{A}_2(\phi_2)\mathbf{y}_2(\phi_2) \quad \text{ve} \quad \frac{d\mathbf{y_3}}{d\phi_3} = \mathbf{A}_3(\phi_3)\mathbf{y}_3(\phi_3) \tag{4.9}$$

Her denklem için kesin çözüm ,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(\phi_1) &= e^{\mathbf{A}_1\phi_1}\mathbf{y}_1(\phi_{01}) \\ \mathbf{y}_2(\phi_2) &= e^{\mathbf{A}_2\phi_2}\mathbf{y}_2(\phi_{02}) \\ \mathbf{y}_3(\phi_3) &= e^{\mathbf{A}_3\phi_3}\mathbf{y}_3(\phi_{03}) \end{aligned} \tag{4.10}$$

olarak bulunur. $\mathbf{y}_1(\phi_{01})$, $\mathbf{y}_2(\phi_{02})$ ve $\mathbf{y}_3(\phi_{03})$; $\phi_1 = \phi_{01}$, $\phi_2 = \phi_{02}$ ve $\phi_3 = \phi_{03}$ referans koordinatlarındaki bilinen başlangıç vektörleridir. A ve B uçlarındaki sınır şartlarından 6, C ($\phi_1 = -\psi_1$, $\phi_2 = -\psi_1$) ve D ($\phi_2 = \psi_2$, $\phi_3 = \psi_2$) noktalarındaki süreklilik şartlarından 12 olmak üzere toplam 18 eşitlik elde edilir. $\mathbf{y}_1(\phi_{01})$, $\mathbf{y}_2(\phi_{02})$ ve $\mathbf{y}_3(\phi_{03})$ başlangıç değerleri vektörlerindeki 18 bilinmeyen, bu 18 eşitlik kullanılarak çözüme ulaşılır. Aşağıda iki kademeli eğri eksenli çubuk için süreklilik şartları verilmektedir.

$$\mathbf{y_1}(-\psi_1) = \mathbf{y}_2(-\psi_1) \qquad \text{veya} \qquad e^{-\mathbf{A_1}\psi_1}\mathbf{y_1}(\phi_{01}) = e^{-\mathbf{A}_2\psi_1}\mathbf{y}_2(\phi_{02})$$

$$\mathbf{y}_2(\psi_2) = \mathbf{y}_3(\psi_2) \qquad \text{veya} \qquad e^{\mathbf{A}_2\psi_2}\mathbf{y}_2(\phi_{02}) = e^{\mathbf{A}_3\psi_2}\mathbf{y}_3(\phi_{03}) \tag{4.11}$$

Sınır ve süreklilik şartlarından elde edilen 18 denklem matris formunda aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X1} & \mathbf{01} & \mathbf{01} \\ e^{-\mathbf{A}_1\psi_1} & -e^{-\mathbf{A}_2\psi_1} & \mathbf{02} \\ \mathbf{02} & e^{\mathbf{A}_2\psi_2} & -e^{\mathbf{A}_3\psi_2} \\ \mathbf{01} & \mathbf{01} & \mathbf{X2} \end{bmatrix}_{18\times18} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{y_{01}} \\ \mathbf{y_{02}} \\ \mathbf{y_{03}} \end{bmatrix}_{18\times1} = [\mathbf{0}]_{18\times1} \tag{4.12}$$

Burada **X1** ve **X2,** 3×6 boyutunda çubuğun A ve B uçlarındaki sınır şartlarından elde edilen matrisler; **01**’ler 3×6 boyutunda sıfır matrisleri; **02**’ler 6×6 boyutunda sıfır matrisleridir. $\mathbf{y}_{\mathbf{01}} = \mathbf{y}_{\mathbf{1}}(\phi_{01})$, $\mathbf{y}_{\mathbf{02}} = \mathbf{y}_{\mathbf{2}}(\phi_{02})$ ve $\mathbf{y}_{\mathbf{03}} = \mathbf{y}_{\mathbf{3}}(\phi_{03})$ olarak tanımlanırlar. Elde edilen 18 eşitlik, homojen denklem takımı oluşturduğundan, tek kademeli çubukta uygulandığı gibi katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek doğal frekanslar elde edilir.

5. TEK KADEMELİ DEĞİŞKEN KESİTLİ ÇEMBER EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ SERBEST TİTREŞİMLERİ

Bu bölümde, tek kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların düzlem içi serbest titreşimlerinin frekans değerleri detaylı bir çalışmayla ele alınmaktadır. Boyutsuz frekanslar, farklı narinlik dereceleri, kademe oranları, kiriş açıları, mesnetleme şekilleri ve kademe konumları için ilk beş mod ve beş farklı kabul gözönüne alınarak hesaplanmaktadır. Literatürdeki benzer çalışmalardan farklı olarak, kademe konumunun hareketi incelenmekte, asimetrik durumlar da gözönüne alınmaktadır. Çalışmada, teorik olarak hesaplanan mod şekillerine de yer verilmektedir.

Frekanslar, ankastre-ankastre, ankastre-sabit, sabit-sabit, ankastre-serbest ve serbest-serbest olmak üzere beş farklı mesnetleme durumu için elde edilmektedir. Ayrıca, çalışmada, çeşitli kabuller gözönüne alınarak çözümler elde edilmiştir. Böylece, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliğinin sonuca olan etkileri ayrı ayrı incelenmektedir.

a. Tüm etkiler: Bu kabulde Euler-Bernoulli çubuk teorisinde ihmal edilen bütün etkiler, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri gözönüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

b. Etkiler ihmal: Euler-Bernoulli çubuk teorisine uygun olarak çubuğa etkiyen eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilerek frekans değerleri hesaplanır.

c. Eksenel deformasyon: Sadece eksenel deformasyon etkisi gözönüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

d. Kayma deformasyonu: Sadece kayma deformasyonu etkisi gözönüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

e. Dönme eylemsizliği: Sadece dönme eylemsizliği etkisi gözönüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

Frekans değerleri ve gerekli mod şekilleri MATLAB programı kullanılarak hesaplanmış ve çizilmiştir.

5.1. Problemin Tanıtılması

Yapılan çalışmada, dikdörtgen kesitli çember eksenli çubuklar gözönüne alınmaktadır. Şekil (4.1)'de gösterilen tek kademeli değişken kesitli çubukta, h_1 ve h_2 sırasıyla birinci ve ikinci bölgelerdeki kesit yükseklikleri, b_1 ve b_2 de kesit genişlikleridir. Burada verilen tüm örneklerde $b_1 = b_2$ olarak alınmaktadır. A_1 ve A_2 bölgelerin kesit alanlarını I_1 ve I_2 ise binormal eksene göre alan eylemsizlik momentlerini gösteren büyüklüklerdir ve

$$
\begin{aligned}
A_1 &= b_1 h_1 \qquad & I_1 &= \frac{b_1 h_1^{\,3}}{12} \\
A_2 &= b_2 h_2 \qquad & I_2 &= \frac{b_2 h_2^{\,3}}{12}
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

olarak tanımlanırlar.

Aşağıda, çember eksenli çubuğa ait boyutsuz frekanslar hesaplanırken gözönüne alınan değişken büyüklükler başlıklar halinde sunulmaktadır.

Mesnet Şartları:

Sistem, ankastre-ankastre, ankastre-sabit, sabit-sabit, ankastre-serbest ve serbest-serbest olmak üzere beş farklı mesnetleme durumu ele alınarak incelenmektedir.

Kiriş Açısı:

ϕ_T kiriş açısı, ϕ_A ve ϕ_B çubuğun A ve B uç noktalarının koordinatlarını belirten açı değerleri olmak üzere,

$$\phi_T = \phi_A + \phi_B \tag{5.2}$$

olarak tanımlanır. Çubuk, 9 farklı kiriş açısı için incelenmiştir.

$\phi_T =$ 10^o, 20^o, 30^o, 45^o, 60^o, 75^o, 90^o, 135^o, 180^o

Kademe Oranı:

Birinci ve ikinci bölgelerin kesitlerinin yükseklikleri arasındaki oran η ile gösterilmekte ve kademe oranı olarak adlandırılmaktadır. Kademe oranı,

$$\eta = \frac{h_2}{h_1} \tag{5.3}$$

şeklindedir. Tek kademeli çember eksenli çubuk 18 farklı kademe oranı ile incelenmiştir. Bu değerler;

$\eta =$ 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2, 2.1

olarak değişmektedir.

Narinlik Oranı:

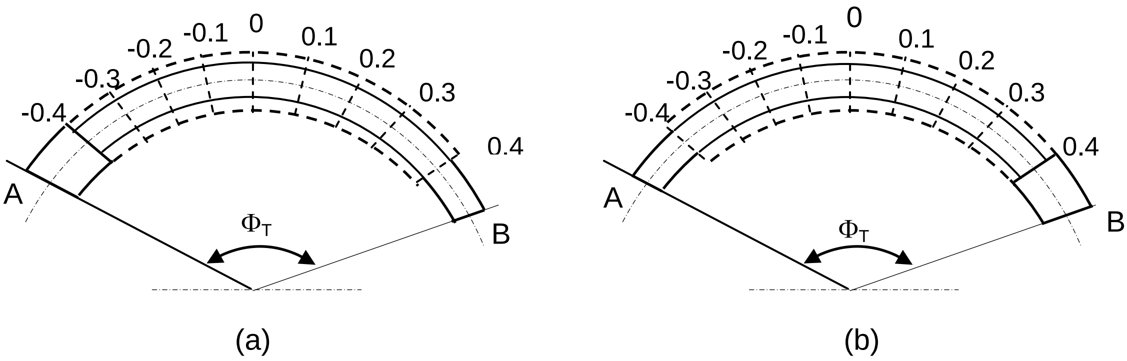
Üç farklı narinlik oranında incelemeler yapılmıştır. Narinlik oranı,

$$\lambda = \frac{R}{i} = \frac{R}{\sqrt{\frac{I_{b1}}{A_1}}} \tag{5.4}$$

olarak tanımlanır. Eşitlikte, *R* kiriş ekseninin eğrilik yarıçapını ve *i* jiroskobik yarıçapı ifade eder. λ'nın 50, 100 ve 150 olması durumları incelenmektedir.

Kademe Konumu:

Beş farklı mesnet tipinde, ilk beş moda ait frekanslar, yukarıda belirtilen kiriş açısı, narinlik oranı ve kademe oranı değişkenleri ile 8 farklı kademe konumu için incelenmekte ve elde edilen sonuçlar farklı kabuller için grafikler halinde sunulmaktadır. Literatürdeki çalışmalarda, simetrik durumlar gözönüne alınırken, bu çalışmada kademenin hareketinin boyutsuz frekansa olan etkisi de hesaplara dahil edilmekte, asimetrik durumlar incelenmektedir.



Şekil 5.1. (a) $\eta = h_2 / h_1$ <1 için kademenin ψ / ϕ_T 'a bağlı farklı konumları

(b) $\eta = h_2 / h_1$ >1 için kademenin ψ / ϕ_T 'a bağlı farklı konumları

Kademenin konumu ψ açısıyla (Şekil 4.1) tanımlanmaktadır. Buna göre,

$$\frac{\psi}{\phi_T} = -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$$

değerlerini alır.

Boyutsuz frekans değeri,

$$c = \omega R^2 \phi_T{}^2 \sqrt{\frac{\mu_1}{EI_1}} \qquad (5.5)$$

ifadesinden elde edilir.

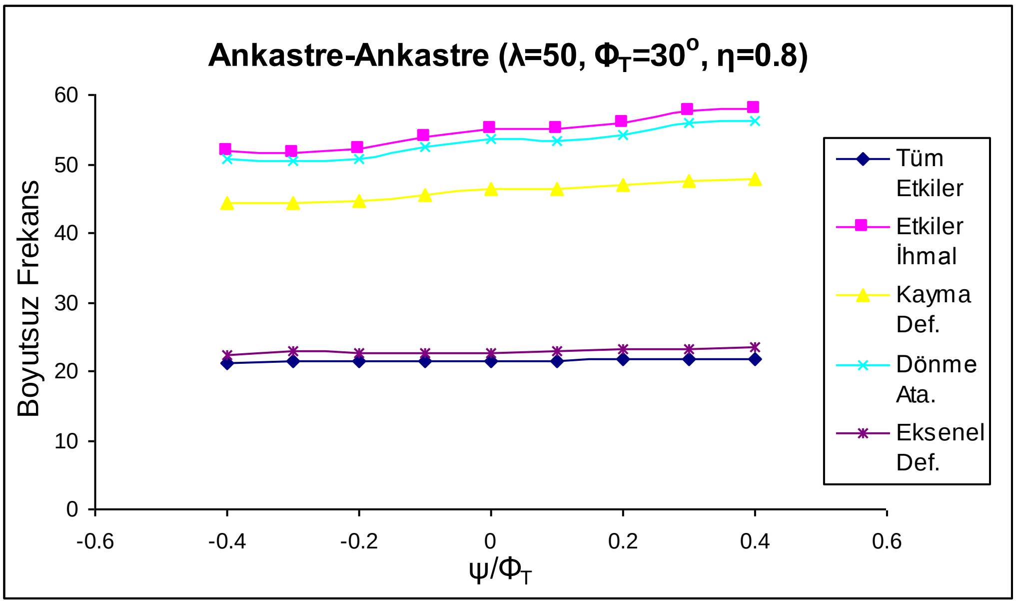
5.2. Tek Kademeli Değişken Kesitli Çember Eksenli Çubuklarda Boyutsuz Frekansın Kademenin Konumu ile Değişimi

Bu bölümde, narinlik derecesi, kademenin oranı, kiriş açısı, mesnet tipi ve titreşimin mod sayısı değiştirilerek hesaplanan boyutsuz frekans değerlerinin kademenin konumuna bağlı değişimi grafikler halinde sunulmaktadır. Grafiklerde yatay eksen kademenin konumunu gösterirken, düşey eksen boyutsuz frekans değerlerini vermektedir. Kademenin konumu ψ / ϕ_T ile tanımlanmaktadır. Kademe oranın 1'den küçük değerleri için (η<1); yatay eksen üzerinde sağa doğru ilerlerken yani ψ / ϕ_T büyüklüğü, -0.4 değerinden +0.4 değerine yaklaşırken gerçek sistemde kademe, kütle artışıyla birlikte sağa doğru ilerler. Kademe oranının 1’den büyük değerleri için (η>1) ise ψ / ϕ_T’nin artmasıyla kütle azalmaktadır. Eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliğinin boyutsuz frekansa olan etkilerini de grafiklerde görmek mümkündür.

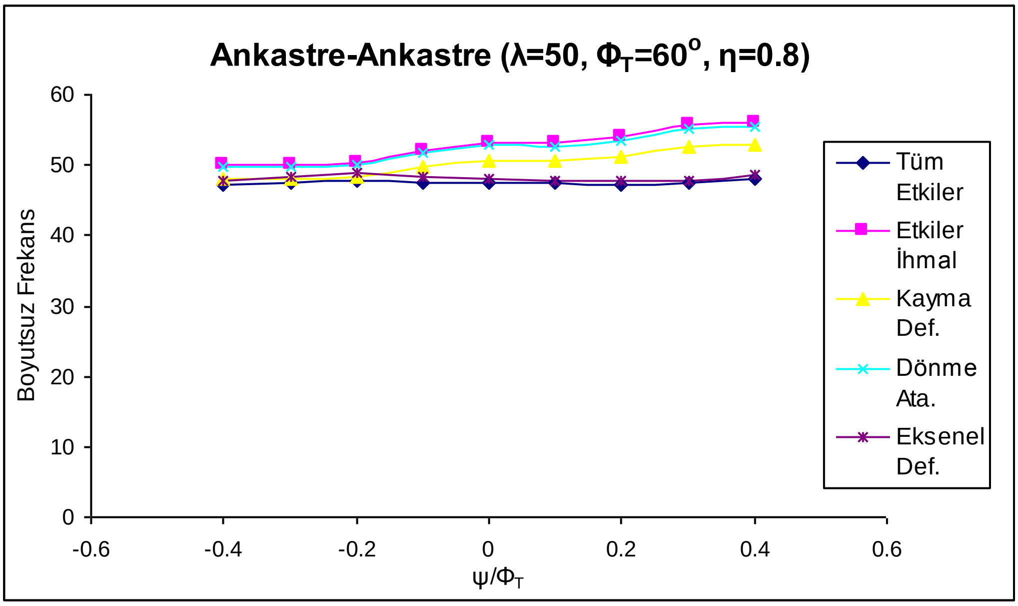
Simetrik sınır şartlarına sahip olan ankastre-ankastre, sabit-sabit ve serbest-serbest mesnetlemelerinin benzer özellikler gösterdiği incelemeler sonucunda görülmüştür. Bu nedenle bu mesnet şartları ayrı ayrı ele alınmayacak, sonuçlar tek mesnetleme durumu üzerinde gösterilecektir.

5.2.1. Farklı kiriş açılarında kademe konumunun boyutsuz frekansa etkisi

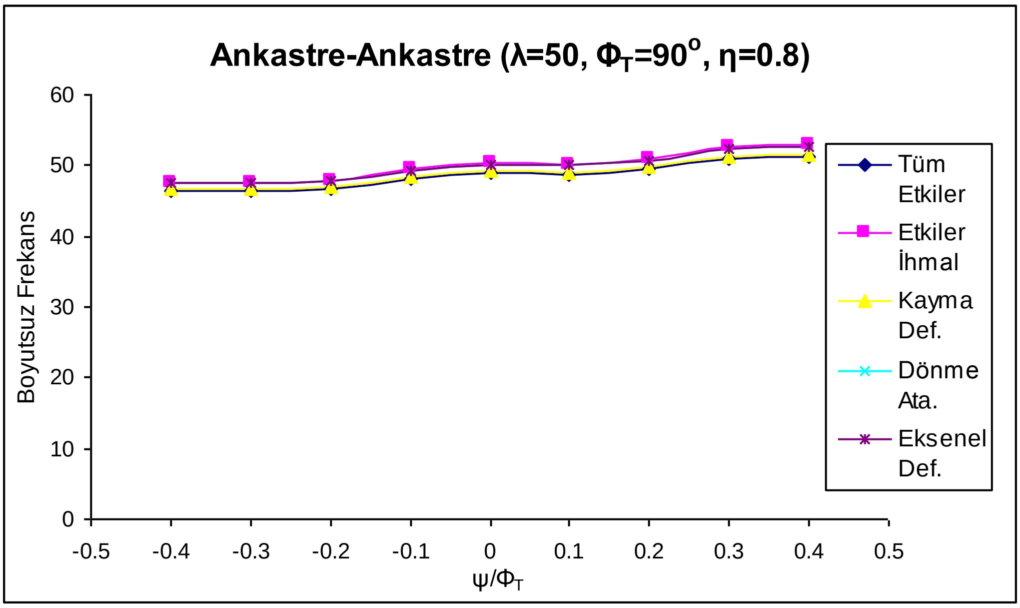
Aşağıda, ankastre-ankastre olarak mesnetlenmiş, $\lambda = 50$ narinlik oranına ve $\eta = 0.8$ kademe oranına sahip tek kademeli değişken kesitli çember eksenli çubuğun farklı kiriş açıları için, birinci moduna ait boyutsuz frekansların kademenin konumuna bağlı değişimlerini gösteren grafikler verilmektedir. Grafiklerdeki eğriler beş ayrı kabul için elde edilen sonuçları göstermektedir.



Şekil 5.2. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 30^o$, $\eta = 0.8$ özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.



Şekil 5.3. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 60^o$, $\eta = 0.8$ özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar

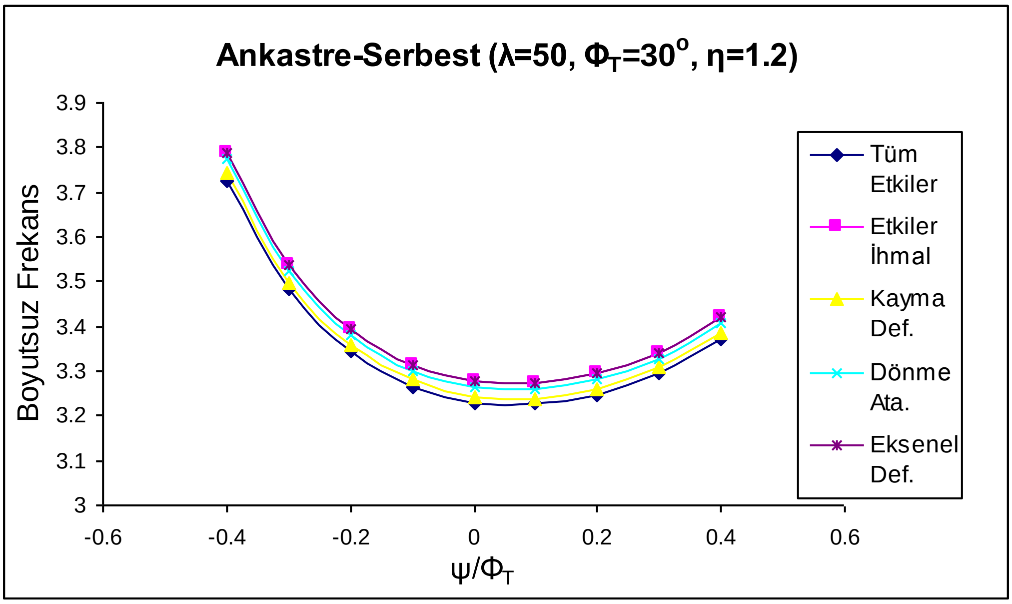


Şekil 5.4. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 90^o$, $\eta = 0.8$ özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.

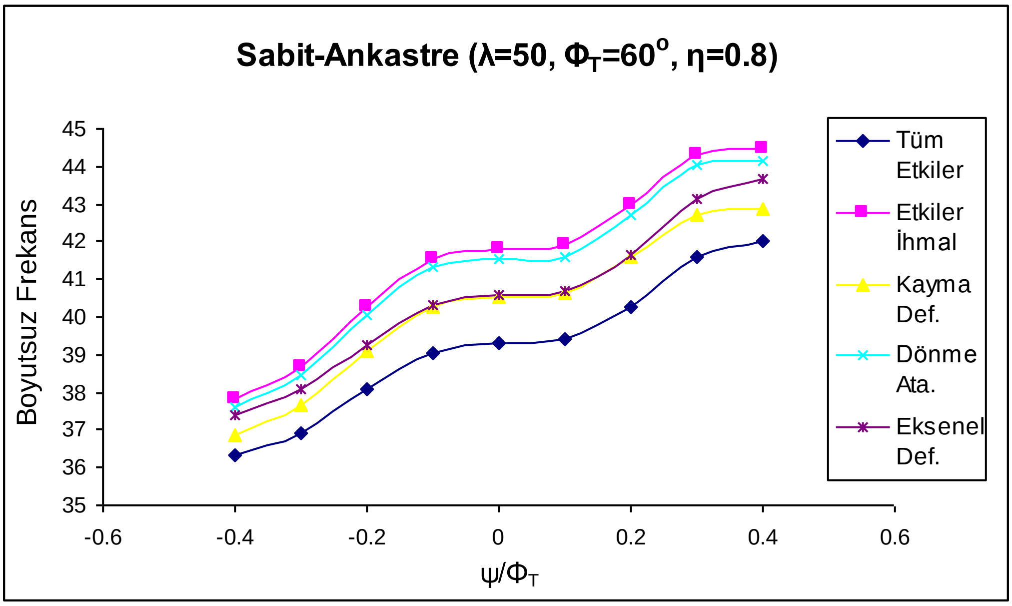
Yukarıdaki, kademe konumuna göre farklı kiriş açıları için çizilen dört grafik incelendiğinde, ilk iki grafikte eksenel deformasyon etkisinin diğer etkilerden daha baskın olduğu görülmektedir. Küçük kiriş açılarında eksenel deformasyon etkisi belirgin olarak ortaya çıkarken, kiriş açısı büyüdükce eğriler birbirine yaklaşmakta, kabullerin önemi azalmaktadır. Örneğin ilk grafikte, kademenin ψ / ϕ_T =0.4 konumu için, etkilerin ihmal edilmesi kabulünde %166.10'u bulan en büyük hata değeri $\phi_T = 90^o$ olan son grafikte %3.23’e kadar düşmüştür. Aynı şekilde ilk grafikte, %7.31’yı bulan eksenel deformasyon kabulündeki en büyük hata, son grafikte %2.84 olarak görülmektedir. 1. mod ankastre-ankastre mesnetlenmiş, $\lambda = 50$ narinlik ve $\eta = 0.8$ kedeme oranına sahip çubukta, $\phi_T = 90^o$’den daha büyük kiriş açılarında kabüllerin sonuçları arasındaki frekans farklılıkları ihmal edilebilecek kadar azalmaktadır. Frekanslar arasındaki farkın önemsenmeyecek kadar azaldığı kiriş açısı, değişken kesitli çember eksenli çubukta kademe oranının ve mod sayısının artmasıyla artar.

Sabit kesitli çember eksenli ankastre-ankastre çubuğun yüksekliği bir uçundan itibaren azalmaya başladığında ($\eta < 1$), kademenin ilk konumu için (ψ / ϕ_T =+0.4) boyutsuz frekans değerlerinde ilk olarak %5-6 gibi bir azalma olmaktadır. Daha sonraki kademe konumlarında, bu azalış %0.5-0.6 mertebelerine inmekte, kütle azaldıkça frekanstaki değişimler düzgün olmayan artmalar ve azalmalar şeklinde devam etmektedir.

Ankastre-serbest mesnet şartında, benzer grafikler incelendiğinde kabullerin etkisinin az olduğu, sadece kiriş açısının çok küçük değerlerinde kabullerin etkili olduğu gözlenir. Mesnetleme şartının getirdiği bir durum olarak eksenel deformasyon, etkisi en az olan kabuldür. Kayma deformasyonu, diğer etkilere göre baskın durumdadır. Aşağıda ankastre-serbest mesnet şartında $\phi_T = 30^o$ kiriş açısına sahip çember eksenli çubuğa ait bir grafik sunulmaktadır. Serbest uçtan itibaren kesitin kalınlaşmaya başlaması ($\eta > 1$) yani kademenin sola kayması boyutsuz frekansta azalışa neden olur. Bu azalış kademenin ψ / ϕ_T =+0.1 konumuna kadar devam eder ve bu konumda en düşük değerine ulaşarak artmaya başlar. ψ / ϕ_T =+0.4 konumunda, çubuğun ikinci bölgesi yani kalın olan kısım, konsantre kütle gibi davranır. Kademenin sola kaymasıyla kütlede artışla birlikte frekansta da azalış görülür. ψ / ϕ_T =+0.1 konumundan itibaren çubuğun rijitliği attığından frekans değerlerinde artış görülür.



Şekil 5.5. Ankastre-serbest mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 30^o$, $\eta = 1.2$ özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar

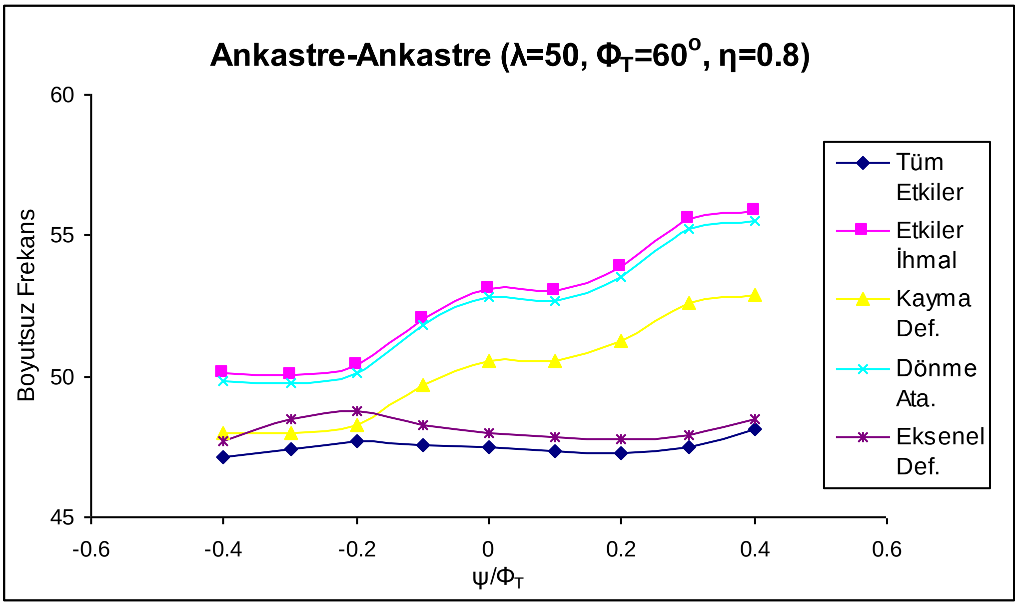


Şekil 5.6. Sabit-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 60^o$, $\eta = 0.8$ özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekaslar.

Yukarıdaki, sabit-ankastre mesnet şartına ait 1. mod frekanslarının kademenin konumuyla değişimini veren grafik incelendiğinde, belli konumlarda kayma deformasyonu etkisinin sistemde baskın durumda bulunduğu görülmektedir. Kayma deformasyonu kabulünde, en küçük hata değeri, kademenin mafsala yakın olan konumu (ψ / ϕ_T =-0.4) için %1.52 iken, hatanın en yüksek değerine %3.22 ile kademenin ψ / ϕ_T =+0.2 konumunda raslanmaktadır. Sistemde kütle artışı ile birlikte boyutsuz frekans değerlerinde sürekli bir artış gözlemlenir.

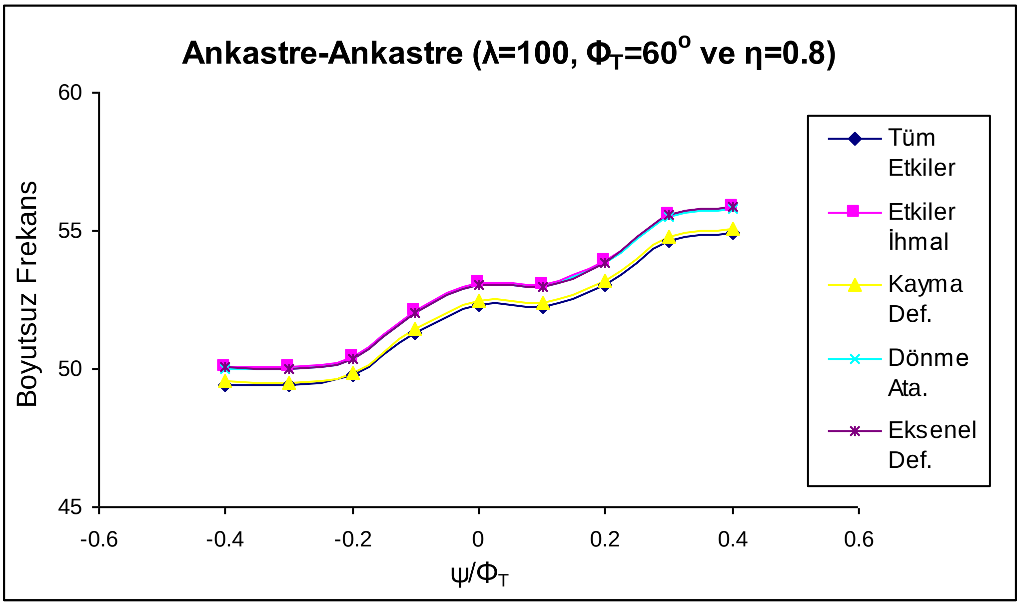
5.2.2. Farklı narinlik oranlarında kademe konumunun boyutsuz frekansa etkisi

Aşağıda, ankastre-ankastre olarak mesnetlenmiş, $\phi_T = 60^o$ kiriş açısına ve $\eta = 0.8$ kademe oranına sahip tek kademeli değişken kesitli çember eksenli çubuğun üç farklı narinlik oranı için, birinci moduna ait boyutsuz frekansların kademenin konumuna göre değişimlerini gösteren grafikler verilmektedir. Kademenin konumu ψ / ϕ_T olarak tanımlanmıştır. Grafik üzerinde beş ayrı kabul için çizilen eğrileri görmek mümkündür.

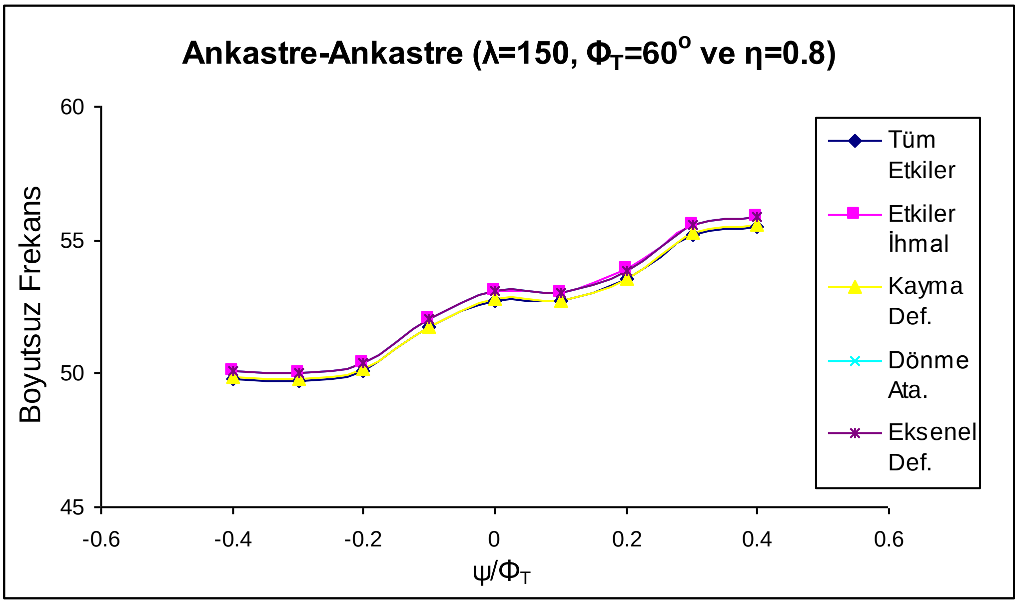


Şekil 5.7. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 60^o$, $\eta = 0.8$ özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar

Grafikler, yalnızca birinci mod titreşimlerine ait boyutsuz frekansların, λ =50, 100 ve 150 olması durumundaki değişimini göstermektedir, diğer modlar için de benzer sonuçlar elde edildiğinden burada verilmeyecektir.



Şekil 5.8. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 100$, $\phi_T = 60^o$, $\eta = 0.8$ özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar



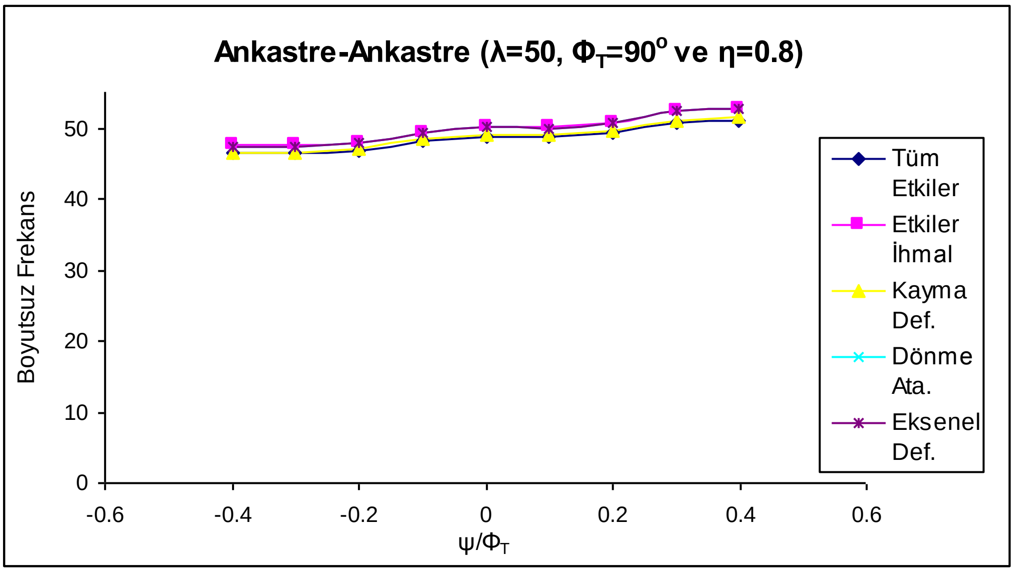
Şekil 5.9. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 150$, $\phi_T = 60^o$, $\eta = 0.8$ özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar

Yukarıdaki, boyutsuz frekansın kademe konumuna göre değişimini farklı narinlik oranlarında ifade eden grafiklerin ilkinde, eksenel deformasyon etkisinin baskın olduğu görülmektedir. Kayma deformasyonu etkisi ikinci derecede önemli olan etkidir. Narinlik oranı arttıkça kabullerin boyutsuz frekansa olan etkisi azalmakta ve λ=150 için frekans değerleri arasındaki farklar ihmal edilebilir hale gelmektedir. Burada verilemeyen modlar ve mesnetleme şartlarında da benzer durum sözkonusudur; narinliğin artmasıyla kabullerin boyutsuz frekans üzerindeki önemi azalmaktadır. λ=50 durumunda, eksenel deformasyon kabulü dışındaki kabullerde en büyük hata değeri kademe konumunun +0.3 olması durumunda ortaya çıkarken eksenel deformasyon kabulünde -0.2'de ortaya çıkar. Bu durumda kayma deformasyonunun daha etkili olduğu görülür. Narinliğin artmasıyla, frekanslardaki artışla birlikte, eğrilerde de yükselen bir karakter gözlenir. Önceki bölümde verilen grafiklerde de incelendiği gibi, sistemde kütle artışı yani kademenin sağa kaymasıyla birlikte, boyutsuz frekanslarda düzgün olmayan artış ve azalışlar görülmektedir.

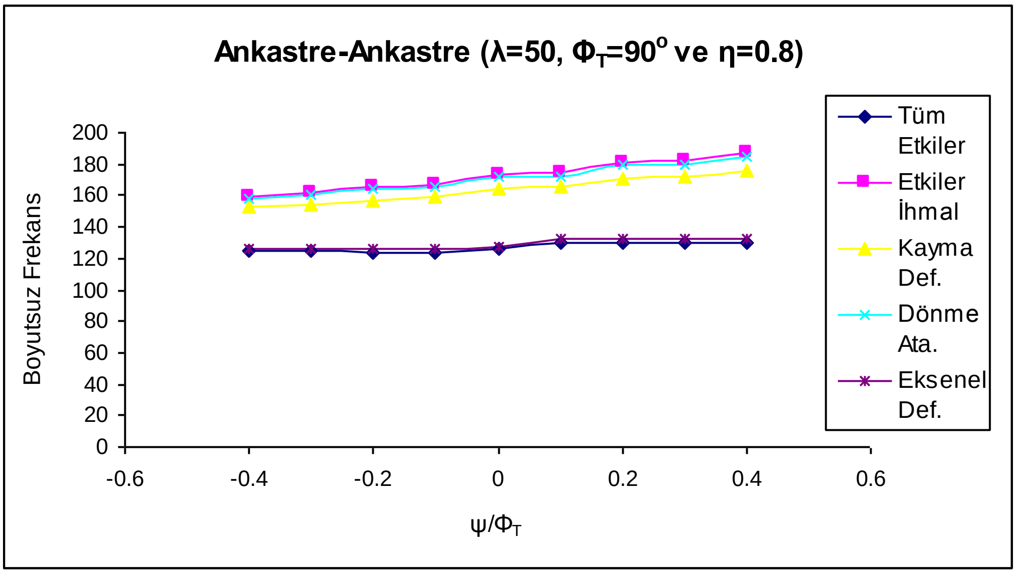
5.2.3. Farklı modlarda kademe konumunun boyutsuz frekansa etkisi

Aşağıda, ankastre-ankastre olarak mesnetlenmiş, $\lambda = 50$ narinlik oranına, $\phi_T = 90^o$ kiriş açısına ve $\eta = 0.8$ kademe oranına sahip tek kademeli değişken kesitli çember eksenli çubuğun farklı mod sayıları için, boyutsuz frekansların kademenin konumuna bağlı değişimlerini gösteren grafikler verilmektedir.

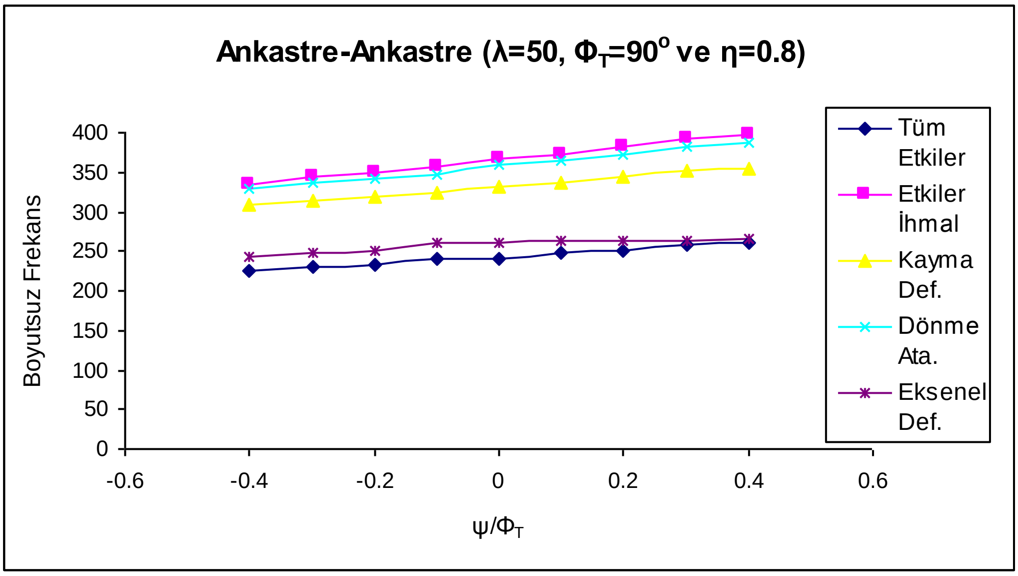
Aşağıdaki grafiklerden de görüldüğü gibi, ilk mod için birbirine çok yakın olan farklı kabullerin boyutsuz frekansları, mod sayısı arttıkça birbirlerinden uzaklaşmakta ve kabullerin önemi artmaktadır. Özellikleri verilen çember eksenli çubuk için yine eksenel deformasyon etkisinin baskın olduğu söylenebilir. 1. modda, boyutsuz frekans değerleri arasındaki en büyük hata etkiler ihmal kabulü için %3.23 ile kademenin +0.4 konumunda meydana gelirken, aynı konumda 3. modda hata %44.50'ye ve 5. modda % 53.22'ye çıkmaktadır. Diğer kabuller için de mod sayısı arttıkça hataların da arttığı gözlenmiştir.



Şekil 5.10. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 90^o$, $\eta = 0.8$ özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar



Şekil 5.11. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 90^o$, $\eta = 0.8$ özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 3. moduna ait boyutsuz frekanslar

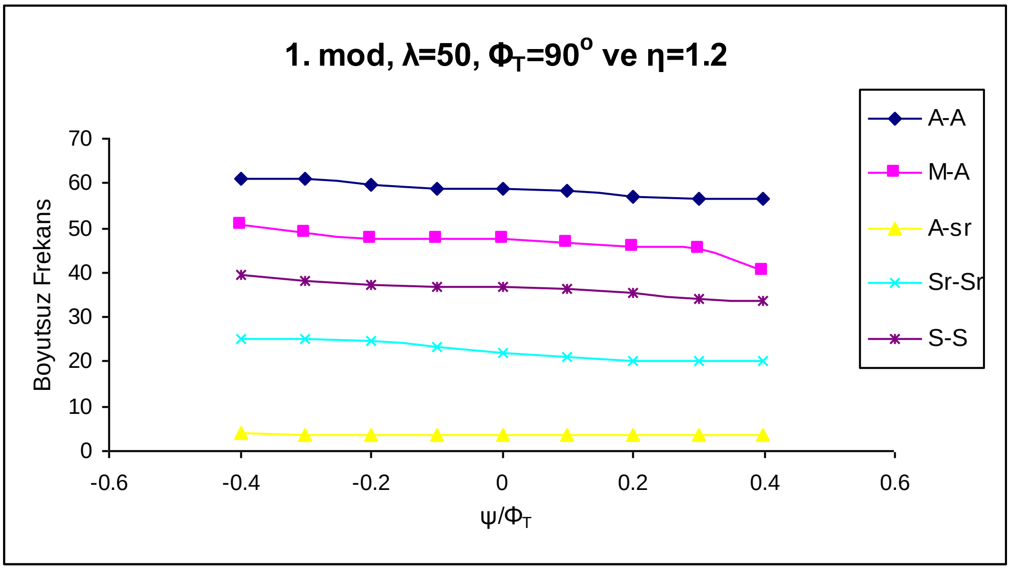


Şekil 5.12. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 90^o$, $\eta = 0.8$ özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 5. moduna ait boyutsuz frekanslar.

Sabit kesitli çember eksenli çubuk bir ucundan itibaren kademeli olarak incelmeye başladığında, kademenin ilk konumunda (ψ / ϕ_T =+0.4) frekans değerinde ani bir düşüş olduğu belirtilmişti. Frekanslardaki bu azalma, 1. mod için %5.46, 3. mod için %2.30 ve 5. mod için %2.28 değerlerini alarak mod sayısı arttıkça azalan bir karakter göstermektedir.

5.2.4. Farklı mesnetleme şartlarında kademe konumunun boyutsuz frekansa etkisi

Aşağıda, farklı mesnet koşullarına sahip, $\lambda = 50$ narinlik oranında, $\phi_T = 90^o$ kiriş açısında ve $\eta = 1.2$ kademe oranındaki tek kademeli değişken kesitli çember eksenli çubuğun 1. modu için, boyutsuz frekansların kademenin konumuna bağlı değişimlerini gösteren bir grafik verilmektedir. Grafik üzerindeki eğriler, beş farklı mesnetleme şartı için eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin tümünün dahil edilmesi durumunda elde edilen boyutsuz frekansların değişimini göstermektedir.

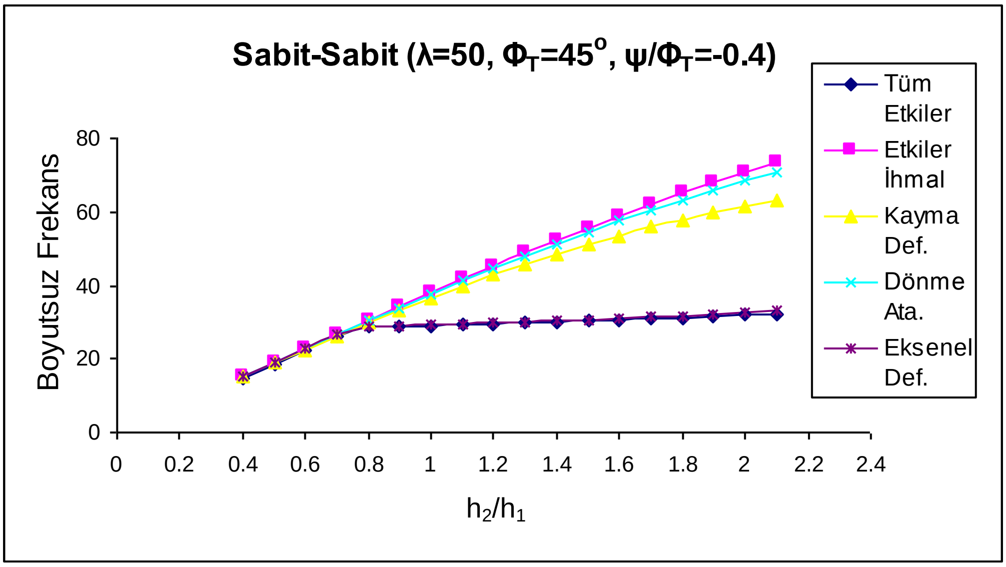


Şekil 5.13. Farklı mesnet şartlarında, $\lambda = 50$, $\phi_T = 90^o$, $\eta = 1.2$ özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekansları (A-A: ankastre-ankastre, S-A: sabit-ankastre, S-S: sabit-sabit, Sr-Sr: serbest-serbest, A-Sr: ankastre-serbest)

Ankastre-ankastre mesnet tipinde boyutsuz frekans değerlerinin diğer mesnet şartlarına göre daha yüksek çıktığı görülmektedir. Bu durum, ankastre-ankastre mesnet şartının en rijit hal olmasından kaynaklanmakta, onu sabit-ankastre, sabit-sabit, serbest-serbest ve ankastre-serbest mesnet şartları izlemektedir. Kütlenin en büyük ve en küçük değerleri $(\eta > 1)$ için yani kademenin en sol ve en sağ uç konumlarında, frekanslar arasında, ankastre-ankastre mesnet şartı için %7.24'lük bir fark oluşurken, bu fark ankastre-serbest'de %9.86'ya, sabit-sabit'de %15.20'ye, ankastre-sabit'de %20.38'e ve serbest-serbest'de %20.47'ye çıkmaktadır.

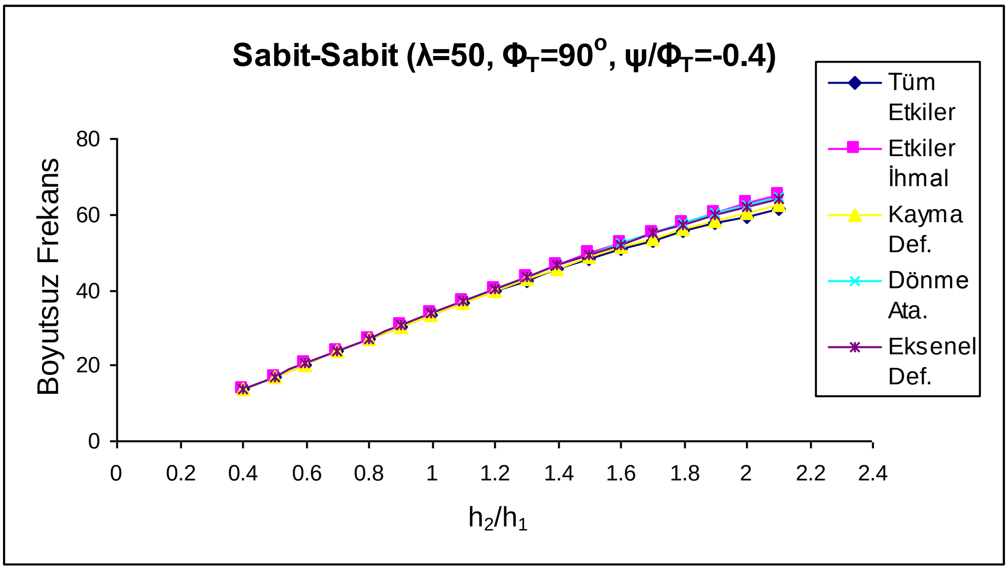
5.3. Tek Kademeli Değişken Kesitli Çember Eksenli Çubuklarda Boyutsuz Frekansın Kademenin Oranı ile Değişimi

Bu bölümde, kiriş açısı değiştirilerek hesaplanan boyutsuz frekans değerlerinin kademe oranına bağlı değişimi grafikler halinde sunulmaktadır. Grafiklerde yatay eksen kademe oranını gösterirken, düşey eksen boyutsuz frekans değerlerini vermektedir. Kabüllerin boyutsuz frekansa olan etkilerini de grafiklerde görmek mümkündür.

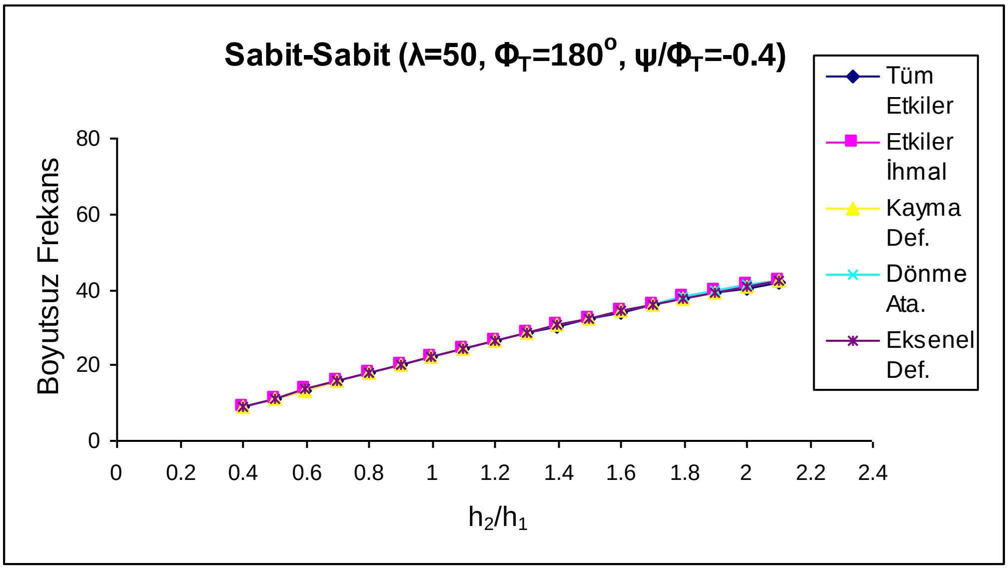


Şekil 5.14. Sabit-sabit mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 45^o$, ψ / ϕ_T =-0.4 özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.

Simetrik sınır şartlarına sahip olan Ankastre-ankastre, sabit-sabit ve serbest-serbest mesnetlemeleri benzer özellikler gösterdiğinden bu bölümdeki incelemeler sabit-sabit sınır şartı esas alınarak yapılacaktır.



Şekil 5.15. Sabit-Sabit mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 90^o$, ψ / ϕ_T =-0.4 özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.



Şekil 5.16. Sabit-Sabit mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 180^o$, ψ / ϕ_T =-0.4 özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.

Kademenin ψ / ϕ_T =-0.4 konumu yani eğrinin sol ucunda olması durumu incelenmiştir. Diğer kademe konumları için de benzer sonuçlar elde edilir. Kademe oranı arttıkça, sistemin kütlesi artmakta, frekans değerleri yükselmektedir. İlk grafikte, kademe oranının küçük değerleri için kabullerin frekans değerlerinin birbirine çok yakın olduğu, artan kademe oranı ile frekans değerleri arasındaki farkın da arttığı gözlenmektedir. Kademe oranının η=0.8 değerine kadar tüm kabullerde çubuğun mod şekli 1. mod şekli olarak ortaya çıkmakta iken, kademe oranının artmasıyla etkiler ihmal, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği kabullerinde çubuk 2. mod şeklinde titreşim gösterir. Küçük kiriş açılarında belirginleşen bu durum, kiriş açısının artması ile ortadan kalkmakta ve eğriler çakışmaktadır.

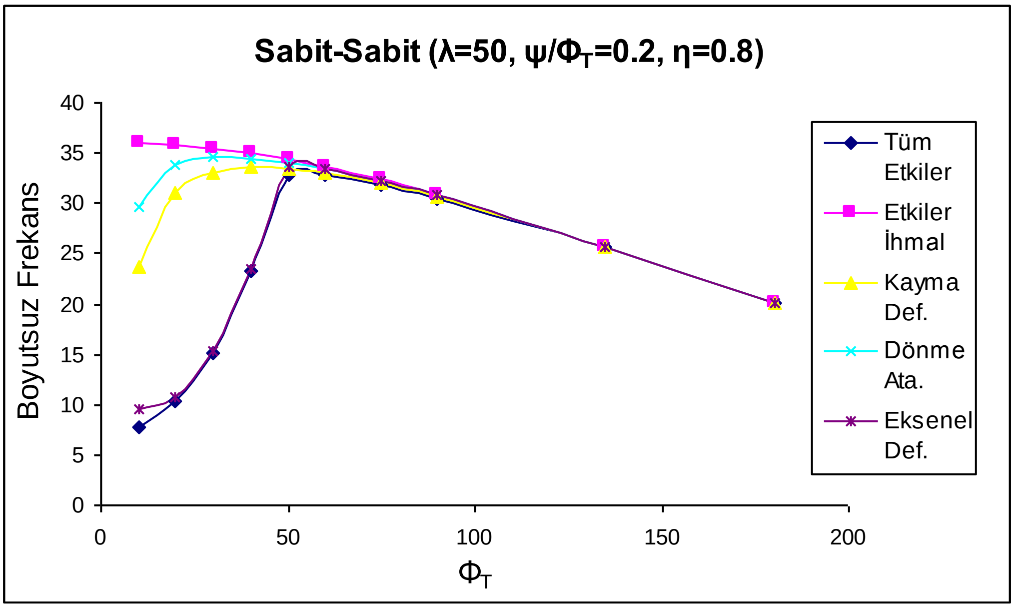
5.4. Tek Kademeli Değişken Kesitli Çember Eksenli Çubuklarda Boyutsuz Frekansın Kiriş Açısı ile Değişimi

Bu bölümde, boyutsuz frekans değerlerinin kiriş açısına bağlı değişimi grafikler halinde sunulmaktadır. Grafiklerde yatay eksen kiriş açısını gösterirken, düşey eksen boyutsuz frekans değerlerini vermektedir. Bu bölümdeki incelemeler de yine simetrik sınır şartlarından biri olan sabit-sabit sınır şartı esas alınarak yapılacaktır.

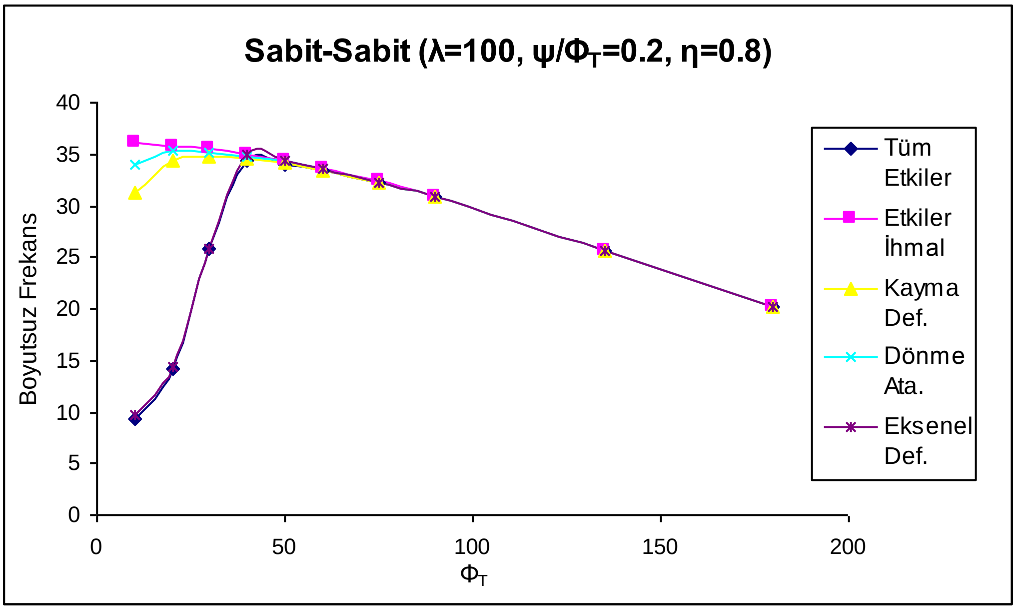
5.4.1. Farklı narinlik oranlarında kiriş açısının boyutsuz frekansa etkisi

Aşağıda verilen, sabit-sabit mesnet şartının 1. mod titreşimlerine ait iki grafikte, narinlik oranının 50 ve 100 olması durumlarındaki frekansların kiriş açısıyla değişimleri incelenmektedir.

Grafiklerdeki eğriler, küçük kiriş açılarında artan, büyük kiriş açılarında azalan bir karakter gösterirler. Sabit kademe oranı ve kademe konumunda, farklı kabullerden elde edilen frekans değerlerinin belli bir kiriş açısından sonra birbirlerine yaklaşmaya başladığı görülür. Narinlik oranının λ=50 değerinden λ=100 değerine yükselmesi kabullerin frekans değerleri arasındaki farkın ihmal edilebilecek kadar azaldığı bu kiriş açısının küçülmesine neden olmaktadır. Sabit-sabit tipindeki mesnette, λ=50 narinlik oranında, etkilerin ihmal edilmesi durumunda 10^{o}'de hata %358.87 iken, 60^{o}'de %2.72'ye düşer. λ=100 narinlik oranında ise aynı hata değerine düşüşün 40^{o}-30^{o} aralığında olduğu görülmektedir.



Şekil 5.17. Sabit-Sabit mesnetli, $\lambda = 50$, $\eta = 0.8$ ve ψ / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.



Şekil 5.18. Sabit-Sabit mesnetli, $\lambda = 100$, $\eta = 0.8$ ve ψ / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar

Grafiklerin tümünde eksenel deformasyon etkisinin baskın olduğu açıkça görülmektedir. Ancak grafiklerin ayrıntılı incelenmesinde görülmüştür ki, sabit narinlik ve kademe oranı için kiriş açılarının küçük değerlerinde baskın olan eksenel deformasyon eğrisi, kiriş açısının belli bir değerinde yerini kayma deformasyonu etkisine bırakmakta ve etkiler aralarındaki fark ihmal edilebilecek kadar azalmaktadır. Bu değer düşük narinlik oranları için yüksek iken, narinlik oranı arttıkça düşüş gösterir.

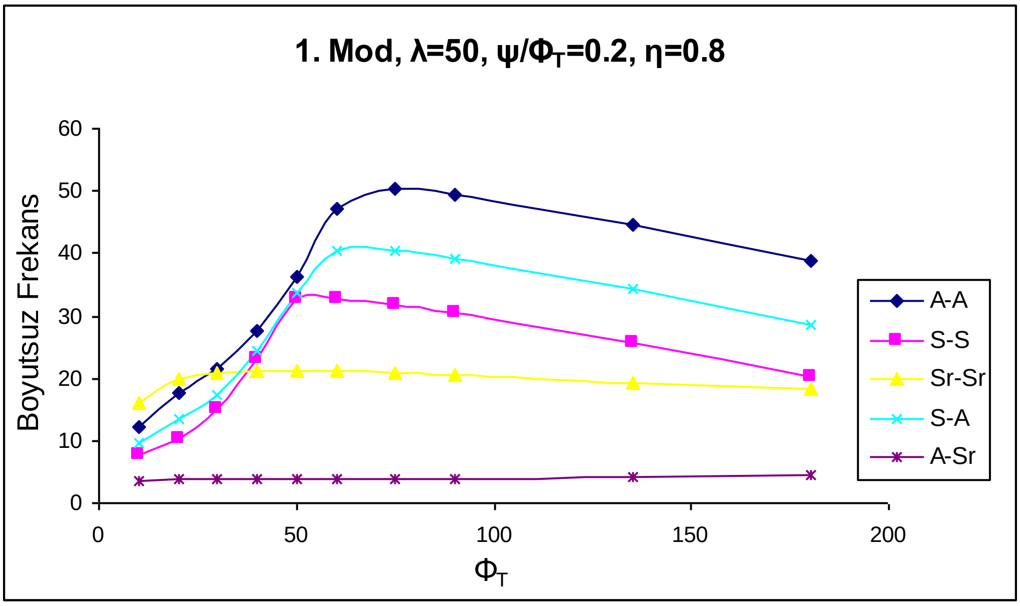
Yukarıdaki grafiklerde “mod geçişi” olarak adlandırılan durum açıkça gözükmektedir. Bazı modlarda, eksenel deformasyonun önemli olduğu mod şeklinden, eksenel deformasyonun az (önemsiz), eğilmenin baskın olduğu mod şekline ani bir geçiş gözlenir. Bu olay “Mod Geçişi” olarak tanımlanır. Beliren ani yükselişlerden sonra frekans değerlerindeki artış azalır hatta düşüşe geçer [15]. Yüksekliğin kiriş açıklığına oranla az olduğu sığ çubuklarda belirgin olarak ortaya çıkan bu durum, [17]’de detaylı olarak ele alınmaktadır.

[15]’de, eğri eksenli çubuğun düzlem içi titreşimlerinin düşük modlarında görülen mod geçişi üzerine çalışılmaktadır. Eğrilik yarıçapının ve mod şeklinin mod geçişindeki önemi vurgulanmakta, düşük ve yüksek modlardaki geçişler arasındaki benzer ve farklı durumlar incelenmektedir. Bir diğer çalışmada [16], çubuk titreşimi asimtotik yaklaşımla incelenerek, eğrilik yarıçapı ve sınır şartlarına bağlı olarak mod

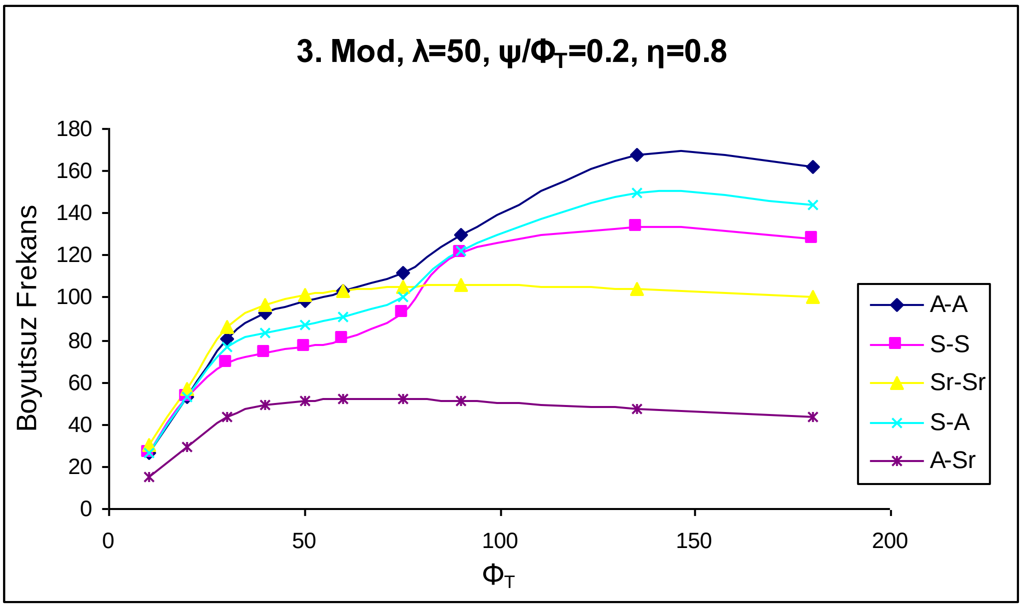
geçişi kavramı ele alınmaktadır. Frekansların asimtotik davranışları simetrik olmayan eğrilikler için de ele alınmakta, deneysel çalışmalarla karşılaştırmalar yapılmaktadır.

5.4.2. Farklı mesnetleme şartlarında kiriş açısının boyutsuz frekansa etkisi

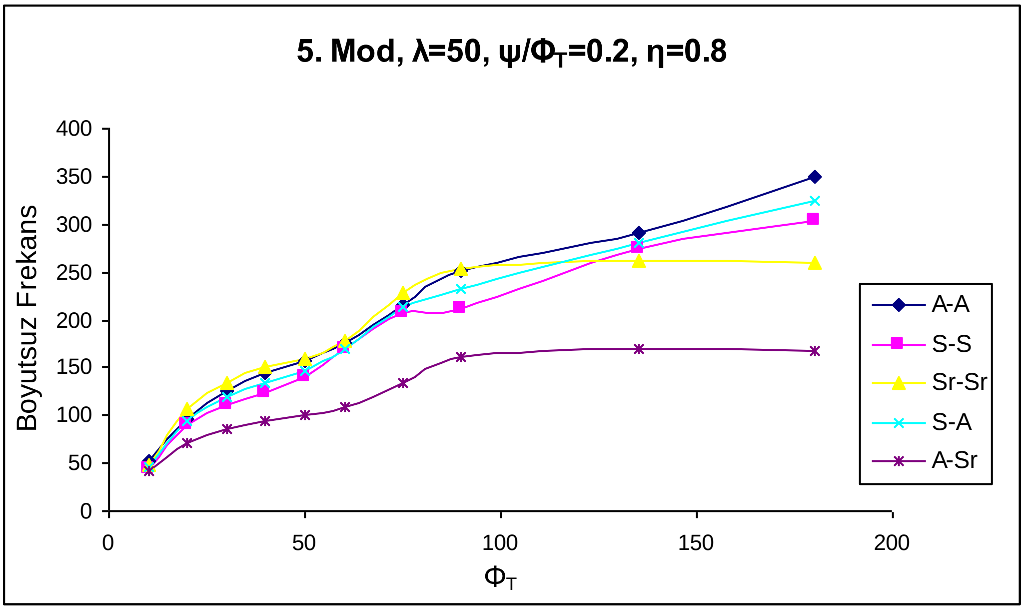
Aşağıdaki üç grafikte, λ=50 narinlik oranına, $\eta = 0.8$ kademe oranına ve ψ / ϕ_T =0.2 kademe konumuna sahip çubuğun beş farklı mesnetleme tipindeki serbest titreşimlerinin 1., 3. ve 5. moduna ait frekans-kiriş açısı eğrileri verilmiştir. Mesnetleme tipinin boyutsuz frekans üzerindeki etkisi incelenecektir.



Şekil 5.19. Farklı mesnet şartlarında, $\lambda = 50$, $\eta = 0.8$ ve ψ / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekansları (A-A: ankastre-ankastre, S-A: sabit-ankastre, S-S: sabit-sabit, Sr-Sr: serbest-serbest, A-Sr: ankastre-serbest).



Şekil 5.20. Farklı mesnet şartlarında, $\lambda = 50$,$\eta = 0.8$ ve ψ / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 3. moduna ait boyutsuz frekansları (A-A: ankastre-ankastre, S-A: sabit-ankastre, S-S: sabit-sabit, Sr-Sr: serbest-serbest, A-Sr: ankastre-serbest).



Şekil 5.21. Farklı mesnet şartlarında, $\lambda = 50$,$\eta = 0.8$ ve ψ / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip tek kademeli çember eksenli çubuğun 5. moduna ait boyutsuz frekansları (A-A: ankastre-ankastre, S-A: sabit-ankastre, S-S: sabit-sabit, Sr-Sr: serbest-serbest, A-Sr: ankastre-serbest).

Yapılan hesaplar sonunda elde edilen en büyük boyutsuz frekans değeri ankastre-ankastre kirişe ait değerdir. 1. mod titreşimlerinde, ankastre-ankastre, sabit-sabit, serbest-serbest ve sabit-ankastre mesnet şartlarına ait olan eğriler belirli bir kiriş açısından sonra azalışa geçmektedirler. Her mesnet şartı için farlı olan bu kiriş açısı değeri ankastre-ankastre için 75^o, sabit-sabit için 50^o, serbest-serbest için 50^o, sabit-ankastre için 75^o'dir. Ankastre-serbest'de ise sürekli bir artış vardır. 3. mod titreşimlerinde tüm mesnet koşulları için frekansın düşmeye başladığı durum kiriş açısının 135^o olması durumudur. 5. mod frekansleri incelendiğinde, frekanslarda sürekli bir artış olduğu görülür.

Farklı modlara ait yukarıda verilen grafiklerdeki eğriler incelendiğinde, eğrilerin tümünün benzer karakterde olduğu görülmektedir. Özellikle 3. moda ait frekansların verildiği grafikte gözeçarpan bu karakterde eğriler belli kiriş açılarında ani yükselişler göstermektedirler. Mod geçişinin olduğu kiriş açısının bu değerinden sonra frekanslardaki artış azalmakta ve düşüş başlamaktadır.

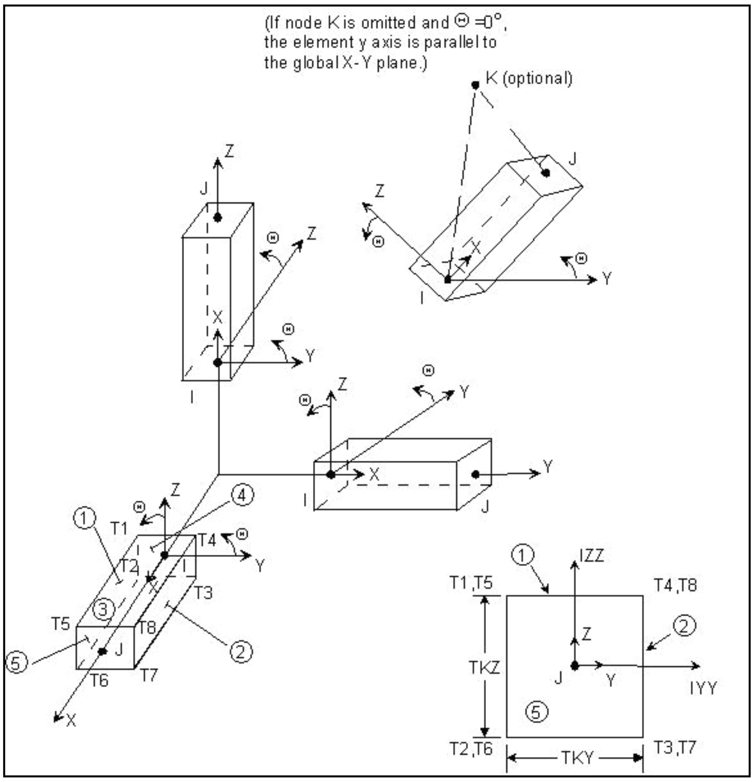
5.5. Sonlu Eleman Çözümleri

Günümüzde, bilgisayar kullanımının yaygınlaşması ve bilgisayarların kapasitelerinin artmasıyla birlikte, mühendislik problemlerinin matematiksel çözümünde kullanılan sayısal hesap yöntemlerinin sayısı da artmıştır. Bu yöntemlerden biri de sonlu eleman yöntemidir. Mühendisliğin hemen hemen tüm alanlarında kullanılabilen bu yöntem, karmaşık ve çözümü zor fiziksel problemleri kabul edilebilir bir yaklaşıklıkla çözmektedir.

Bu bölümde, çember eksenli değişken kesitli çubukların düzlem içindeki serbest titreşimlerinin, sonlu eleman paaket programlarından biri olan ANSYS programı kullanılarak çözülmesiyle elde edilen sonuçlar verilmektedir. Sonuçlar, MATLAB programının sonuçlarıyla karşılaştırılmakta ve hatalar hesaplanmaktadır.

Eğri eksenli çubuğun, ANSYS programı ile gerçeğe en uygun ve en doğru şekilde modellenebilmesi için mevcut eleman tipleri arasında seçim yapılmıştır. Bu seçim yapılırken, parçanın geometrisi, gerçek sabit değerleri, malzeme yapısı ve davranışının, doğal frekansları teorik olarak hesaplanan çubukla eş olmasına dikkat edilmiştir.

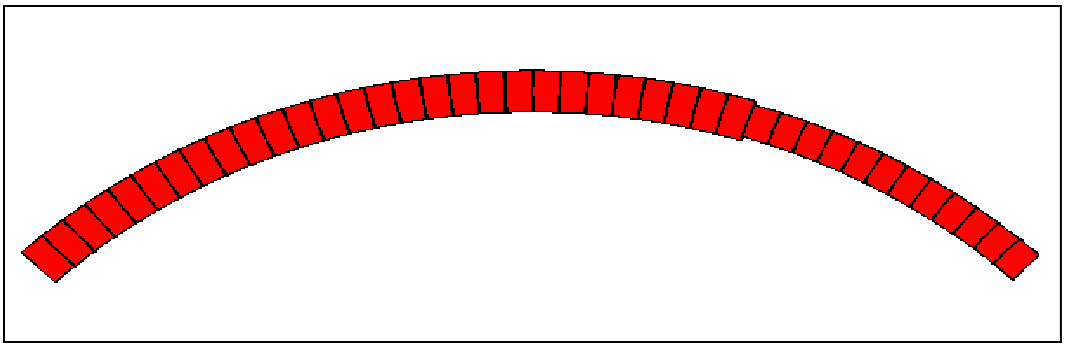
Çubuk, üç boyutlu elastik kiriş eleman (*BEAM4*) kullanılarak modellenmiştir. *BEAM4* elemanı, çekme, basma, burulma ve eğilme özelliklerine sahip tek eksenli bir elemandır. Her bir düğüm noktasında altı adet serbestlik derecesi vardır. Bu serbestlik dereceleri, düğüm noktasının x, y ve z ekseni doğrultularındaki yer değiştirmeleri ile yine bu eksenler etrafındaki dönmeleri olarak karşımıza çıkmaktadır.



Şekil 5.22. *BEAM4* 3-Boyutlu Elastik Çubuk Eleman

Bu eleman için düğüm noktaları, koordinat sistemleri ve geometrisi Şekil 5.22'de gösterilmektedir. *BEAM4* eleman en az, iki veya üç düğüm noktası, iki adet alan eylemsizlik momenti (I_{zz} ve I_{yy}), iki kesit boyutu, x-eksenindeki dönme açısı, bir adet burulma eylemsizlik momenti (I_{xx}) ve malzeme özellikleri ile tanımlanır. I_{xx} burulma eylemsizlik momenti belirli değilse ya da sayı girilmemişse, bu durumda burulma eylemsizlik momentinin polar eylemsizlik momentine eşit olduğu kabul edilir ($I_{zz}+I_{yy}=I_{xx}$). Elemanın burulma mukavemeti, I_{xx}'in azalması ile azalır. Ayrıca birim kütle de giriş bilgilerine eklenebilir [18].

$\phi_T = 90^o$ kiriş açısına sahip tek kademeli değişken kesitli çubuklar, beş farklı mesnet şartı için *BEAM4* eleman ile modellenip modal analizleri yapılmıştır Sabit mesnet, düzlem içinde serbestçe dönebilirken, düzlem dışında ankanstre mesnet gibi davranacak şekilde modellenmiştir. Kademe oranı $\eta = h_2/h_1 = 0.8$ ve narinlik oranı λ=50 olacak şekilde geometrik boyutlar hesaplanmış ve hesaplara dahil edilmiştir.

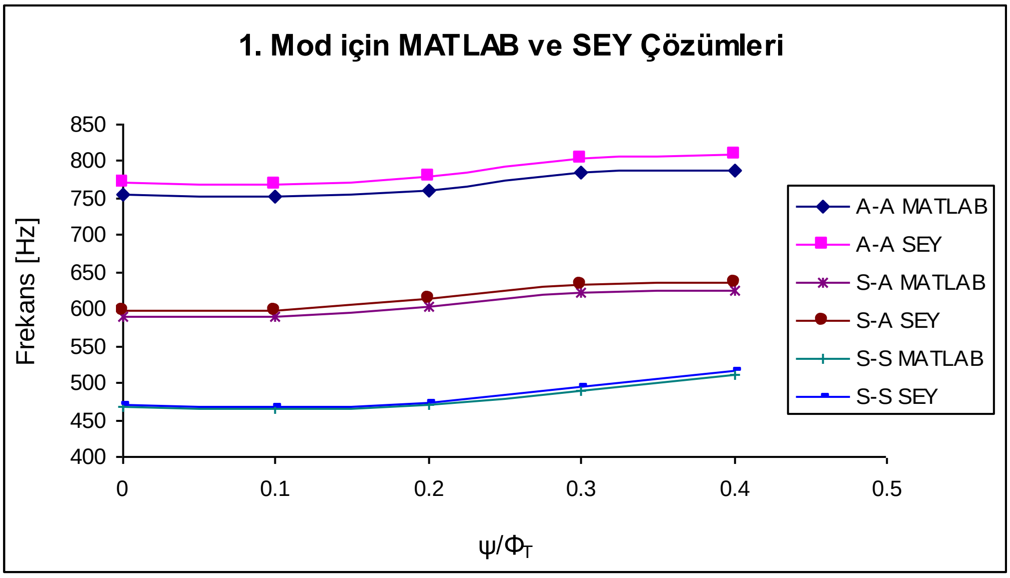


Şekil 5.23. ψ / ϕ_T =0.2 kademe konumuna ait sonlu eleman modeli

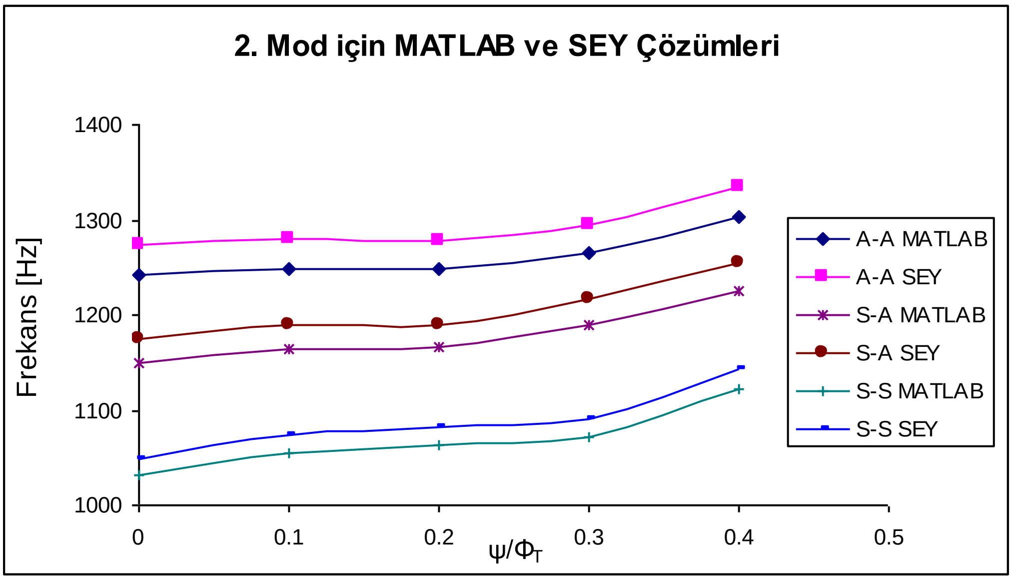
Aşağıdaki grafiklerde, MATLAB'den elde edilen kesin çözümler ve ANSYS'den elde edilen çözümler birarada verilmektedir. Grafiklerin herbiri farklı moda ait olup, ankastre-ankastre, sabit-ankastre ve sabit-sabit sınır şartları için frekans değerlerinin değişimini gösterir. Diğer sınır şartlarında da benzer davranışlar elde edilmektedir. Tüm sınır şartlarına ait kesin çözüm, sonlu eleman çözümleri ve aradaki yüzde hata EK A'da tablolar halinde sunulmaktadır. MATLAB sonuçları, düzlem içindeki titreşimlerin diferansiyel denklemlerinin kesin çözümü olduğundan, sonlu eleman sonuçları da elde edilen düzlem dışına ait frekans değerleri tablolarda yer almayacaktır.

Grafikler, tek kademeli çember eksenli çubuğun ilk üç modu için elde edilen sonuçları göstermektedirler. 4. ve 5. modlarda da benzer eğriler elde edildiğinden burada verilmeyecektir.

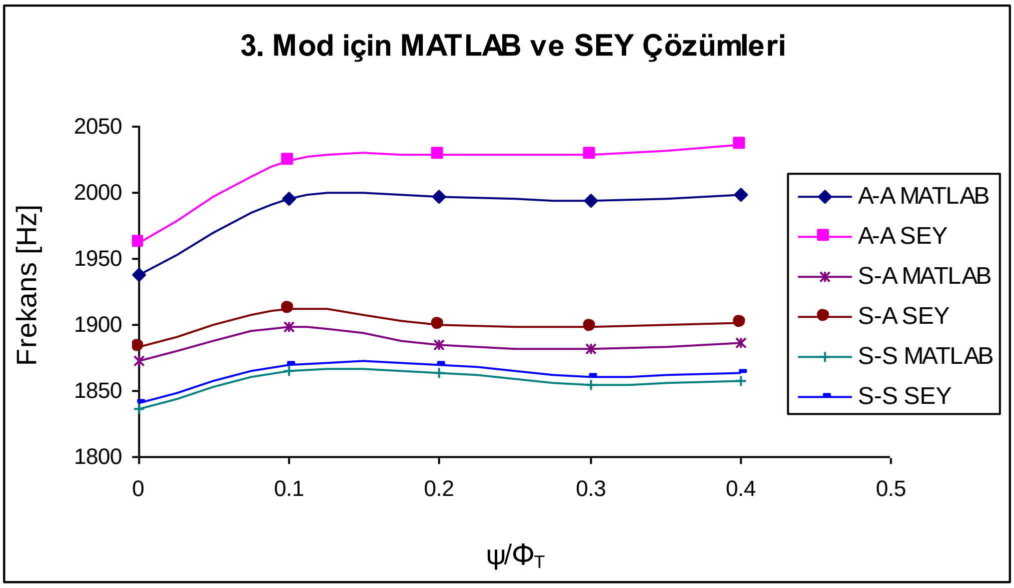
Grafikler incelendiğide, SEY (Sonlu eleman yöntemi) çözümlerinin, MATLAB çözümlerinden daima daha yüksek değerlere sahip olduğu görülür. Bu durum *BEAM4* elemanın kayma deformasyonunu içermemesi böylece sonlu eleman modelinin gerçek modelden daha rijit davranmasından kaynaklanmaktadır. Kesin çözüm sonuçlarında, yalnızca kayma deformasyonunun ihmal edilmesi durumundaki frekanslar sonlu eleman sonuçlarıyla tamamen aynı değerleri vermektedir.



Şekil 5.24. Tek kademeli çember eksenli çubuğa ait 1. mod frekanslarının MATLAB ve SEY çözümlerinin karşılaştırılması (A-A: ankastre-ankastre, S-A: sabit-ankastre, S-S: sabit-sabit).



Şekil 5.25. Tek kademeli çember eksenli çubuğa ait 2. mod frekanslarının MATLAB ve SEY çözümlerinin karşılaştırılması (A-A: ankastre-ankastre, S-A: sabit-ankastre, S-S: sabit-sabit).



Şekil 5.26. Tek kademeli çember eksenli çubuğa ait 3. mod frekanslarının MATLAB ve SEY çözümlerinin karşılaştırılması (A-A: ankastre-ankastre, S-A: sabit-ankastre, S-S: sabit-sabit).

Ankastre-ankastre mesnet şartına ait frekanslar, sınır şartının rijitliği nedeniyle yüksek değerlerde bulunurlar. Bu mesnet şartını, rijitliğin azalması sırasıyla sabit-ankastre ve sabit-sabit sınır şartları izlemektedir.

Yaklaşık çözüm ve kesin çözüm sonuçlarını ifade eden eğriler birbirlerine paralel kalmakla birlikte, iki çözüm arasındaki hata değerleri %0.13 ile %7.04 arasında değişmektedir. 1. ve 2. mod için kesin çözüm ve sonlu eleman çözümü arasındaki en yüksek hata değerine kademenin tüm konumları için ankastre-ankastre mesnette rastlanır. 3. modda serbest-serbest sınır koşulu diğer sınır koşullarına göre daha yüksek hata değerlerine sahiptir. 4. mod frekanslarında yine ankastre-ankastre mesnet şartı yüksek hata değerleri içerirken, 5. mod frekanslarında kademenin ankastre uca yakın olan konumlarında sabit-ankastre mesnet şartı için elde edilen hata değerleri yüksek olmakta, orta konuma yaklaştıkça ankastre-ankastre mesnetten elde edilen hatalar artmaktadır.

Sabit-ankastre, sabit-sabit ve serbest-serbest sınır koşullarında en yüksek hata oranlarına 5. mod frekanslarında rastlanırken ankastre-serbest'de 4. modda hatalar en yüksek değerlerine ulaşır.

6. İKİ KADEMELİ DEĞİŞKEN KESİTLİ ÇEMBER EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ SERBEST TİTREŞİMLERİ

6.1. Problemin Tanıtılması

İki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubuk, ikisi kesit özellikleri bakımından birbirinin eşi olan sabit kesitli üç bölgeden oluşmaktadır. Çubuk, tek kademelide olduğu gibi dikdörtgen kesite sahip olup, bölgeler şekil (4.2)'de gösterildiği gibi 1 ve 2 indisleriyle tanımlanmaktadır. h_1 birinci ve üçüncü bölgelerin, h_2 ikinci bölgenin kesit yüksekliğidir, aynı şekilde b_1 birinci ve üçüncü bölgelerin, b_2 ise ikinci bölgenin kesit genişlikleridir. Burada verilen tüm örneklerde b_1=b_2 olarak alınmaktadır. A_1 ve A_2 bölgelerin kesit alanlarını, I_1 ve I_2 ise alan eylemsizlik momentlerini gösteren büyüklüklerdir ve

$$\begin{aligned} A_1 &= b_1 h_1 & I_1 &= \frac{b_1 h_1^{\,3}}{12} \\ A_2 &= b_2 h_2 & I_2 &= \frac{b_2 h_2^{\,3}}{12} \\ A_3 &= A_1 & I_3 &= I_1 \end{aligned} \tag{6.1}$$

olarak tanımlanırlar.

Boyutsuz frekans değerleri, Bölüm 5'te ayrıntıları verilen, tüm etkiler, etkiler ihmal, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği olmak üzere beş farklı kabül kullanılarak incelenecektir. Aşağıda, frekans değerleri hesaplanırken değişken olarak alınan büyüklükler sunulmaktadır.

Mesnet Şartları:

Sistem, tek kademeli çubukta olduğu gibi, ankastre-ankastre, sabit -ankastre, sabit-sabit, ankastre-serbest ve serbest-serbest olmak üzere beş farklı mesnetleme durumu ele alınarak incelenmektedir.

Kademe Oranı:

İkinci bölgenin kesit yüksekliği ile birinci ve üçüncü bölgelerin kesit yükseklikleri arasındaki oran η ile gösterilmekte ve kademe oranı olarak adlandırılmaktadır. Kademe oranı,

$$\eta = \frac{h_2}{h_1} \tag{6.2}$$

şeklindedir. İki kademeli çember eksenli çubuk 9 farklı kademe oranı ile incelenmiştir. Bu değerler;

$\eta =$ 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2

olarak değişmektedir.

Kiriş Açıları:

ϕ_T kiriş açısı, ϕ_A ve ϕ_B çubuğun A ve B uç noktalarının koordinatlarını belirten açı değerleridir. Aynı şekilde ψ_T ikinci bölgeyi oluşturan kademeli bölgenin açıklığı, ψ_1 ve ψ_2 kedemenin sınır noktalarındaki açı değerleri olmak üzere,

$$\phi_T = \phi_A + \phi_B \qquad \text{ve} \qquad \psi_T = \psi_1 + \psi_2 \tag{6.3}$$

olarak tanımlanır. Çubuk, 5 farklı kiriş açısı için incelenmiştir.

$\phi_T =$ 30°, 60°, 90°, 135°, 180°

Kademe Açıklığının Kiriş Açıklığına Oranı:

Kademe açıklığının, kiriş açıklığına oranı, $\frac{\psi_T}{\phi_T}$ olarak tanımlanır.

$\xi = \frac{\psi_T}{\phi_T} =$ 0.2, 0.4 ve 0.6

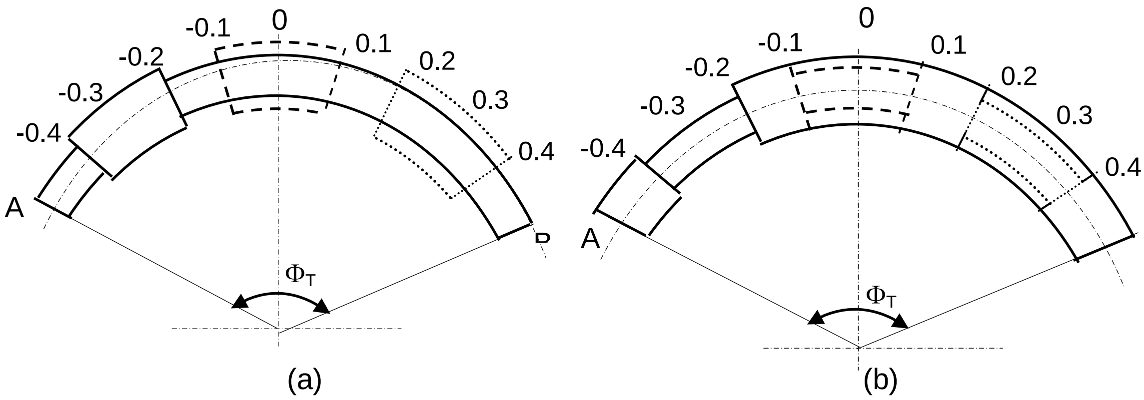
olmak üzere üç farklı değer için hesap yapılmıştır.

Kademenin Konumu:

Sabit $\frac{\psi_T}{\phi_T}$ oranı için, kademenin konumunu belirleyen faktör $\frac{\psi_1}{\phi_T}$ oranı olarak seçilmiştir. Simetrik sınır şartına sahip olan sistemde,

$\frac{\psi_1}{\phi_T}$ = -0.4, -0.3, -0.2 ve -0.1

alınarak hesap yapılırken, simetrik olmayan sınır şartlarında $\frac{\psi_1}{\phi_T}$ = 0, 0.1 ve 0.2 değerleri de hesaplara dahil edilir.



Şekil 6.1. (a) $\eta = h_2 / h_1$ >1 için kademenin ψ_1 / ϕ_T ’a bağlı farklı konumları

(b) $\eta = h_2 / h_1$ <1 için kademenin ψ_1 / ϕ_T ’a bağlı farklı konumları

Narinlik Oranı:

Üç farklı narinlik oranında incelemeler yapılmaktadır. Narinlik oranı,

$$\lambda = \frac{R}{i} = \frac{R}{\sqrt{\frac{I_{b1}}{A_1}}} \qquad (6.4)$$

olarak tanımlanır. λ’nın 50, 100 ve 150 olması durumları incelenmiştir.

Beş farklı mesnet tipinde, ilk beş moda ait frekanslar, yukarıda belirtilen kademe oranı, kiriş açısı, kiriş açıklığının kademe açıklığına oranı ve narinlik oranı değişkenleri ile farklı kademe konumları için incelenmiş ve elde edilen sonuçlar farklı kabüller için grafikler halinde sunulmuştur.

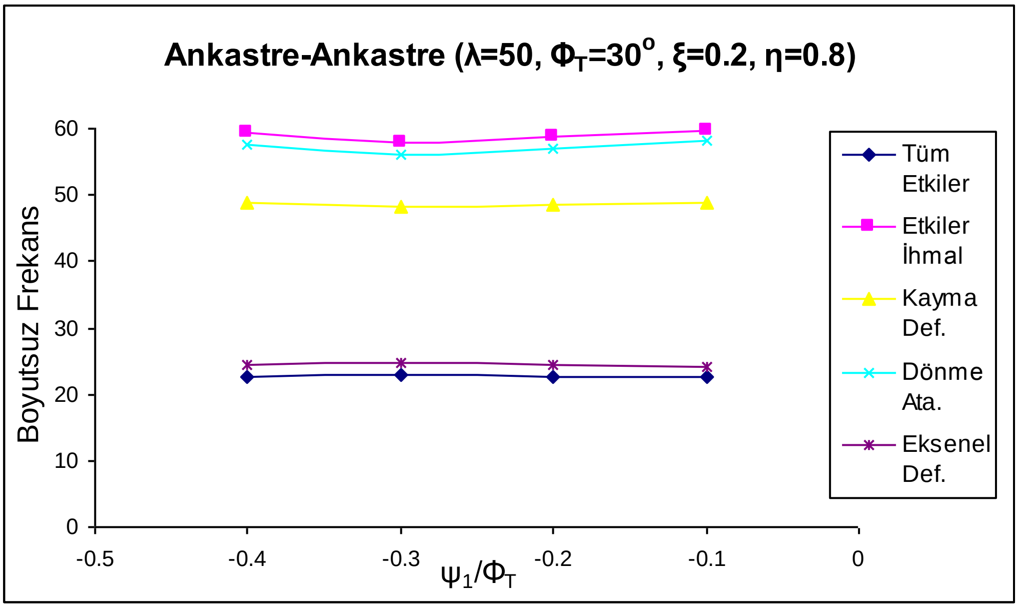
6.2. İki Kademeli Değişken Kesitli Çember Eksenli Çubuklarda Boyutsuz Frekansın Kademenin Konumu ile Değişimi

Aşağıda iki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubuğa ait serbest titreşim frekanslarının kademenin konumu ile değişimini veren grafikler sunulmaktadır. Grafiklerde yatay eksen kademe konumunu göstermekte olup düşey eksen boyutsuz frekans değerlerini verir. Kademe konumu, ψ_1 / ϕ_T ile ifade edilmektedir. Ankastre-ankastre, serbest-serbest ve sabit-sabit gibi simetrik sınır koşullarına sahip sistemde kademenin sol uca yakın olan konumundan, orta konumuna kadar olan hareketi incelenecektir. Simetrik olmayan sistemlerde ise sağ uca yakın olan konuma kadar inceleme devam edecektir.

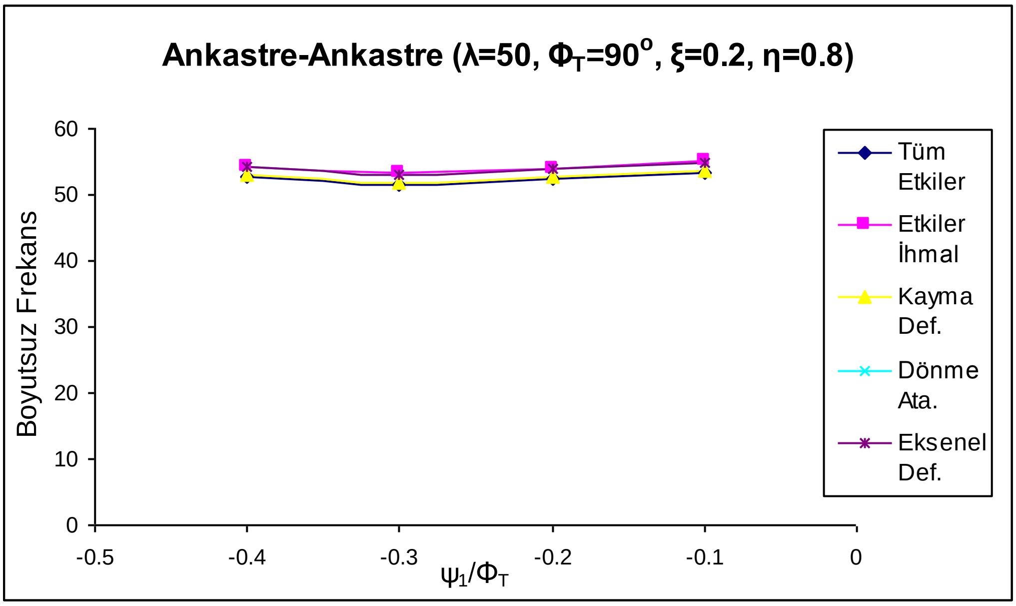
6.2.1. Farklı kiriş açılarında kademe konumunun boyutsuz frekansa etkisi

Aşağıda, ankastre-ankastre olarak mesnetlenmiş, $\lambda = 50$ narinlik oranına, ψ_T / ϕ_T =0.2 kademe açıklıklarıoranına ve $\eta = 0.8$ kademe oranına sahip iki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubuğun farklı kiriş açıları için, birinci moduna ait boyutsuz frekansların kademenin konumuna bağlı değişimlerini gösteren grafikler verilmektedir. Grafiklerdeki eğriler beş ayrı kabul için elde edilen sonuçları göstermektedir.

İki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubuklara ait grafiklerin incelenmesi sonucunda, kabullerin, boyutsuz frekansa olan etkisinin tek kademeli çubuktakine oldukça benzer olduğu görülmektedir. Küçük kiriş açılarında baskın olan eksenel deformasyon etkisi, kiriş açısının belli bir değerinde yerini kayma deformasyonuna bırakmakta ve kiriş açısının artmasıyla etkiler önemini yitirmektedir. Kayma deformasyonu etkisinin öne çıktığı ve kabüllerin sonuçlarının bibirine yaklaştığı kiriş açısının bu değeri, mesnetleme şartı, mod sayısı, narinlik ve kademe oranına göre değişmekdir. Açı değeri, narinliğin artmasıyla küçülmekte iken mod sayısının artmasıyla yükselmektedir.



Şekil 6.2. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 30^0$, ψ_T / ϕ_T =0.2 ve $\eta = 0.8$ özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.

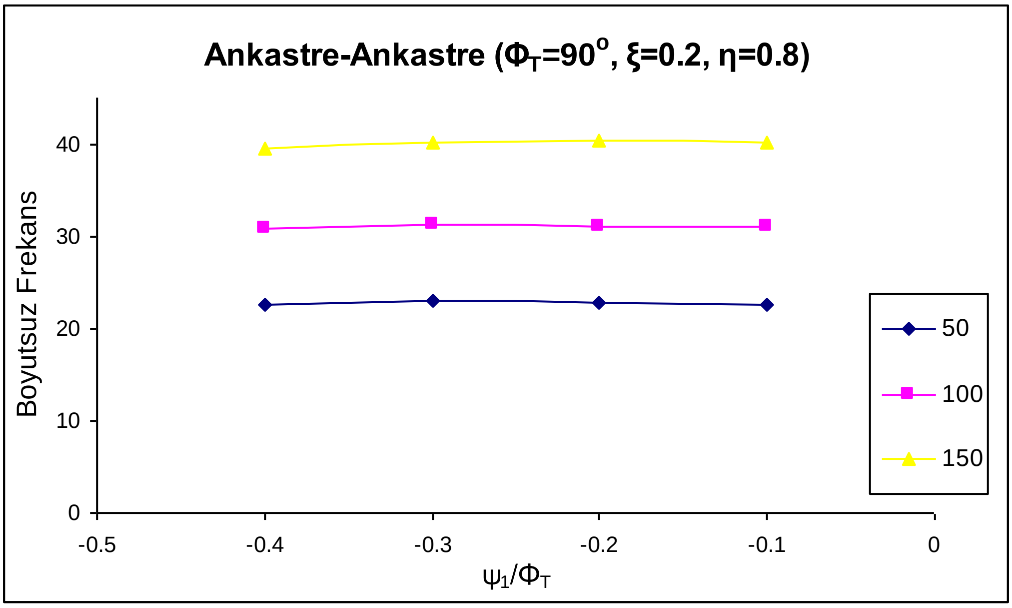


Şekil 6.3. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 90^0$, ψ_T / ϕ_T =0.2 ve $\eta = 0.8$ özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.

Şekil 6.2 ve 6.3'te, 30^{o}'lik kiriş açısına sahip çubukta baskın olan eksenel deformasyon etkisinin, kiriş açısının 90^{o}'ye yakın değerlerinde yerini kayma deformasyonuna bıraktığı görülmektedir. Kiriş açısının artmasıyla etkiler önemini yitirmektedir.

6.2.2. Farklı narinlik oranlarında kademe konumunun boyutsuz frekansa etkisi

Tüm diğer değişkenler sabit tutulup, narinlik oranının boyutsuz frekansa olan etkisi incelendiğinde aşağıdaki grafik elde edilir. Grafikten de açıkca görüldüğü gibi, narinliğin artmasıyla frekans değerlerinde bir artış meydana gelmektedir. Sabit narinlik oranı değerleri için kademe konumunun değişiminin frekans değerleri üzerinde fazla etkisi olmamaktadır. Narinlik değiştikçe eğrilerin bu karakterlerini koruduğu görülür.

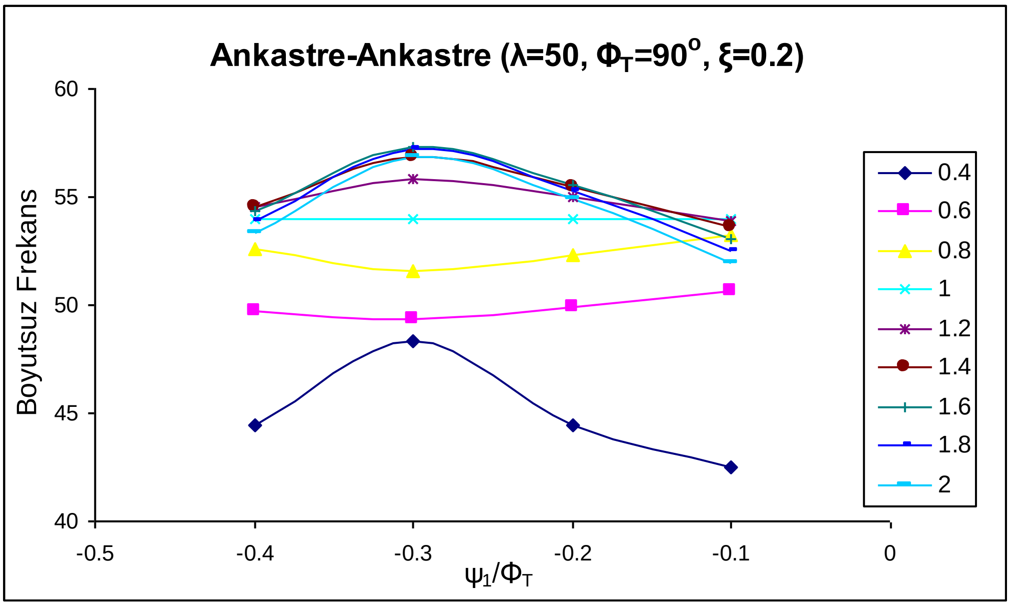


Şekil 6.4. Ankastre-ankastre mesnetli, $\phi_T = 30^0$, ψ_T / ϕ_T =0.2 ve $\eta = 0.8$ özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.

6.2.3. Farklı kademe açıklıkları oranlarında kademe konumunun boyutsuz frekansa etkisi

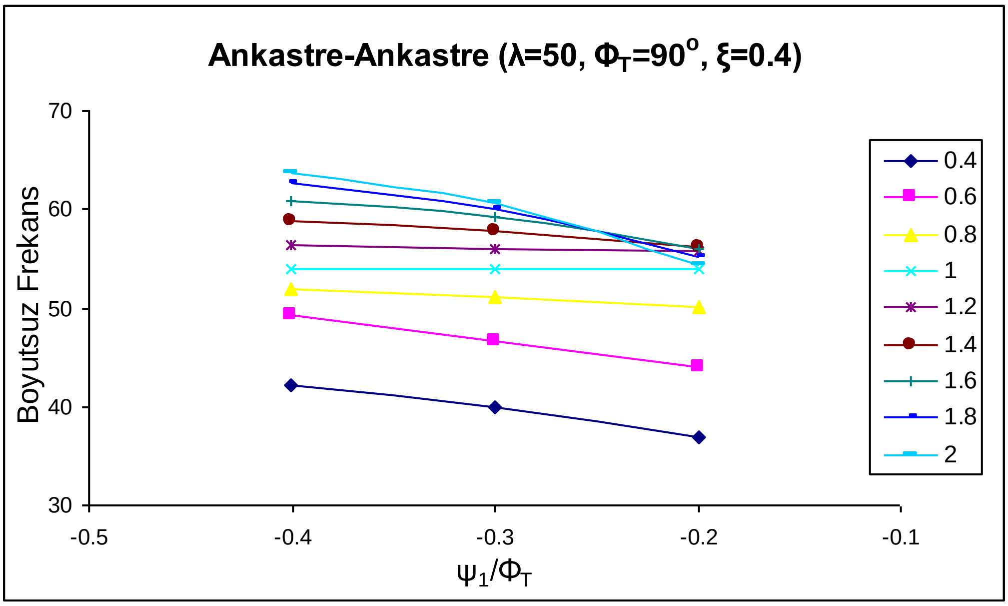
Aşağıda farklı kademe oranlarına sahip çember eksenli çubukların boyutsuz frekanslarının kademenin konumuna bağlı değişimine ait üç grafik verilmektedir. Her grafik, kademe açıklığının kiriş açıklığına oranının (ξ) farklı değerleri için çizilmiştir.

Aşağıda sunulan Şekil 6.5'de, $\eta = 0.4$ kademe oranına sahip çember eksenli çubukta en büyük frekans değeri kademenin ψ_1/ϕ_T =-0.3 konumunda ortaya çıktığı görülmektedir. Kademe oranının η =0.6 ve 0.8 olması durumlarında en büyük frekanslar ψ_1/ϕ_T =-0.1 olan orta konumda elde edilirken, η >1 değerleri için yine ψ_1/ϕ_T =-0.3'de elde edilir. Grafik üzerindeki, η =0.4 eğrisinden η =0.6'ya geçişte ve η =1 sınır değerinde eğriliklerin yönü değişmektedir.

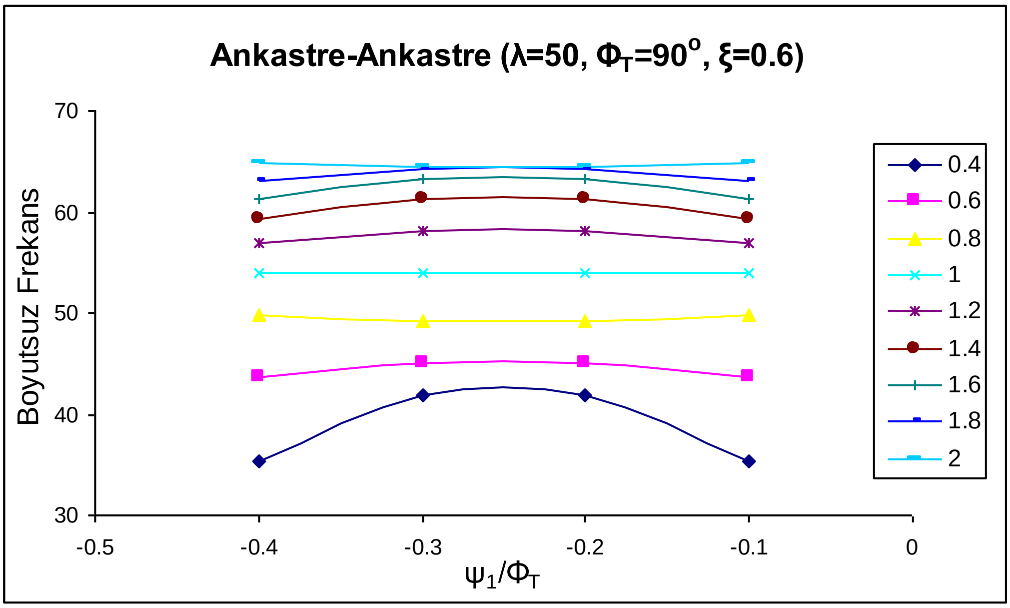


Şekil 6.5. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 90^0$ ve ψ_T/ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.

Şekil 6.6'da, açıklık oranının ψ_T/ϕ_T =0.4 olması durumu incelenmektedir. Sistemde en yüksek frekans değerleri, kademenin her oranı için sol uca en yakın konum olan ψ_1/ϕ_T =-0.4'de, en düşük değerleri ise yine tüm kademe oranları için kademenin ortada bulunduğu konum olan ψ_1/ϕ_T =-0.2 değerinde ortaya çıkmaktadır. η=1.4 kademe oranından itibaren, artan kademe oranlarında kademenin orta konumu için frekans değerleri düşer.

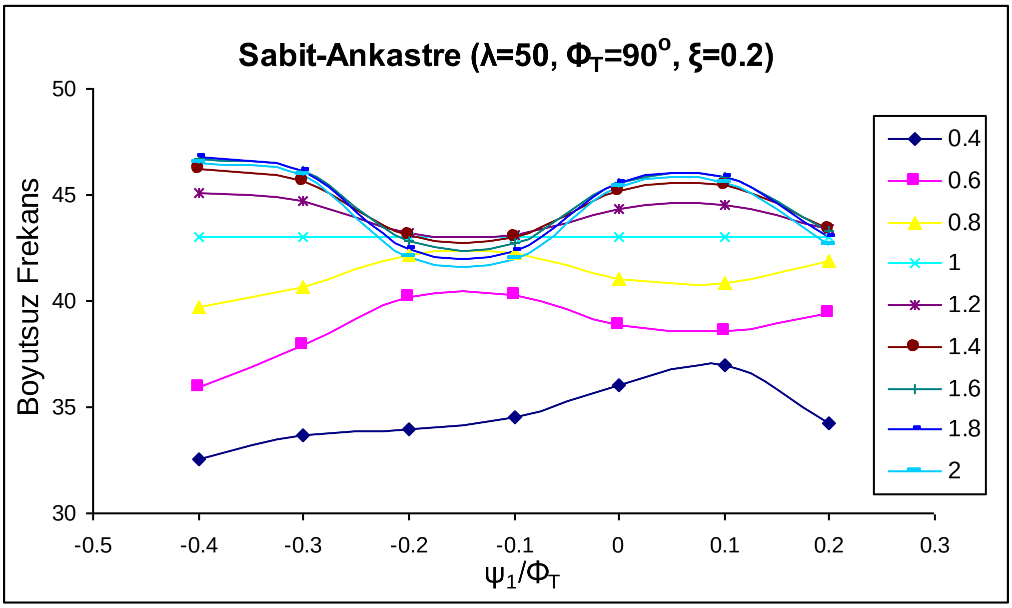


Şekil 6.6. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 90^0$ ve ψ_T / ϕ_T =0.4 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar



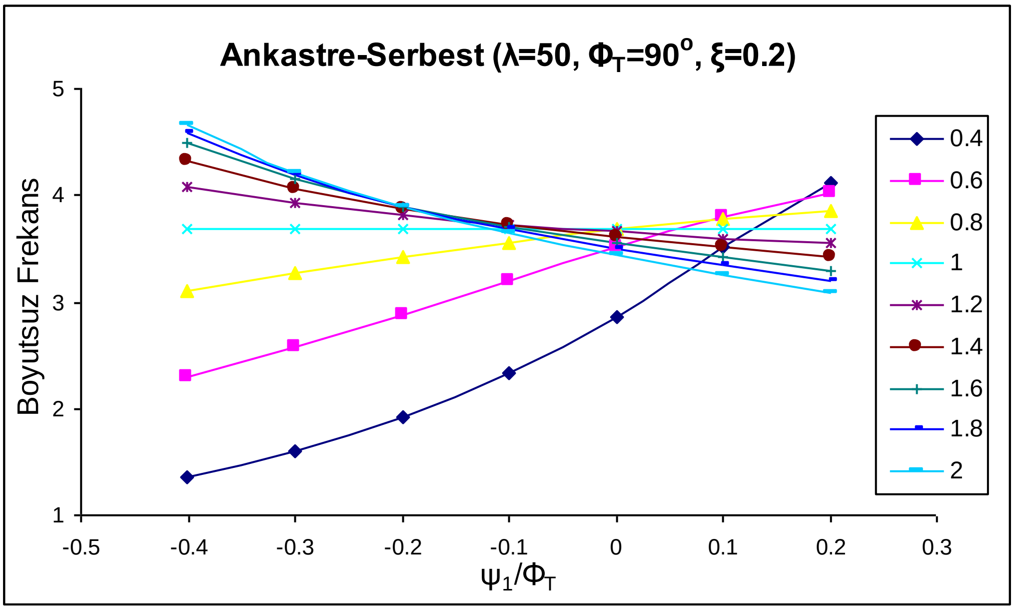
Şekil 6.7. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 90^0$ ve ψ_T / ϕ_T =0.6 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.

Açıklık oranının artmasıyla kademenin bulunabileceği konum sayısı azalmakta, ξ=0.6 oranı için kademe sadece iki konumda bulunabilmektedir. Ankastre-ankastre sisteme ait olan yukarıdaki grafikte mesnetleme simetrik olmasına rağmen eğrilerin daha gerçekci gösterilebilmesi için kademenin tüm konumları grafiğe dahil edilmiştir. Boyutsuz frekansın en büyük değerine ulaştığı konum h_2/h_1'nin 0.8, 1.2 ve 2 değerleri için ψ_1/ϕ_T = -0.4 konumuyken diğer kademe oranlarında bu konum, orta konumu ifade eden ψ_1/ϕ_T = -0.3 konumudur.



Şekil 6.8. Sabit-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 90^0$ ve ψ_T/ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.

Yukarıda, simetrik olmayan sınır şartlarından biri olan, sabit-ankastre sınır şartına ait boyutsuz frekans değişimlerini veren bir grafik sunulmaktadır. Kademe oranının η=0.4 değeri için eğri karakteri diğerlerinden farklıdır. Frekans değerleri, kademe ankastre mesnete yaklaştıkça artmakta, ψ_1/ϕ_T = 0.1 konumunda maksimuma ulaşmakta ve ankastre mesnete en yakın olan konumda tekrar azalış göstermektedir. Kademe oranının η=0.6 ve 0.8 değerleri için, kademenin sabit mesnete yakın olan konumlarında düşük olan frekans değerleri, orta konuma yaklaştıkça artmakta ve ankastre mesnete yakın olan konumlarda tekrar düşüşe geçmektedir. Kademe oranının 1'den büyük değerlerinde ise tam tersi olarak sabit mesnete yakın olan konumlarda yüksek değerlere ulaşan boyutsuz frekanslar, orta konuma yaklaştıkça azalmakta ve ankastre mesnete doğru tekrar yükselişe geçmektedir. Konumun, ψ_1 / ϕ_T = -0.2 ile ψ_1 / ϕ_T = -0.1 arasında en düşük değerler ortaya çıkarken, ψ_1 / ϕ_T = 0 ile ψ_1 / ϕ_T = 0.1 arasında yüksek değerlere rastlanır.

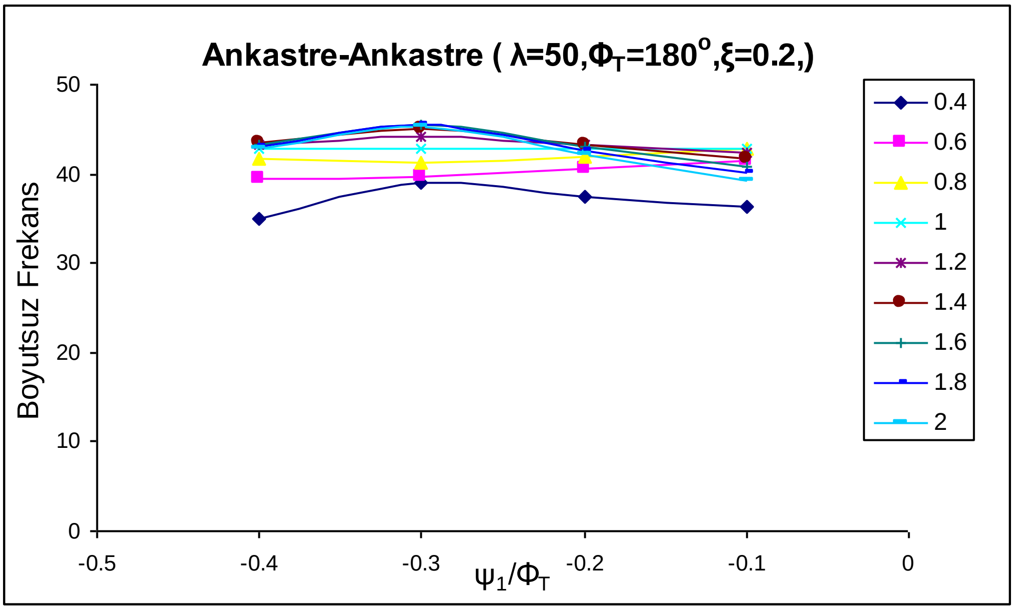


Şekil 6.9. Ankastre-serbest mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 90^0$ ve ψ_T / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar

Yukarıda, ankastre-serbest sınır şartına ait boyutsuz frekans değişimlerini veren bir grafik sunulmaktadır. Kademe oranının 1'den küçük değerleri için, kademenin ankastre mesnete yakın olan konumlarında düşük olan frekans değerleri serbest uca yaklaştıkça artmaktadır. Kademe oranının 1'den büyük değerlerinde ise ankastre mesnete yakın olan konumlarda yüksek değerlere ulaşan boyutsuz frekanslar, serbest uca yaklaştıkça azalmaktadır. Sistemde frekansın en yüksek ve en düşük değerlerine, kademe oranının η=2 olması durumunda, kademenin ankastre mesnete ve serbest uca en yakın konumlarında rastlanmaktadır. Kademe oranının 1'den büyük değerleri için, kademenin ψ_1 / ϕ_T = -0.1 ve -0.2 konumları arasında frekans değerleri çakışır.

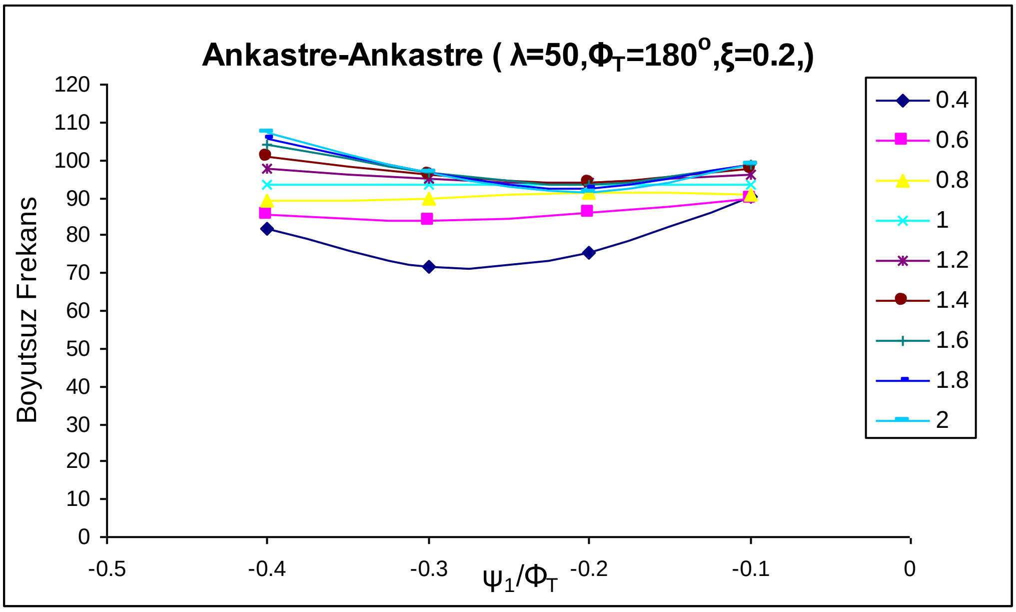
6.2.4. Farklı modlarda kademe konumunun boyutsuz frekansa etkisi

Aşağıda ankastre-ankastre mesnet şartının ilk beş moduna ait kademe konumunun boyutsuz frekansla değişimi dokuz farklı kademe oranı için verilmektedir. Mesnet şartı simetrik olduğundan kademenin, sol uç konumundan (ψ_1/ϕ_T =-0.4) orta konuma (ψ_1/ϕ_T =-0.1) kadar olan hareketi incelenecektir.

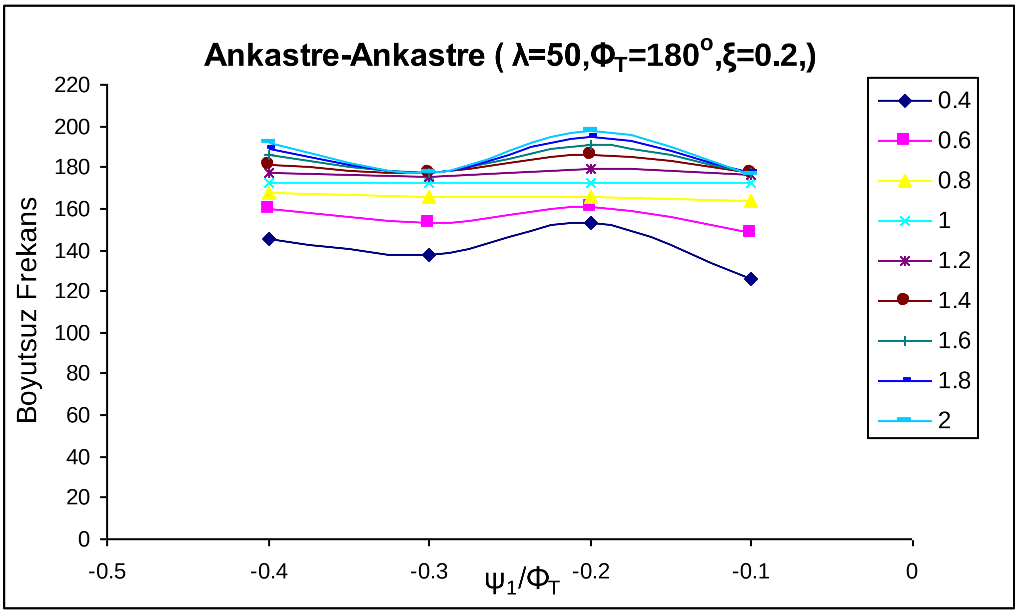


Şekil 6.10. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 180^0$ ve ψ_T/ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.

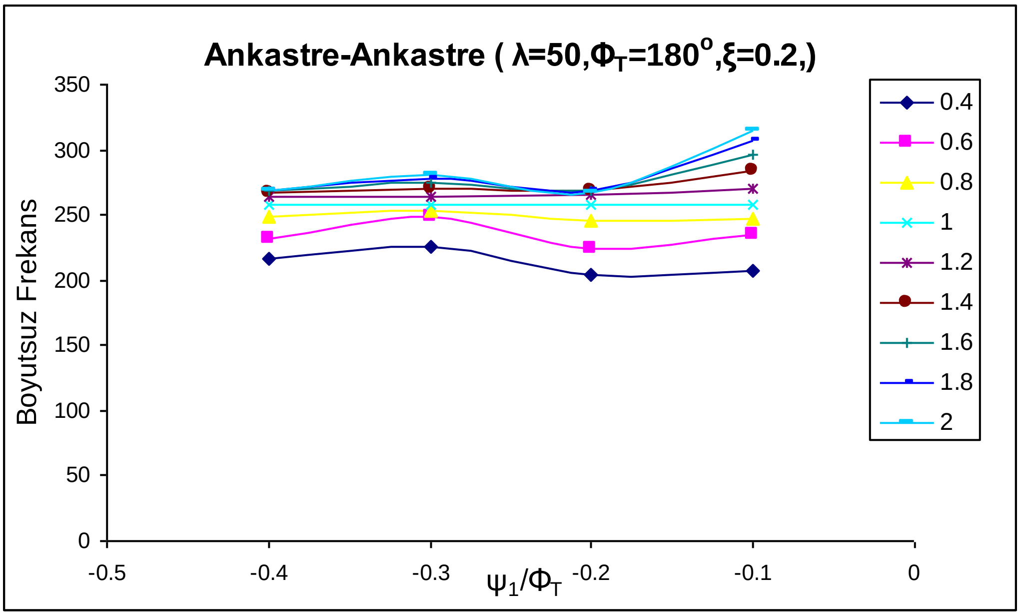
Ankastre-ankastre çubuğun ilk beş moduna ait verilen grafikler incelendiğinde, eğrilerin her mod için farklı karakterlere sahip olduğu görülür. Kademe yüksekliğinin çubuk yüksekliğinden fazla (h_2/h_1>1) olması durumlarında, frekanslardaki en büyük değerler, 1. mod için ψ_1/ϕ_T =-0.3 konumunda; 2. mod için ψ_1/ϕ_T =-0.4 konumunda; 3. mod için ψ_1/ϕ_T = -0.2 konumunda; 4. mod için ψ_1/ϕ_T =-0.1 konumunda; 5. mod için ψ_1/ϕ_T =-0.2 konumunda elde edilmektedir. Her mod için, kademe konumları gözönüne alındığında, en yüksek boyutsuz frekans değerleri kütlenin fazla olduğu, kademe oranının 1.8 ve 2 olması durumlarında; en düşük frekans değerleri ise kütlenin en düşük seviyede olduğu 0.4 kademe konumunda ortaya çıkmaktadır.



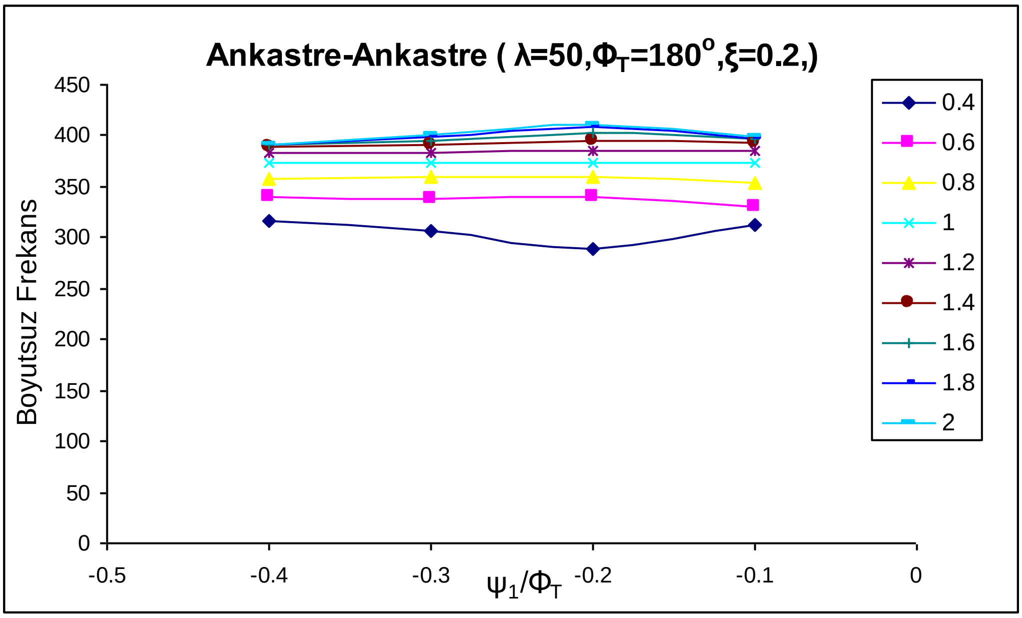
Şekil 6.11. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 180^0$ ve ψ_T / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 2. moduna ait boyutsuz frekanslar.



Şekil 6.12. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 180^0$ ve ψ_T / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 3. moduna ait boyutsuz frekanslar.



Şekil 6.13. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 180^0$ ve ψ_T / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 4. moduna ait boyutsuz frekanslar.



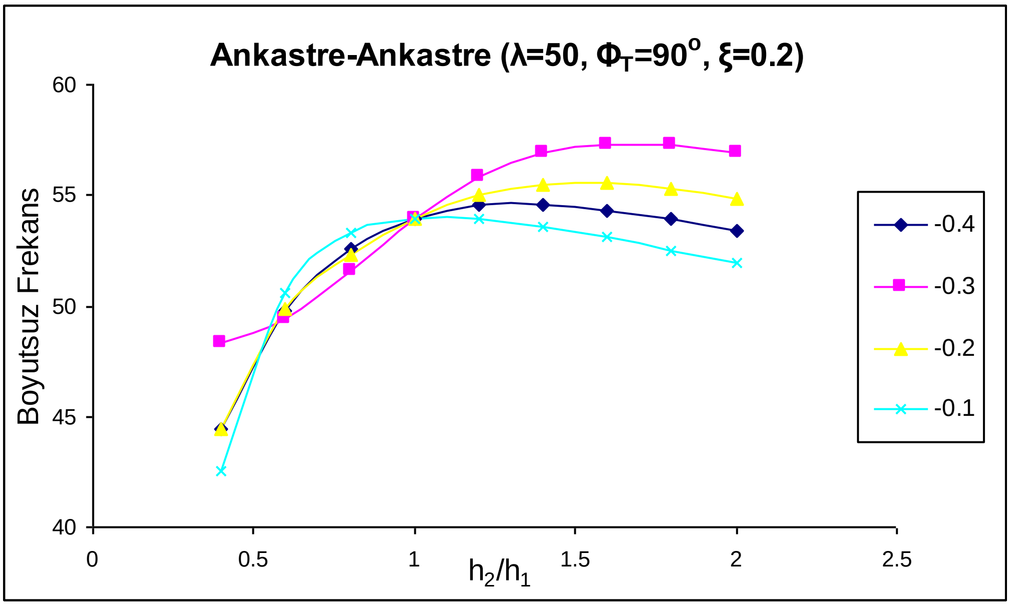
Şekil 6.14. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 180^0$ ve ψ_T / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 5. moduna ait boyutsuz frekanslar.

6.3. İki Kademeli Değişken Kesitli Çember Eksenli Çubuklarda Boyutsuz Frekansın Kademenin Oranı ile Değişimi

Aşağıda, farklı kademe konumlarına ait boyutsuz frekansların kademenin oranına göre değişimini ifade eden grafikler verilmektedir. Yatay eksen h_2/h_1 şeklinde tanımlanan kademe oranını göstermekte, eğrilerin herbiri ψ_1/ϕ_T şeklinde tanımlanan kademe konumu temsil etmektedir.

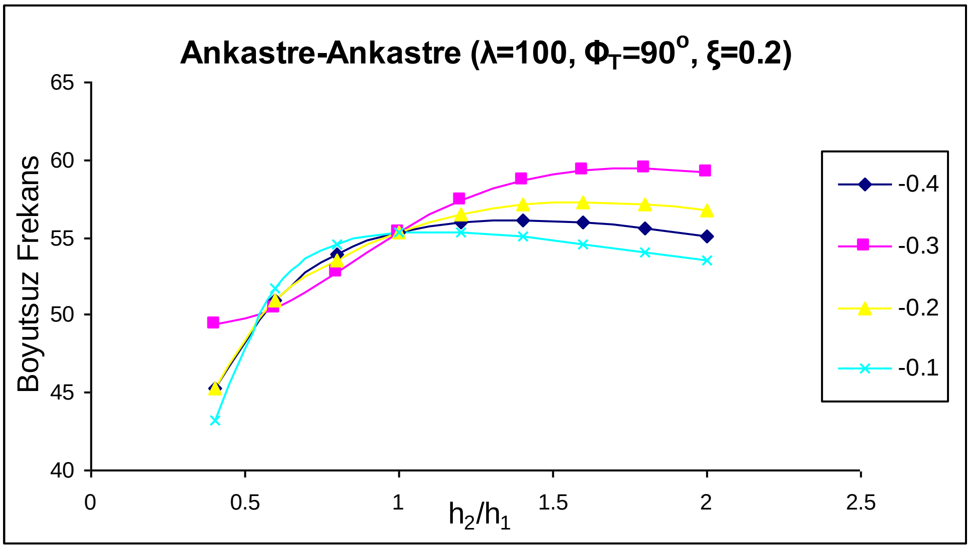
6.3.1. Farklı narinlik oranlarında kademe oranının boyutsuz frekansa etkisi

Aşağıda verilen, ankastre-ankastre mesnet şartının 1. mod titreşimlerine ait iki grafikte, narinlik oranının 50 ve 100 olması durumlarındaki frekansların kiriş açısıyla değişimleri incelenmektedir.



Şekil 6.15. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 90^0$ ve ψ_T / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.

Ankastre-Ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 90^0$ ve ψ_T / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekansların değişimini veren Şekil 6.15'de, mesnete yakın konumda (ψ_1 / ϕ_T =-0.4) en büyük frekans değeri h_2/h_1=1.4 kademe oranında ortaya çıkar. Mesnetten biraz uzaklaştıkça (ψ_1 / ϕ_T =-0.3 ve -0.2) kademe oranının h_2/h_1=1.6 değeri civarında frekansın en yüksek değere ulaştığı görülür. Sistemde kütlenin en az ve en fazla olduğu kademenin h_2/h_1=0.4 ve h_2/h_1=2 oranlarında en düşük frekans kademenin ortada bulunması durumunda gözlenirken, en yüksek frekans kademenin ψ_1 / ϕ_T =-0.3 konumunda ortaya çıkar.

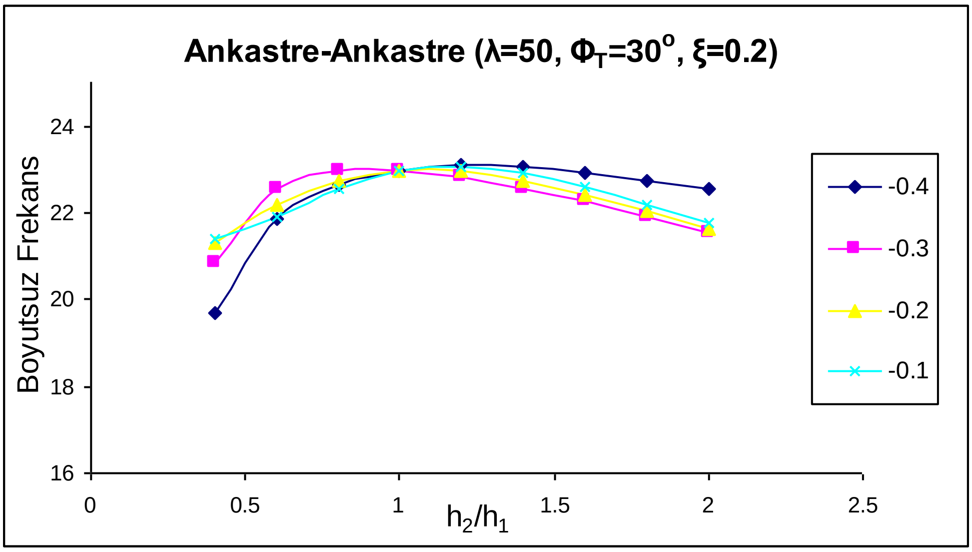


Şekil 6.16. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 100$, $\phi_T = 90^0$ ve ψ_T / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.

Narinlik oranının λ=100 olması durumunda, mesnete yakın konumda (ψ_1 / ϕ_T =-0.4) en büyük frekans değeri h_2/h_1=1.4 kademe oranında ortaya çıkarken mesnetten biraz uzaklaştıkça (ψ_1 / ϕ_T =-0.3) kademe oranının h_2/h_1=1.8 değerinde frekansın en yüksek değere ulaştığı görülür. Orta konumda ise kademenin h_2/h_1=1.2 oranında frekans maksimuma ulaşır. İlk grafikte olduğu gibi kütlenin en fazla ve en az olduğu iki durumda da en yüksek frekans değeri ψ_1 / ϕ_T =-0.3 konumunda, en düşük frekans değeri orta konumda görülür.

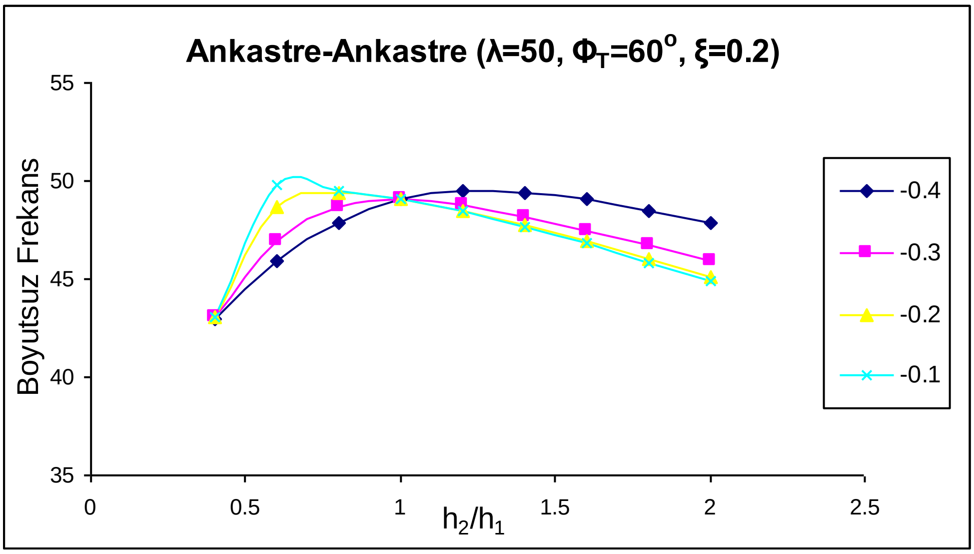
6.3.2. Farklı kiriş açılarında kademe oranının boyutsuz frekansa etkisi

Aşağıdaki üç grafikte, λ=50 narinlik oranına ve $\psi_T / \phi_T = 0.2$ kademe açıklıkları oranına sahip ankastre-ankastre mesnetli çubuğun farklı kademe konumları için serbest titreşimlerinin kademe oranı ile değişimi verilmektedir. Kiriş açısının boyutsuz frekans üzerindeki etkisi incelenecektir.

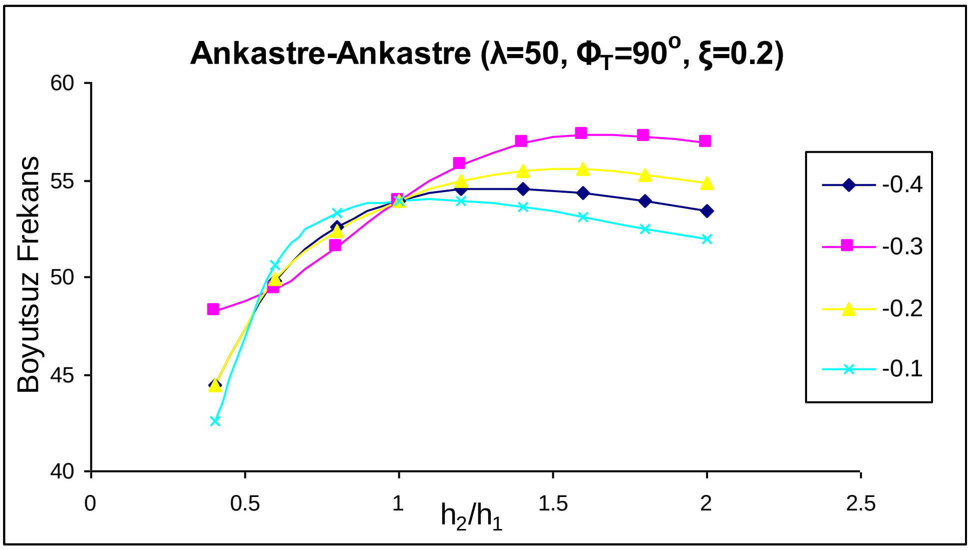


Şekil 6.17. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 30^0$ ve ψ_T / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.

Kademe konumunun ψ_1 / ϕ_T =-0.4 olması durumu için, kiriş açısının 30° ve 60° olduğu sistemlerde en büyük frekans değerine h_2/h_1'in 1.2 oranında rastlanırken, kiriş açısının 90° olması durumunda kademenin h_2/h_1=1.4 oranında en yüksek frekans değeri görülmektedir. Kiriş açısının 30° ve 60° derecelerde olması durumunda, kademe oranının 1'den büyük değerlerinde (h_2/h_1>1) kademenin uçta olması sistemde, diğer konumlarda olmasına kıyasla daha büyük frekansların elde edilmesini sağlar. Aynı durum kiriş açısının 90° olması durumunda kademenin ψ_1 / ϕ_T =-0.3 konumununda ortaya çıkar.



Şekil 6.18. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 60^0$ ve ψ_T / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.



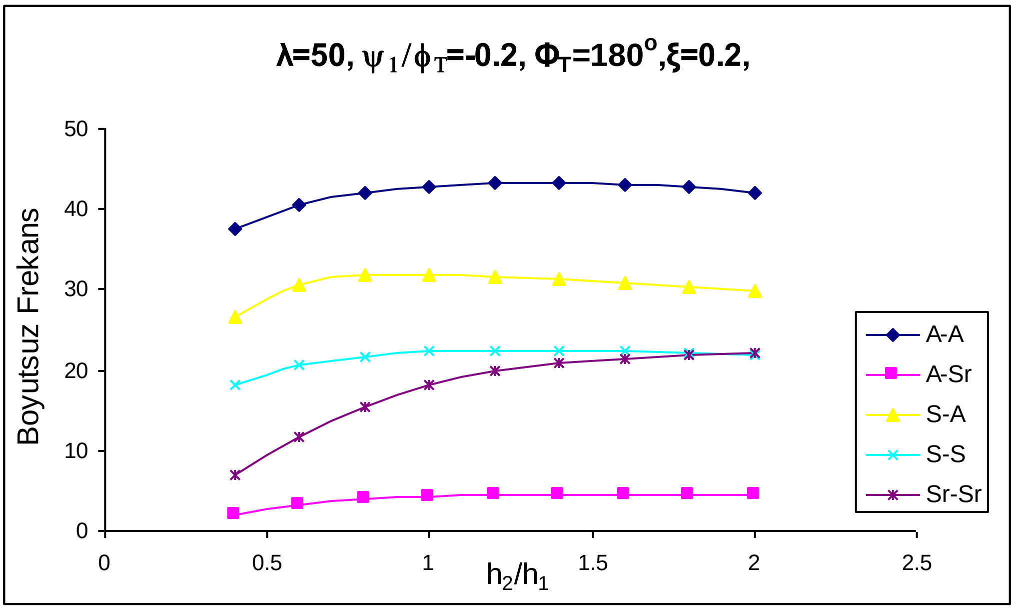
Şekil 6.19. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 90^0$ ve ψ_T / ϕ_T =0.2 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.

Kademenin 1'den büyük oranları için (h_2/h_1>1), boyutsuz frekanslardaki en düşük değerlere kiriş açısının 30° olması durumunda konumun ψ_1 / ϕ_T =-0.3 konumunda, kiriş açısının 60° olması durumunda orta konumda, kiriş açısının 90° olması durumunda yine orta konumda rastlanır.

6.3.3. Farklı modlarda kademe oranının boyutsuz frekansa etkisi

Şekil 6.20'de verilen, ilk moda ait frekans-kademe oranı grafiği incelendiğinde, en büyük frekans değerinin en rijit durum olan ankastre-ankastre mesnet şartında ortaya çıktığı görülmektedir. Ankastre-ankastre mesneti, sırayla sabit-ankastre, sabit-sabit, serbest-serbest ve ankastre-serbest mesnet şartları izler. Diğer modlar için de aynı durum sözkonusudur.

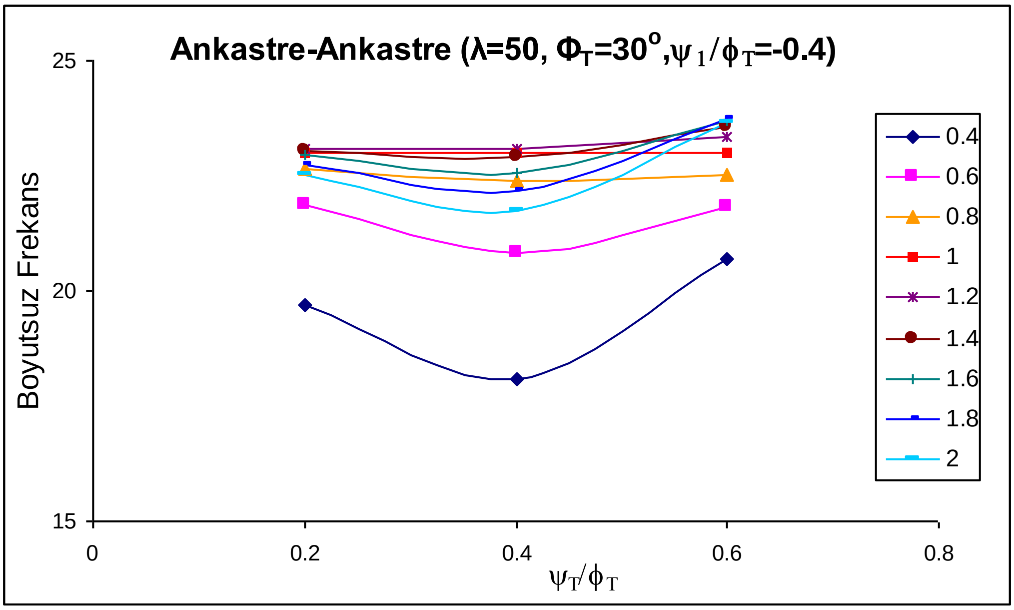
1. moda ait aşağıdaki grafikte, serbest-serbest sınır şartı dışındaki eğrilerde büyük kademe oranlarında frekans değerleri düşmektedir. Yüksek modlarda ise eğriler sürekli bir artış gösterirler. Yine kademe oranının yüksek değerlerinde, sabit-sabit ve serbest serbest mesnet koşulllarında elde edilen boyutsuz frekansların birbirlerine oldukça yakın değerlere sahip olduğu gözlenir.



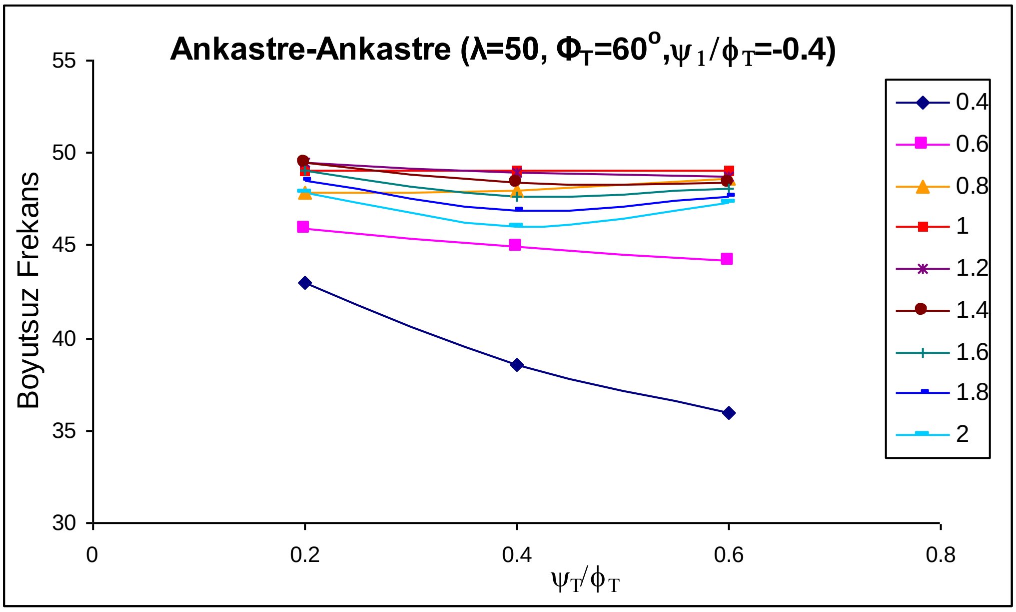
Şekil 6.20. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 180^0$ ψ_1 / ϕ_T = -0.2 ve ψ_T / ϕ_T = 0.2 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar (A-A: ankastre-ankastre, S-A: sabit-ankastre, S-S: sabit-sabit, Sr-Sr: serbest-serbest, A-Sr: ankastre-serbest).

6.4. Farklı Kiriş Açılarında Kademe Açıklıkları Oranının Boyutsuz Frekansa Etkisi

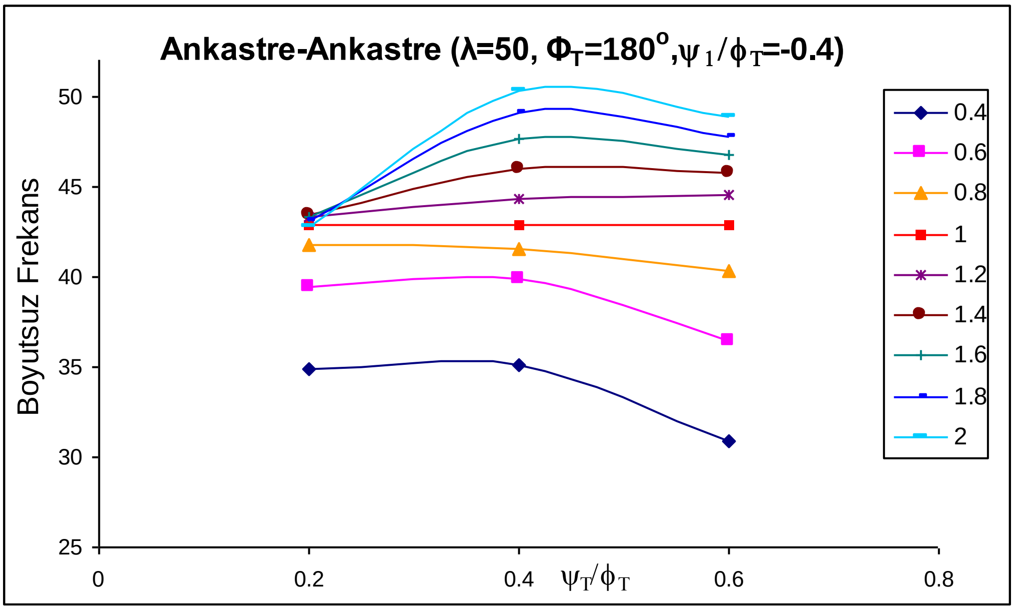
Bu bölümde, kiriş açısı değiştirilerek hesaplanan boyutsuz frekans değerlerinin, kademe açıklıkları oranına bağlı değişimi grafikler halinde sunulmaktadır. Grafiklerde yatay eksen kademe açısının kiriş açısına oranını gösterirken, düşey eksen boyutsuz frekans değerlerini vermektedir. Grafik üzerindeki herbir eğri farklı kademe oranına ait frekans değerlerini ifade etmektedir.



Şekil 6.21. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 30^0$ ve ψ_1 / ϕ_T =-0.4 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.



Şekil 6.22. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 60^0$ ve ψ_1 / ϕ_T =-0.4 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.



Şekil 6.23. Ankastre-ankastre mesnetli, $\lambda = 50$, $\phi_T = 180^0$ ve ψ_1 / ϕ_T =-0.4 özelliklerine sahip iki kademeli çember eksenli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslar.

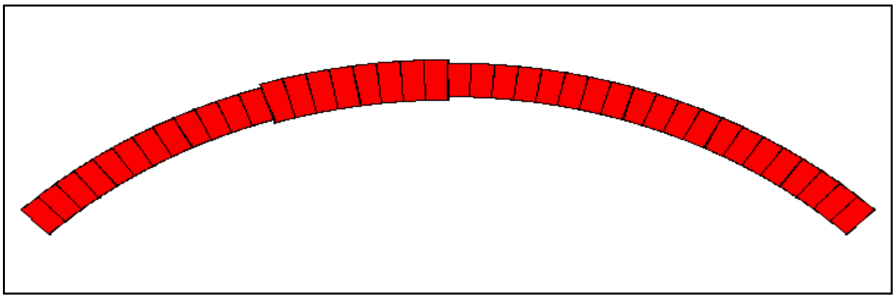
Yukarıda kiriş açıklıklarının oranına göre frekans değişimini veren üç grafikte de, en düşük frekans değerleri kademe oranının h_2/h_1=0.4 değerinde ortaya çıkmaktadır. 30^o ve 60^o'lik kiriş açılarına sahip sistemler için çizilen eğrilerde genel olarak önce bir azalma ve ardından artma gözlenirken, 180^o'lik kiriş açısına sahip sistemde önce artış sonra azalma görülmektedir. Kiriş açısının 30^o ve 60^o olması durumlarında çizilen eğrilerde, kiriş açıklığı oranının ψ_T / ϕ_T =0.2 değeri için en yüksek frekans 1.2 kademe oranında görülmektedir. Kiriş açıklığı oranının ψ_T / ϕ_T = 0.4 değeri için, 30^o kiriş açısına sahip sistemde, yine 1.2 kademe oranında maksimum frekansa rastlanırken, 60^o kiriş açısına sahip sistemde kademe oranının 1 olması durumunda rastlanır. Kiriş açıklığı oranının ψ_T / ϕ_T =0.6 değerinde ise 60^o'lik kiriş açısında kademe oranının 1 olması yani sabit kesitli çubuk durumunda frekans en yüksek değerinde olmaya devam ederken, 30^o'lik kiriş açısında kütle artışıyla frekans yükselmiş ve 1.8 kademe oranında maksimuma ulaşmıştır. 180^o'lik kiriş açısına sahip çember eksenli çubukta, kirişin açıklığı oranının ψ_T / ϕ_T =0.2 değeri için, kademenin 1.4 oranında en yüksek boyutsuz frekans değerine rastlanırken, 0.4 ve 0.6 kiriş açıklıklarında kütlenin en fazla olduğu durum olan kademe oranının 2 olması durumunda en yüksek frekans değerine ulaşılır.

6.5. Sonlu Eleman Çözümleri

Bölüm 5.5'de verilen bilgiler doğrultusunda, iki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubuğa ait sonlu eleman yöntemi sonuçları da hesaplanmış ve MATLAB sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

$\phi_T = 90^o$ kiriş açısına sahip iki kademeli değişken kesitli çubuklar, beş farklı mesnet şartı için *BEAM4* eleman ile modellenip modal analizleri yapılmıştır. Kademe oranı $\eta = h_2/h_1$= 1.2, kademe oranının kiriş açıklığına orarı $\xi = \psi_T / \phi_T$ = 0.2 ve narinlik oranı λ=50 olacak şekilde geometrik boyutlar hesaplanmış ve hesaplara dahil edilmiştir.

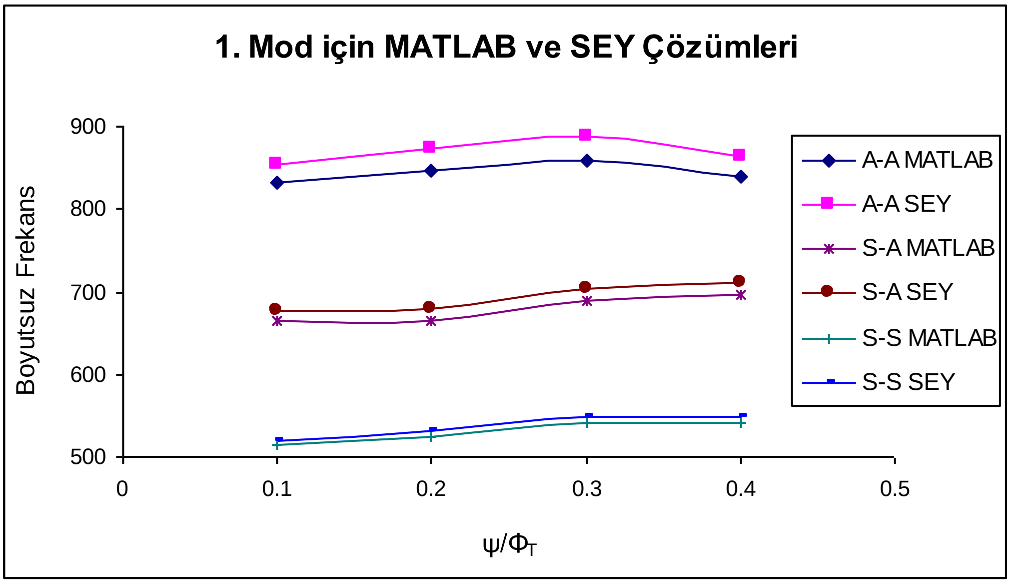
Aşağıda, MATLAB programı ile elde edilen kesim çözümler ve ANSYS programı ile elde edilen yaklaşık çözümler birarada grafikler halinde sunulmaktadır. Grafikler, iki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubuğun ilk üç moduna ait serbest titreşimlerin, farklı kademe konumları için, ankastre-ankastre, sabit-ankastre ve sabit-sabit sınır şartlarında frekans değerlerinin değişimini göstermektedir.



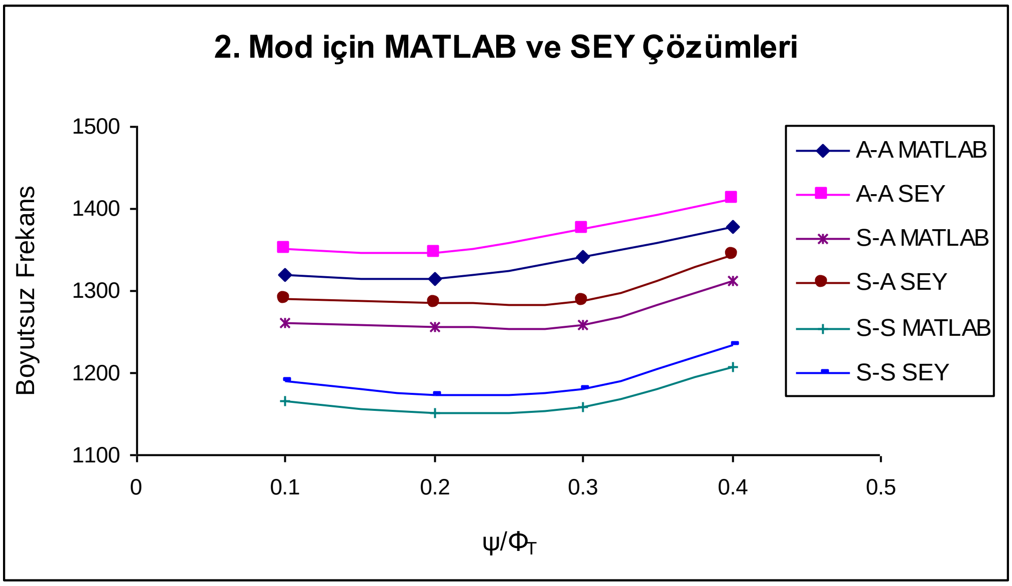
Şekil 6.24. ψ_1 / ϕ_T = -0.2 kademe konumuna ait sonlu eleman modeli

Burada verilmeyen sınır şartlarında ve modlarda da benzer davranışlar elde edilmektedir. Tüm sınır şartlarına ait kesin çözüm, sonlu eleman çözümleri ve aralarındaki yüzde hata EK B'de tablolar halinde sunulmaktadır. MATLAB sonuçları, sadece düzlem içindeki titreşimlerin doğal frekanslarını verdiğinden, sonlu eleman sonuçları da sadece düzlem içine ait olan frekans değerlerini içerir.

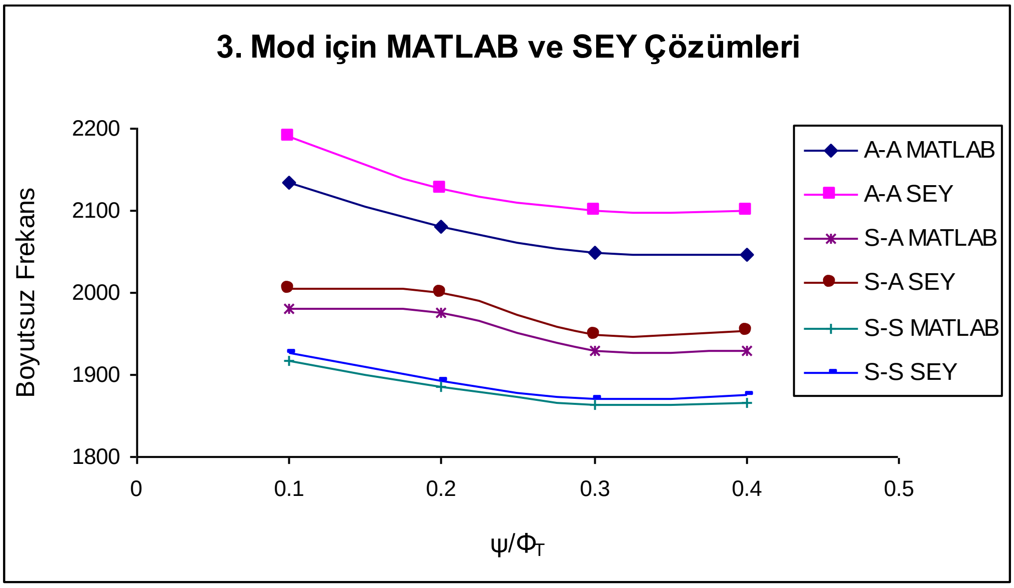
Tek kademeli çubukta olduğu gibi, sonlu eleman modelinde kullanılan *BEAM4* elemanın kayma deformasyonunu içermemesinden dolayı, model gerçek sistemden daha rijit davranmakta ve SEY (Sonlu eleman yöntemi) çözümleri, MATLAB çözümlerinden daima daha büyük değerlere sahip olmaktadır.



Şekil 6.25. İki kademeli çember eksenli çubuğa ait 1. mod frekanslarının MATLAB ve SEY çözümlerinin karşılaştırılması (A-A: ankastre-ankastre, S-A:sabit-ankastre, S-S: sabit-sabit).



Şekil 6.26. İki kademeli çember eksenli çubuğa ait 2. mod frekanslarının MATLAB ve SEY çözümlerinin karşılaştırılması (A-A: ankastre-ankastre, S-A: sabit-ankastre, S-S: sabit-sabit).



Şekil 6.27. İki kademeli çember eksenli çubuğa ait 3. mod frekanslarının MATLAB ve SEY çözümlerinin karşılaştırılması (A-A: ankastre-ankastre, S-A: sabit-ankastre, S-S: sabit-sabit).

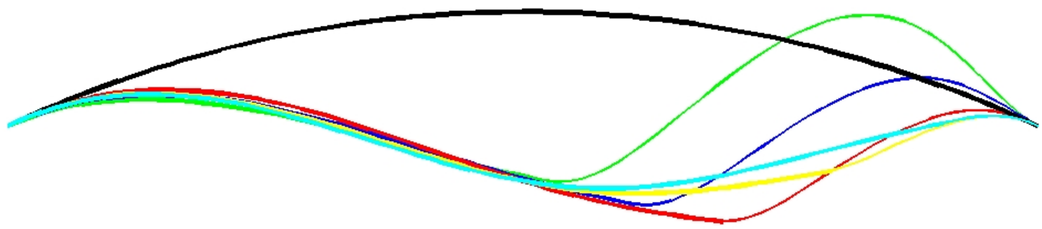
Yaklaşık çözüm ve kesin çözüm sonuçlarına ait yukarıda verilen grafiklerde, eğriler daima birbirlerine paralel kalmaktadırlar. 1. mod frekanslarında iki çözüm arasındaki en büyük hata değerleri, kademenin tüm konumları için ankastre-ankastre mesnetlemede ortaya çıkmaktadır. 2. mod frekanslarında kademenin uca yakıın konumlarında ankastre-ankastre mesnet şartı yüksek hata değerlerine sahipken, ortaya yakın konumlarda sabit-ankastre mesnette hata değerleri yükselmektedir. 3. mod frekanslarında yaklaşık çözümdeki hatanın büyük olduğu değerlere serbest-serbest sınır şartında rastlanırken, 4. mod frekanslarında yine ankastre-ankastre sınır şartında hatalar artmaktadır. 5. mod için, ankastre uca en yakın konumda %7.18 ile hata maksimuma ulaşırken , kademenin diğer konumlarında sabit-sabit sınır şartı yüksek hatalar içerir.

Ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest sınır koşullarında kademenin tüm konumları için iki çözüm arasındaki en yüksek hata oranlarına 4. mod frekanslarında rastlanırken sabit-sabit'de 5. modda hatalar en yüksek değerlere ulaşmaktadır.

7. KESİTİ KADEMELİ DEĞİŞEN ÇEMBER EKSENLİ ÇUBUĞUN DÜZLEM İÇİ SERBEST TİTREŞİMLERİNE AİT MOD ŞEKİLLERİ

Bu bölümde, tek kademeli değişken kesitli çember eksenli çubuğun düzlem içi serbest titreşimlerine ait mod şekillerinin kademenin konumuna ve yapılan kabule göre değişimleri incelenecektir.

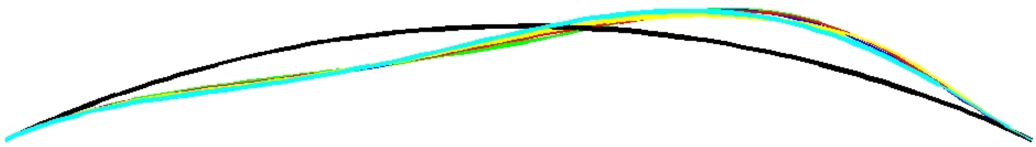
Aşağıda ankastre-ankastre mesnet şartına ait kademe oranı $\eta = h_2 / h_1$ =0.4, narinlik oranı λ=50 ve kiriş açısı ϕ_T =50^o olan çember eksenli çubuğun 1. mod şekli verilmektedir. Şekildeki farklı renkler kademenin farklı konumlarını ifade eder. Çizgilerin kalınlıkları kademe kalınlıklarını simgeleyecek şekilde değişmektedir.



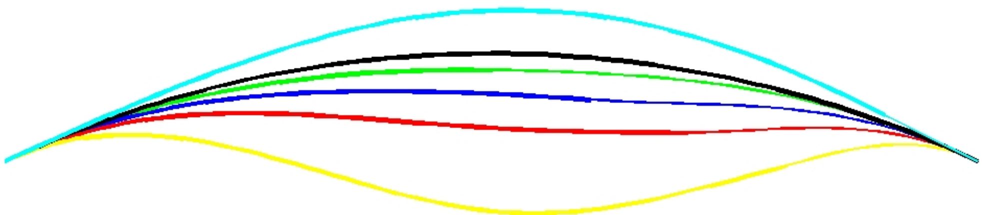
Şekil 7.1. Ankastre-ankastre mesnetli ($\eta = 0.4$, λ=50, ϕ_T =50^o) çubuğun tüm etkiler dahil hali için 1. mod şekli. ▬ : ψ / ϕ_T =0 ; ▬ : ψ / ϕ_T =0.1 ; ▬ : ψ / ϕ_T =0.2 ; ▬ : ψ / ϕ_T =0.3 ; ▬ : ψ / ϕ_T =0.4

Şekil 7.1'den açık olarak görülmektedir ki, kademe konumunun değişmesi ile çubuğun serbest titreşimine ait mod şekli de değişmektedir. Kademe konumunun ψ / ϕ_T = 0 ve 0.1 yani ortada ve ortaya yakın olması durumlarında diğer konumlara göre farklı bir mod şekli elde edilmektedir. Kademenin sağa doğru kayması ile kütle artışı olmakta, sistem rijitleşmekte ve mod şekli değişmektedir. Şekil 7.2 ve Şekil 7.3'te de benzer durumlar söz konusudur. Belirli kiriş açılarında gözlenen, kademenin ortaya ve kenara yakın olan konumlarında mod şekli farklı karakterlere sahip olması durumuna her kademe oranında rastlanmaktadır.

Şekil 7.2 ve Şekil 7.3'de, aynı geometrik özelliklere sahip çubuk için tüm etkilerin dahil edilerek ve tüm etkiler ihmal edilerek çizilen mod şekilleri verilmektedir.

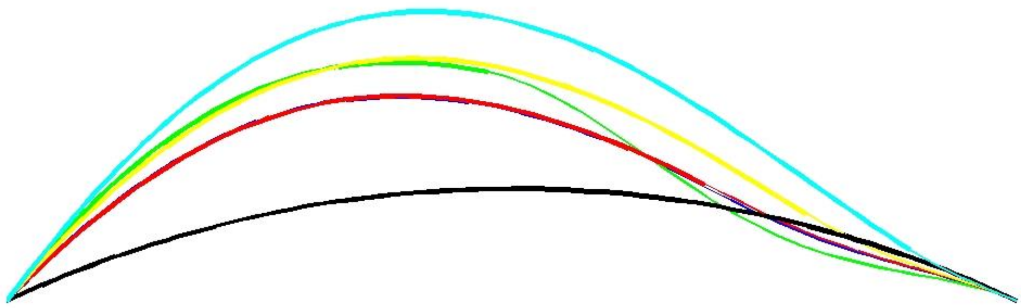


Şekil 7.2. Ankastre-ankastre mesnetli ($\eta = 0.6$, λ=50, ϕ_T =50°) çubuğun tüm etkiler hariç hali için 1. mod şekli. :ψ / ϕ_T =0 ; :ψ / ϕ_T =0.1 ; :ψ / ϕ_T =0.2 ; :ψ / ϕ_T =0.3 ; :ψ / ϕ_T =0.4



Şekil 7.3. Ankastre-ankastre mesnetli ($\eta = 0.6$, λ=50, ϕ_T =50°) çubuğun tüm etkiler dahil hali için 1. mod şekli. :ψ / ϕ_T =0 ; :ψ / ϕ_T =0.1 ; :ψ / ϕ_T =0.2 ; :ψ / ϕ_T =0.3 ; :ψ / ϕ_T =0.4

Şekil 7.2'de verilen tüm etkilerin ihmal edilmesi durumunda elde edilen 1. mod şekli, tüm etkilerin dahil edilmesi durumundaki 1. mod şeklinden tamamen farklı olup daha çok aynı kabulde ortaya çıkan 2. mod şekline benzemektedir (Şekil 7.4). Eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin ihmal edilmesi durumunda elde edilen 1. mod şekli aslında sistemin 2. mod şeklini vermektedir.



Şekil 7.4. Ankastre-ankastre mesnetli ($\eta = 0.6$, λ=50, ϕ_T =50°) çubuğun tüm etkiler dahil hali için 2. mod şekli. :ψ / ϕ_T =0 ; :ψ / ϕ_T =0.1 ; :ψ / ϕ_T =0.2 ; :ψ / ϕ_T =0.3 ; :ψ / ϕ_T =0.4

İki kademeli değişken kesitli çubuklarda da, kademe konumunun ve kabullerin mod şekli üzerindeki etkisinin, tek kademeli çubuklarla benzer özelliklere sahip olduğu görülmektedir.

8. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde, kesiti kademeli değişen çember eksenli çubuğun düzlem içi titreşimlerine ait kesin çözüm sonuçları, literatürdeki mevcut çalışmalarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırılacaktır. Bölüm 2'de literatürdeki çalışmalardan kısaca bahsedilmekte, eğri eksenli çubukların düzlem içi serbest titreşimlerini inceleyen çalışmaların büyük bir kısmında, çubuk teorisinin denklemlerinin çözümünde yaklaşık yöntemlerin kullanıldığı belirtilmektedir.

Literatüedeki çalışmalarda, tek bölgeli ve iki bölgeli kesiti kademeli değişen çember eksenli çubuklar ankastre-ankastre, sabit-sabit ve sabit-ankastre sınır koşullarında ele alınmaktadır. Bu iki tip çubuk geometrisinde de kademenin orta konumda bulunması durumu incelenmektedir. Tablolarda, (1) ve (2) ile ifade edilen sütunlar, sırasıyla, etkilerin ihmal edilmesi ve dahil edilmesi durumları için kesin çözüm sonuçlarını belirtmektedirler.

Tablo 8.1 ve 8.2'de, tek kademeli değişken kesitli çubukların titreşimlerini inceleyen [5], [6], [8] ve [12]'nin sonuçları burada elde edilen kesin çözüm sonuçları ile birlikte verilmektedir. Tablolar, $\eta = h_2/h_1 = 0.8$ kademe oranında, ankastre-ankastre sınır koşulu için 1. moda ait boyutsuz frekans değerlerini içermektedir. Bu çalışmalarda boyutsuz frekans,

$$c = \omega R^2 \sqrt{\frac{\mu_1}{EI_1}} \tag{8.1}$$

olarak tanımlanmaktadır. (2) ile verilen kesin çözüm sonuçları narinlik oranının λ=50 olması durumunda hesaplanan sonuçlardır.

Tablo 8. 1. η=0.8 kademe oranında, ankastre-ankastre mesnetli tek kademeli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslarının literatürde elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması.

Kiriş Açısı	**[6] R-R**	**[6] SEY**	**[6] CDM**	**[8]**	**[12]**	**(1)**	**(2)**
10	2277.9		2264.9	2277.412	2277.436	2279.747	431.438
20	567.1	566.86	564.05	567.17	567.174	567.749	162.931
30	250.37		249.1	250.472	250.475	250.729	89.174
40	139.62	139.72	138.88	139.647	139.649	139.791	62.227
50	88.439		87.887	88.372	88.372	88.462	51.019
60	60.54	60.604	60.206	60.538	60.539	60.600	45.669
70					43.777	43.821	40.680
80					32.917	32.951	31.225

Tablo 8.1'de, [6]'ya ait, kısaca R-R, SEY ve CDM olarak gösterilen sütunlar, Rayleigh-Ritz, sonlu eleman ve hücre ayrıklaştırma (cell discretization method) yöntemlerinin verdiği sonuçları göstermektedir. [12]'de frekanslar, genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemi (generalized quadrature method-DQM) kullanılarak elde edilmektedir.

Tablo 8.2'de, yine ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci moduna ait boyutsuz frekans değerleri verilmektedir. Boyutsuz frekans,

$$c = \omega R^2 \phi_T{}^2 \sqrt{\frac{\mu_1}{EI_1}} \tag{8.2}$$

olarak hesaplanmaktadır.

Tablo 8. 2. η=0.8 kademe oranında, ankastre-ankastre mesnetli tek kademeli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslarının [5]'de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması.

Kiriş Açısı	**[5]**	**(1)**	**(2)**
10	69.39	69.375	13.129
20	69.1	69.108	19.833
30	68.64	68.669	24.423
40	68.05	68.063	30.298
50	67.35	67.299	38.813
60	66.39	66.388	50.031

Tablo 8.3, 8.4, 8.5 ve 8.6’da aynı çalışmalar sabit-ankastre ve sabit-sabit sınır şartları için incelenmektedir. Kademe orta konumdadır ve kademe oranı η=0.8 olarak hesaplara dahil edilmiştir.

Tablo 8. 3. η=0.8 kademe oranında, sabit-ankastre mesnetli tek kademeli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslarının literatürde elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması.

Kiriş Açısı	[6] R-R	[6] SEY	[6] CDM	[8]	[12]	(1)	(2)
10	1868.5		1848.4	1853.663	1853.704	1855.585	363.125
20	464.76	461.15	460.03	461.342	461.352	461.820	127.893
30	205.03		202.95	203.52	203.525	203.731	72.164
40	114.16	113.36	112.98	113.014	113.304	113.419	54.477
50	72.103		71.363	71.563	71.564	71.637	47.835
60	49.269	48.978	48.775	48.91	48.911	48.961	44.119
70					35.272	35.308	33.560
80					26.439	26.466	25.449

Tablo 8. 4. η=0.8 kademe oranında, sabit-ankastre mesnetli tek kademeli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslarının [5]’de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması.

Kiriş Açısı	[5]	(1)	(2)
10	56.92	56.467	11.050
20	56.63	56.214	15.568
30	56.21	55.797	19.764
40	55.64	55.223	26.525
50	54.91	54.499	36.391
60	54.03	53.637	48.333

Literatürde yapılan çalışmalarda, yaklaşık çözümler kullanılarak eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri gözönüne alınmamıştır. Burada, yukarıda sayılan etkilerin ihmal edilmesi durumunda elde edilen frekans değerleri (1) ile literatürdeki farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlar birbirlerine oldukça yakın değerler vermektedir. Tüm etkilerin gözönüne alınması durumunda kesin çözüm sonuçları (2) ile literatürdeki çözümler arasında ise büyük farklar ortaya çıkmaktadır.

Tablo 8. 5. η = 0.8 kademe oranında, sabit-sabit mesnetli tek kademeli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslarının literatürde elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması.

Kiriş Açısı	[6] R-R	[6] SEY	[6] CDM	[8]	[12]	(1)	(2)
10	1462.16		1456	1458.852	1458.838	1460.318	281.977
20	363.32	362.667	361.92	362.609	362.613	362.981	92.991
30	160.128		159.33	159.625	159.627	159.789	58.300
40	88.7588	88.697	88.44	88.601	88.602	88.692	49.340
50	55.8865		55.651	55.75	55.750	55.807	46.123
60	37.989	38.007	37.862	37.926	37.927	37.965	36.415
70					27.202	27.230	26.414
80					20.262	20.283	19.809

Tablo 8. 6. η = 0.8 kademe oranında, sabit-sabit mesnetli tek kademeli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslarının [5]'de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması.

Kiriş Açısı	[5]	(1)	(2)
10	44.54	44.439	8.581
20	44.27	44.183	11.319
30	43.9	43.763	15.967
40	43.26	43.184	24.023
50	42.56	42.456	35.089
60	41.66	41.591	39.893

Tüm etkilerin dahil edilmesiyle elde edilen frekanslar (2), küçük kiriş açıları için yaklaşık çözüm sonuçlarından oldukça farklı değerlere sahipken, kiriş açısı büyüdükçe aradaki fark azalmaktadır. Büyük kiriş açılarında etkilerin frekans üzerindeki önemi azalmakta, etkilerin dahil edildiği kesin çözüm sonuçları yaklaşık çözüme yakın değerler vermektedir.

Laura ve diğerlerine ait olan çalışmada [4], ankastre-serbest mesnet şartlarına sahip olan çubuk ele alınmakta ve kademe açıklığının $\Phi_T=90^o$ olması durumunda üç farklı kademe konumu için boyutsuz frekans değerleri Rayleigh-Ritz yöntemi ile hesaplanmaktadır. Tablo 8.7'de, [4]'e ait sonuçlar bu çalışmada elde edilen sonuçlarla birlikte verilmektedir. Ankastre-serbest mesnet şartından dolayı, ilk mod için eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliğinin frekansa olan etkisi azdır. Bu nedenle (1) ve (2) sütunlarına ait sonuçlar yakın değerlere sahiptir.

Tablo 8. 7. Farklı kademe oranlarında, ankastre-serbest mesnetli tek kademeli çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekanslarının [4]'de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması.

η	[4]	(1)	(2)
1	3.7	3.697	3.691
0.8	4.01	4.013	4.007
0.6	4.32	4.321	4.315

Liu ve Wu'ya ait olan çalışmada [12], 2. moda ait boyutsuz frekanslar da hesaplanmıştır. Etkilerin ihmal edilmesi durumunda elde edilen frekanslarla (1), [12]'nin sonuçlarının uyumlu olduğu görülmektedir. Etkilerin dahil edilmesi durumunda ise, önceki tablolarda olduğu gibi kiriş açısının küçük değerlerinde büyük farklara sahip olan frekans değerleri açı değeri büyüdükçe yaklaşmaktadır.

Tablo 8. 8. η = 0.8 kademe oranında, farklı mesnetleme şartlarında tek kademeli çubuğun 2. moduna ait boyutsuz frekanslarının [12]'de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması.

	Ankastre-Ankastre			Sabit-Sabit			Sabit-Ankastre		
Kiriş Açısı	[12]	(1)	(2)	[12]	(1)	(2)	[12]	(1)	(2)
10	4027.77	4031.85	847.92	3054.69	3057.79	796.72	3538.34	3541.93	817.86
20	1005.47	1006.49	353.22	762.17	762.95	283.43	883.07	883.97	318.32
30	445.793	446.246	191.320	337.637	337.979	140.361	391.358	391.755	166.025
40	249.909	250.163	117.710	189.053	189.245	82.023	219.264	219.486	99.875
50	159.247	159.408	78.618	120.285	120.407	53.163	139.614	139.755	65.781
60	110.002	110.114	55.670	82.934	83.018	44.787	96.352	96.450	46.687
70	80.314	80.396	42.951	60.417	60.479	42.640	70.273	70.344	42.676
80	61.050	61.112	39.950	45.808	45.855	38.588	53.352	53.406	39.777

İki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubuklara ait literatürde elde edilen boyutsuz frekans değerleri, bu çalışmada elde edilenlerle birlikte aşağıdaki tablolarda sunulmaktadır. Kesin çözüm sonuçlarında, hiçbir etkinin gözönüne alınmadığı (1) ve tüm etkilerin gözönüne alındığı (2) kabuller ile elde edilen her iki sonucu da görmek mümkündür. İki kademeli çubuklarla ilgili, aşağıda verilen çalışmaların tümünde kademe orta konumda incelenmekte, konumun değişmesi çalışmalarda yer almamaktadır.

Tablo 8.9, kademe açıklıkları oranı, $\xi = \psi_T/\Phi_T = 0.5$ olan iki kademeli çember eksenli ankastre-ankastre mesnetli çubuğa ait Auciello ve Rosa [6] tarafından yapılan çalışmada elde edilen boyutsuz frekans değerleri ile kesin çözümde elde edilen frekans değerlerini vermektedir. Tek kademeli çubuklarda görüldüğü gibi, kiriş açısı büyüdükçe, etkilerin önemi azalmakta, yaklaşık çözüm sonuçları ile tüm etkilerin dahil edildiği kesin çözüm sonuçları birbirlerine oldukça yaklaşmaktadır. Tabloda η=0.8 ve 1.2 kademe oranları için elde edilen sonuçları görmek mümkündür. η=1.4 için de frekanslar karşılaştırılmış ve benzer sonuçlar elde edilmiştir. R-R ve CDM olarak gösterilen sütunlar, Rayleigh-Ritz ve hücre ayrıklaştırma (cell discretization method) yöntemlerini ifade ederler.

Tablo 8. 9. ξ = 0.5 kademe açıklıkları oranında, ankastre-ankastre mesnetli iki kademeli çubuğun 1. mod frekanslarının [6]'da elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması.

	η = 0.8				**η = 1.2**			
Kiriş Açısı	**[6] R-R**	**[6] CDM**	**(1)**	**(2)**	**[6] R-R**	**[6] CDM**	**(1)**	**(2)**
5	7656.8	7216.57	7251.386	1018.237	8519.54	8639.3	8723.197	915.976
10	1913.9	1802.62	1811.316	433.479	2129.23	2157.5	2178.465	406.964
20	478.06	449.142	451.305	154.759	531.73	537.08	542.294	154.022
30		198.508	199.461	84.104		237.01	239.319	84.689
40	119.1	110.798	111.328	59.933	132.297	132.01	133.300	59.487
45	93.997	87.1349	87.551	54.146	104.336	103.69	104.701	53.215
50		70.2129	70.547	50.356		83.439	84.252	49.038
60		48.1797	48.408	45.819		57.076	57.633	44.027
70		34.907	35.072	33.662		41.204	41.607	39.007
80		26.306	26.429	25.593		30.925	31.228	29.674
90	23.089	20.421	20.516	19.991	25.46	23.9	24.135	23.155
100		16.2238	16.299	15.954		18.897	19.083	18.438
110		13.1297	13.190	12.955		15.215	15.365	14.926
120		10.7872	10.837	10.672		12.433	12.555	12.248
130		8.9744	9.016	8.897		10.285	10.386	10.166
140		7.5456	7.580	7.493		8.5962	8.680	8.520
150		6.40186	6.431	6.367		7.2483	7.319	7.200
160		5.4741	5.499	5.450		6.1582	6.218	6.129
170		4.71299	4.735	4.697		5.2667	5.318	5.250
180		4.0823	4.101	4.072		4.5305	4.574	4.522

$\xi = \psi_T/\Phi_T$ = 0.4 kademe açıklıkları oranına sahip çember eksenli çubuğa ait referans [6] ve [8]'de elde edilen boyutsuz frekans değerleri Tablo 8.10'da verilmektedir. Kademe yine orta konumda olup, mesnet şartı ankastre-ankastre ve kademe oranı η=0.8 olarak hesaplara dahil edilmiştir. Kademe oranının η=1.2 ve 1.4 olması durumları da incelenmiş ancak burada tek bir kademe oranının verilmesinin yeterli olacağı düşünülmüştür.

Tablo 8. 10. ξ = 0.4 kademe açıklıkları oranında, ankastre-ankastre mesnetli iki kademeli çubuğun 1. mod frekanslarının [6] ve [8]'de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması.

	η = 0.8					
Kiriş Açısı	**[6] R-R**	**[6] SEY**	**[6] CDM**	**[8]**	**(1)**	**(2)**
5	7836.7		7368.8		7392.99	1013.2
10	1958.9		1840.9	1844.84	1846.69	430.55
20	489.3	456.31	458.68	459.662	460.124	153.5
30			202.72	203.157	203.362	83.512
40	121.87	113.195	113.15	113.392	113.507	59.656
45	96.166		88.987	89.175	89.2654	53.967
50			71.705	71.856	71.9293	50.255
60			49.2	49.306	49.3567	45.862
70			35.647	35.722	35.7589	34.252
80			26.86	26.918	26.9461	26.051
90	23.599		20.851	20.895	20.9164	20.353
100			16.564		16.6153	16.245
110			13.403		13.4444	13.192
120			11.009		11.0435	10.867
130			9.1565		9.18526	9.0582
140			7.6961		7.72042	7.6273
150			6.5269		6.54767	6.4782
160			5.5784		5.59626	5.5437
170			4.8001		4.81556	4.7753
180			4.155		4.16859	4.1374

Tablo 8.11'de Laura ve diğerlerine ait olan çalışmada [4], ψ_T/Φ_T=0.5 kademe açıklıkları oranında ankastre-ankastre ve sabit-sabit mesnetli eğri eksenli çubukların frekans değerleri karşılaştırılmaktadır. Çalımada Rayleigh-Ritz metodu kullanılmış, çubuk üzerinde konsantre kütle olması durumu incelenmiştir. Tabloda, konsantre kütlenin sıfır olması durumunda elde edilen frekans değerleri yer almaktadır. [4]'ün sonuçlarıyla, kesin çözüm (1) sonuçlarının oldukça yakın değerlere sahip olduğu görülmektedir.

Tablo 8. 11. ξ = 0.5 kademe açıklıkları oranında, iki kademeli çubuğun 1. mod frekanslarının [4]'de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması

		Ankastre-Ankastre			Sabit-Sabit		
Kiriş Açısı	**η**	**[4]**	**(1)**	**(2)**	**[4]**	**(1)**	**(2)**
5	0.8	58.31	55.1665	7.7465			
	1	60.91	61.6529	7.3193	38.26	39.4594	5.86404
	1.2	64.88	66.3636	6.9685	41.45	42.471	6.00704
	1.4	70.1	69.283	6.6648	45.34	44.0381	5.97385
10	0.8	58.3	55.1199	13.191			
	1	60.9	61.5933	12.737	38.24	39.4024	8.16437
	1.2	64.86	66.2926	12.384	41.43	42.4052	8.824
	1.4	70.67	69.2025	12.059	45.31	43.9655	9.16221
20	0.8	58.25	54.9344	18.838			
	1	60.84	61.356	18.706	38.15	39.1756	10.7217
	1.2	64.79	66.0099	18.748	41.33	42.1435	11.666
	1.4	69.98	68.8826	18.792	45.21	43.6772	12.3175
30	0.8						
	1				38	38.8021	15.5057
	1.2				41.16	41.7133	16.1103
	1.4				45.02	43.2038	16.5612
40	0.8	58.05	54.2048	29.181			
	1	60.59	60.4246	28.929	37.08	38.2882	23.7372
	1.2	64.48	64.9029	28.964	40.94	41.1228	23.8333
	1.4	69.6	67.6325	29.11	44.77	42.5556	23.8907
45	0.8	57.97	53.9511	33.366			
	1	60.5	60.1014	32.928	37.67	37.9813	29.0307
	1.2	64.36	64.5197	32.792	40.81	40.7708	28.8678
	1.4	69.46	67.2007	32.801	44.62	42.1699	28.7144
90	0.8	56.97	50.571	49.275			
	1	59.24	55.8252	53.967	35.9	33.9605	33.4635
	1.2	62.82	59.4907	57.075	38.83	36.2113	35.5832
	1.4	67.58	61.5811	58.698	42.43	37.2249	36.5014

Irassar ve Laura'ya ait olan çalışmada [3] iki kademeli değişken kesitli çubuğun ilk simetrik modunu veren boyutsuz frekans değerleri incelenmektedir. Çubuğun ikinci mod frekansına denk gelen sonuçlar Tablo 8.12'de kesin çözüm sonuçları ile karşılaştırılmaktadır. ξ=0.5 ve 0.4 olması durumlarında Ankastre-ankastre ve serbest-serbest sınır şartları için incelemeler yapılmıştır. Burada ξ=0.4 olması durumuna ait sonuçlar verilmektedir.

Tablo 8. 12. ξ = 0.4 kademe açıklıkları oranında, ankastre-ankastre ve sabit-sabit mesnetli iki kademeli çubuğa ait 2. mod frekanslarının [3]'de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması.

		Ankastre-Ankastre			Sabit-Sabit		
Kiriş Açısı	**η**	**[3]**	**(1)**	**(2)**	**[3]**	**(1)**	**(2)**
5	1	114.436	110.979	13.54926	85.282	84.2868	10.77567
	1.2	116.849	115.413	12.53338	88.423	88.5597	9.724393
	1.4	121.304	120.487	11.03094	93.322	93.4875	8.580487
10	1	114.419	110.939	25.3753	85.26	84.2453	23.28559
	1.2	116.829	115.369	24.69023	88.399	88.5146	23.45347
	1.4	121.28	120.438	23.51548	93.294	93.4384	22.85385
20	1	114.36	110.777	40.93305	85.175	84.0795	31.90491
	1.2	116.748	115.19	41.14845	88.303	88.3343	32.6872
	1.4	121.184	120.242	40.6088	93.184	93.2424	32.70176
30	1	114.238	110.507	48.71901	85.033	83.8041	34.9088
	1.2	116.613	114.894	49.67656	88.142	88.0349	35.98568
	1.4	121.025	119.917	49.62477	93.001	92.9166	36.2154
40	1	114.079	110.131	52.50476	84.835	83.4203	35.91803
	1.2	116.425	114.481	53.93591	87.917	87.6176	37.11917
	1.4	120.802	119.463	54.1942	92.744	92.4627	37.44048
45	1	113.983	109.904	53.56997	84.714	83.1883	36.06533
	1.2	116.311	114.231	55.15398	87.78	87.3654	37.29084
	1.4	120.666	119.189	55.51266	92.596	92.1883	37.63073
60	1	113.628	109.068	54.96573	84.267	82.3351	48.46284
	1.2	115.889	113.312	56.78264	87.432	86.4377	47.51779
	1.4	120.166	118.18	57.29274	92.013	91.179	46.68427

Sonlu eleman yönteminin kullanıldığı Rossi ve Laura'ya ait olan çalışmada [7], eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri hesaplara dahil edilmiştir. Rossi ve Laura [7], farklı kademe açıklıkları oranına sahip iki kademeli çubukları incelemiş, farklı kiriş açılarında, ilk altı mod için elde edilen sonuçları ankastre-ankastre ve serbest-serbest sınır şartları için sunmuştur. Bu bölümde yalnızca ilk moda ait sonuçlar karşılaştırılacaktır.

[7]'de sonlu eleman yöntemi kullanılarak etkiler gözönüne alındığından karşılaştırmalar, tüm etkilerin dahil edildiği (2) sonuçlar kullanılarak yapılmaktadır. Kademe açıklıkları oranının ξ = 0.2, 0.25, 0.33 ve 0.5 olması durumları ele alınmış, kademe orta konumda incelenmiştir.

[7]'de narinlik oranı aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\frac{r}{L} = \frac{\sqrt{I / A}}{R.\phi_T} \tag{8.3}$$

Narinlik oranının 0.05 olması durumunda çözümler elde edilmiştir.

Tablo 8. 13. $\xi = 0.2$ kademe açıklıkları oranında, ankastre-ankastre ve sabit-sabit mesnetli iki kademeli çubuğa ait 1. mod frekanslarının [7]'de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması

	Ankastre-Ankastre				**Sabit-Sabit**			
	η = 0.6		**η = 0.8**		**η = 0.6**		**η = 0.8**	
Kiriş Açısı	**[7]**	**(2)**	**[7]**	**(2)**	**[7]**	**(2)**	**[7]**	**(2)**
20	18.678	17.85002	19.315	18.40637	9.282	8.656914	10.535	9.9707
40	21.336	28.16209	21.792	28.65142	14.36	23.11552	15.123	23.57885
60	25.101	49.83213	25.33	49.47231	20.125	33.71723	20.565	35.3012
90	31.79	50.60917	31.635	53.27506	27.193	31.80759	28.246	33.1624
120	35.312	48.2239	36.014	50.49604	24.478	28.90827	25.305	29.98442
150	32.664	45.07711	33.104	46.88869	21.475	25.48583	22.111	26.2953
180	30.026	41.57321	30.244	42.9306	18.323	21.79448	18.804	22.37723

Tablo 8. 14. $\xi = 0.25$ kademe açıklıkları oranında, ankastre-ankastre ve sabit-sabit mesnetli iki kademeli çubuğa ait 1. mod frekanslarının [7]'de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması

	Ankastre-Ankastre				**Sabit-Sabit**			
	η = 0.6		**η = 0.8**		**η = 0.6**		**η = 0.8**	
Kiriş Açısı	**[7]**	**(2)**	**[7]**	**(2)**	**[7]**	**(2)**	**[7]**	**(2)**
20	18.938	18.09839	19.353	18.44502	9.1326	8.488326	10.427	9.854993
40	21.632	28.52238	21.856	28.72822	14.338	23.21066	15.082	23.59378
60	25.457	49.12016	25.432	49.71258	20.206	32.218	20.582	34.86311
90	32.276	48.4245	31.808	52.56932	26.276	30.4085	28.003	32.76303
120	34.699	46.22158	35.894	49.85944	23.693	27.67814	25.103	29.64408
150	32.205	43.3304	33.028	46.34544	20.816	24.44327	21.945	26.01654
180	29.713	40.10989	30.208	42.48659	17.78	20.93627	18.672	22.15534

Tablo 8. 15. ξ = 1/3 kademe açıklıkları oranında, ankastre-ankastre ve sabit-sabit mesnetli iki kademeli çubuğa ait 1. mod frekanslarının [7]'de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması

	Ankastre-Ankastre				**Sabit-Sabit**			
	η = 0.6		**η = 0.8**		**η = 0.6**		**η = 0.8**	
Kiriş Açısı	**[7]**	**(2)**	**[7]**	**(2)**	**[7]**	**(2)**	**[7]**	**(2)**
20	19.467	18.60559	19.471	18.5641	8.9823	8.311074	10.285	9.704212
40	22.188	29.16455	21.998	28.90202	14.357	23.39009	15.034	23.62906
60	26.063	46.04676	25.608	50.06666	20.361	29.44167	20.611	33.86427
90	33.004	45.33424	32.05	51.1833	24.462	27.76843	27.4	31.82109
120	33.699	43.36252	35.561	48.57386	22.1	25.29657	24.586	28.80681
150	31.455	40.81248	32.787	45.21174	19.444	22.36756	21.509	25.29805
180	29.209	37.99059	30.055	41.52627	16.623	19.18073	18.309	21.55595

Tablo 8. 16. ξ = 0.5 kademe açıklıkları oranında, ankastre-ankastre ve sabit-sabit mesnetli iki kademeli çubuğa ait 1. mod frekanslarının [7]'de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması

	Ankastre-Ankastre				**Sabit-Sabit**			
	η = 0.6		**η = 0.8**		**η = 0.6**		**η = 0.8**	
Kiriş Açısı	**[7]**	**(2)**	**[7]**	**(2)**	**[7]**	**(2)**	**[7]**	**(2)**
20	20.1	19.34788	19.773	18.83781	8.8576	8.151449	10.106	9.511728
40	22.708	29.82054	22.268	29.18086	14.436	23.64501	14.981	23.6678
60	26.418	44.51743	25.831	50.1948	20.6	24.93239	20.651	31.52274
90	32.892	43.78291	32.157	49.27545	21.259	23.39976	25.918	29.547
120	33.76	41.95285	35.088	46.76552	19.186	21.24519	23.254	26.71004
150	31.728	39.64611	32.464	43.59125	16.853	18.73081	20.332	23.43002
180	29.703	37.14517	29.88	40.1493	14.379	16.01999	17.291	19.94338

9. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada tek kademeli ve iki kademeli değişken kesitli çubukların düzlem içi serbest titreşimleri, kademe konumunun değişimi gözönüne alınarak incelenmiştir. Bu konudaki mevcut çalışmalar özetlenerek, çözüm yöntemleri hakkında bilgi verilmiştir. Literatürdeki çalışmalarda dahil edilmeyen, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri bu çalışmada gözönüne alınmış, oluşturulan diferansiyel denklem takımının kesin çözümü elde edilmiştir. Diferansiyel denklem takımının kesin çözümü ancak katsayıların sabit olması durumunda yani sabit kesitli çember eksenli çubuk için mevcuttur. Bu nedenle kademeli çubuklar, sabit kesit alanına sahip bölgelere ayrılarak incelenmişlerdir.

Hazırlanan bilgisayar programı ile eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal eden ve etmeyen kabullerin yanısıra sadece eksenel deformasyonu, sadece kayma deformasyonunu ve sadece dönme eylemsizliğini hesaba katan teorilere yer verilmiş böylece herbir kabulün boyutsuz frekans üzerindeki etkisi ayrı ayrı incelenmiştir.

Beş farklı mesnet tipinde incelemeler yapılmış, kiriş açısı, narinlik oranı ve kademe oranı değişkenleri için çubuğun ilk beş moduna ait boyutsuz frekans değerleri incelenmiştir. İki kademeli değişken kesitli çubukta, tek kademeli çubuktan farklı olarak kademe açıklığının kiriş açıklığına oranı üç farklı değer için gözönüne alınarak hesaplara dahil edilmiştir. Literatürdeki çalışmalardan farklı olarak kademe konumunun değişimi vurgulanmış, asimetrik durumlar ele alınmıştır.

Tek kademeli ve iki kademeli çubuklar için elde edilen boyutsuz frekans değerleri grafikler halinde sunulmuştur. Ankastre-serbest ve serbest-serbest dışındaki mesnet tiplerinde küçük kiriş açılarında eksenel deformasyon etkisi baskın durumdayken, belli bir kiriş açısından sonra kayma deformasyonunun öne çıktığı ve kabullerin frekans üzerindeki etkisinin ihmal edilebilecek kadar azaldığı görülmektedir. Ankastre-serbest ve serbest-serbest mesnetlerde, mesnetleme şartından dolayı baskın olan etki kayma deformasyonudur.

Eksenel deformasyon etkisinin yerini kayma deformasyonuna bıraktığı kiriş açısının bu değerinde, sistemde mod geçişi meydana gelmektedir. Eğri eksenli çubuk, eksenel deformasyonun baskın olduğu mod şeklinden, eksenel deformasyonun daha az baskın olduğu, eğilmenin önem kazandığı mod şekline ani bir geçiş yapmaktadır.

Çubuğun narinlik oranı azaldıkça eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliğini etkilerinin getirdiği katkıların büyüdüğü görülmektedir. Büyük narinlik oranları için kabuller sadece kiriş açısının düşük değerlerinde önem kazanırken, küçük narinlik oranlarında etkilerin ihmal edilmesi frekans değerlerini oldukça etkilemektedir.

Kabullerin etkisinin ihmal edilebilecek kadar azaldığı kiriş açısı değeri, narinliğin artmasıyla azalırken, kademe oranı ve mod sayısının artması ile artış gösterir. Yani yüksek modlarda kabullerin frekans üzerindeki etkisi artmaktadır.

Literatürdeki kesiti kademeli değişen eğri eksenli çubuklarla ilgili mevcut çalışmalardan farklı olarak bu çalışmada, kademe konumunun frekans üzerindeki etkisi ayrıntılı olarak incelenmiştir. Literatürde, kademenin yalnızca ortada bulunması durumu ele alınmakta iken, bu çalışmada, kademe konumunun değişiminin frekansa etkisi, kademe oranı, kiriş açısı, mod sayısı ve narinliğe bağlı olarak ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Ayrıca çubuğun mod şeklinin, kademenin konumuna göre değişimi ele alınmış, aynı özelliklere sahip çubukta kademe konumunun değişmesi ile mod şeklinin de değiştiği gözlenmiştir. Tek kademeli çubuk için, ince olan kademenin büyümesi durumunda, çubuk titreşiminin 1. mod şeklinden 2. mod şekline geçtiği görülmüştür. Bunun yanında, kabullerin hesaba dahil edilmesi ve ihmal edilmesi durumlarında da çubuk farklı mod şekillerine sahip olmaktadır. Etkilerin ihmal edilmesi kabulünde ortaya çıkan ilk mod şekli, etkilerin dahil edilmesi kabulünde ortaya çıkan ikinci mod şekline benzemektedir. Literatürde incelenen çalışmaların hiçbirinde mod şeklinin hesabına ya da çizilmiş yerdeğiştirme durumuna rastlanmamıştır.

Günümüzde bilgisayar teknolojisinin ve paket programların gelişmesiyle birlikte, sonlu eleman yöntemi, mühendislik problemlerinde en sık kullanılan yaklaşık çözüm yöntemlerinden biri durumuna gelmiştir. Bu çalışmada sonlu eleman yönteminden de faydalanılmış, iki tip çubuk geometrisi için de üç boyutlu elastik çubuk eleman kullanılarak sonlu eleman modelleri hazırlanmıştır. Kademenin değişken konumları için elde edilen düzlem içi titreşime ait frekanslar kesin çözüm sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Kesin çözüm ve yaklaşık çözümün birbirlerine oldukça yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Ancak sonlu eleman modelinde kullanılan elemanın kayma deformasyonunu içermemesi nedediyle. model daha rijit davranmakta ve yaklaşık çözüm sonuçları, gerçek frekans değerlerinden daha yüksek değerlere sahip olmaktadır.

Bu çalışma, eğri eksenli çubuklarla ilgili gelecekte yapılacak çalışmalar için bir kaynak niteliği taşımaktadır. Kademe sayısının artırılması mümkündür. Sürekli değişken kesite sahip eğri eksenli çubuk, sabit kesitli birçok elemana ayrılarak incelenebilir. Böylece her bir elemana kesin çözümü uygulanabilir. Bu yöntem, sürekli değişken kesite sahip çubuk için yaklaşık bir çözüm olmakla beraber, kademe sayısının artırılmasıyla sistemin gerçek frekans değerine yakınsama sağlanacaktır.

KAYNAKLAR

[1]. **Love, A.E.H.,** 1994. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, *Dover Publication*, New York.

[2]. **Den Hartog, J.P.,** 1952. Advanced Strength of Materials, McGraw-Hill Book Co., New York.

[3]. **Verniere De Irassar, P.L., Laura, P.A.A.,** 1986. A Note on the Analysis of the First Symmetric Mode of Vibration of Circular Arches of Non-Uniform Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, V.116, 580-584.

[4]. **Laura, P.A.A., Verniere De Irassar, P.L., Carnicer, R., Berteo, R.,** 1988. A Note on Vibrations of a Circumferential Arch with Thickness Varying in a Discontinuous Fashion, *Journal of Sound and Vibration*, V.120(1), 95-105.

[5]. **Gutierrez, R.H., Laura, P.A.A., Rossi, R.E., Berteo, R., Villaggi, A.,** 1989. In-Plane Vibrations of Non-Circular Archs of Non-Uniform Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, V.129(2), 181-200.

[6]. **Auciello, N.M., Rosa, M.A.,** 1994. Free Vibrations of Circular Arches: A Review, *Journal of Sound and Vibration*, V.176(4), pp. 433-458.

[7]. **Rossi, R.E., Laura, P.A.A.,** 1995. Numerical Experiments on Dynamic Stiffening of a Circular Arch Executing In-Plane Vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, V.187(5), 897-909.

[8]. **Tong, X., Mrad, N., Tabarrok, B.,** 1998. In-Plane Vibration Of Circular Arches with Variable Cross-Sections, *Journal of Sound and Vibration*, V.212(1), 121-140.

[9]. **Tüfekçi, E.,** 1999. Exact Solution of in-Plane Vibrations of Stepped Circular Arches, *Asia-Pacific Vibration Conference '99*, V. 2, 1158-1163, Singapore.

[10]. **Tüfekçi, E.,** 2001. In-Plane Vibrations of a Circular Arch of Discontinuously Varying Cross-Section, Proceedings of IMAC XIX, *A Conference on Structural Dynamics,* V. 2, 1688-1694, Florida, A.B.D.

[11]. **Tüfekçi, E., Özdemirci, Ö.,** 2002. On the Dynamic Stiffening of a Stepped Circular Arch: Exact Solution, *6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, Paper No. APM-067, Istanbul, Türkiye.

[12]. **Liu, G.R., Wu, T.Y.,** 2001. In-Plane Vibration Analyses of Circular Arches by the Generalized Differantial QuadratureRule, *International Journal of Mechanical Sciences*, V.43, 2597-2611.

[13]. **Cinemre, V.,** 1982. Çubuk Teorisinde Yer ve Şekil Değiştirme İlişkileri, *İTÜ Dergisi*, Cilt 40, 3-6.

[14]. **Arpacı, A., Tüfekçi, E.,** 1998. Exact Solution of In-Plane Vibrations of Circular Arches with Account Taken of Axial Extension, Transverse Shear and Rotatory Inertia Effects, *Journal of Sound and Vibration,* 209(5), 845-856.

[15]. **Tarnopolskaya, T., De Hoog, F.R., Fletcher, N.H.,** 1999. Low-Frequency Mode Transition in the Free in-Plane Vibration of Curved Beams, *Journal of Sound and Vibration*, V.228(1), 69-90.

[16]. **Tarnopolskaya, T., De Hoog, F.R., Fletcher, N.H., Thwaites, S.,** 1996. Asymptotic Analysis of the free in-Plane Vibrations of Beams with Arbitrarily Varying Curvature and Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, V.196(5), 659-680.

[17]. **Tüfekçi, E.,** 2001. Exact Solution of Free in-Plane Vibration of Shallow Circular Arches, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, V.1, No: 3, 409-428.

[18]. **ANSYS Help Topics,** 2000.Release 5.7, ANSYS, Inc., Connonsburg The United States of America.

EKLER

EK A. Tek Kademeli Değişken Kesitli Çember Eksenli Çubuğa Ait Sonlu Eleman ve Kesin Çözüm Sonuçlarının Karşılaştırılması

EK B. İki Kademeli Değişken Kesitli Çember Eksenli Çubuğa Ait Sonlu Eleman ve Kesin Çözüm Sonuçlarının Karşılaştırılması

EK A. Tek Kademeli Değişken Kesitli Çember Eksenli Çubuğa Ait Sonlu Eleman ve Kesin Çözüm Sonuçlarının Karşılaştırılması

Tablo A. 1. Tek kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukta kademenin ψ / ϕ_T = 0.4 konumuna ait sonlu eleman ve kesin çözüm sonuçlarının karşılaştırılması

Mod	Ankastre-Ankastre			Ankastre-Serbest			Sabit-Ankastre			Sabit-Sabit			Serbest-Serbest		
Sayısı	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata
1	788.473	808.94	2.60	58.873	58.96	0.14	624.965	635.45	1.68	510.532	515.89	1.05	326.282	327.39	0.34
2	1302.676	1335.40	2.51	280.553	283.18	0.94	1225.763	1255.60	2.43	1121.129	1142.90	1.94	909.011	919.67	1.17
3	1998.189	2036.00	1.89	857.638	874.82	2.00	1886.098	1901.60	0.82	1857.007	1863.70	0.36	1766.304	1808.70	2.40
4	2638.218	2802.60	6.23	1688.568	1745.60	3.38	2402.612	2519.10	4.85	2166.925	2244.80	3.59	2851.692	2964.30	3.95
5	4002.587	4083.50	2.02	2501.028	2538.60	1.50	3697.901	3945.40	6.69	3404.734	3582.50	5.22	4129.693	4318.10	4.56

Tablo A. 2. Tek kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukta kademenin ψ / ϕ_T = 0.3 konumuna ait sonlu eleman ve kesin çözüm sonuçlarının karşılaştırılması

Mod	Ankastre-Ankastre			Ankastre-Serbest			Sabit-Ankastre			Sabit-Sabit			Serbest-Serbest		
Sayısı	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata
1	784.144	804.53	2.60	60.505	60.59	0.14	622.452	633.11	1.71	489.569	494.25	0.96	327.127	328.25	0.34
2	1264.458	1294.90	2.41	283.379	286.02	0.93	1189.654	1216.80	2.28	1072.419	1091.20	1.75	882.249	892.16	1.12
3	1994.003	2029.00	1.76	833.983	849.89	1.91	1882.306	1898.50	0.86	1854.517	1860.70	0.33	1675.585	1711.60	2.15
4	2581.167	2727.90	5.68	1606.024	1655.70	3.09	2352.349	2454.10	4.33	2117.847	2188.90	3.35	2714.416	2811.10	3.56
5	3961.228	4047.60	2.18	2462.221	2513.40	2.08	3652.484	3876.60	6.14	3375.632	3549.80	5.16	4001.370	4219.30	5.45

Tablo A. 3. Tek kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukta kademenin $\psi\ /\ \phi_T$ = 0.2 konumuna ait sonlu eleman ve kesin çözüm sonuçlarının karşılaştırılması

Mod	**Ankastre-Ankastre**			**Ankastre-Serbest**			**Sabit-Ankastre**			**Sabit-Sabit**			**Serbest-Serbest**		
Sayısı	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata
1	761.550	779.65	2.38	61.660	61.75	0.14	604.160	613.65	1.57	469.815	473.82	0.85	317.062	318.13	0.34
2	1248.490	1278.40	2.40	277.776	280.23	0.88	1165.369	1190.30	2.14	1062.951	1081.70	1.76	830.218	838.29	0.97
3	1997.041	2028.20	1.56	785.647	799.21	1.73	1885.475	1899.80	0.76	1864.367	1870.10	0.31	1631.279	1665.10	2.07
4	2571.482	2719.50	5.76	1556.492	1604.10	3.06	2349.418	2451.20	4.33	2097.614	2168.10	3.36	2696.348	2794.80	3.65
5	3864.752	4055.90	4.95	2471.743	2529.20	2.32	3580.402	3801.10	6.16	3266.142	3421.50	4.76	3911.120	4112.20	5.14

Tablo A. 4. Tek kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukta kademenin $\psi\ /\ \phi_T$ = 0.1 konumuna ait sonlu eleman ve kesin çözüm sonuçlarının karşılaştırılması

Mod	**Ankastre-Ankastre**			**Ankastre-Serbest**			**Sabit-Ankastre**			**Sabit-Sabit**			**Serbest-Serbest**		
Sayısı	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata
1	751.436	768.49	2.27	62.156	62.24	0.14	589.692	598.03	1.41	464.744	468.61	0.83	297.690	298.59	0.30
2	1248.968	1279.70	2.46	264.918	267.03	0.80	1164.780	1190.40	2.20	1055.435	1074.10	1.77	807.752	815.18	0.92
3	1994.831	2024.90	1.51	762.914	776.00	1.72	1898.338	1912.00	0.72	1865.623	1870.40	0.26	1618.339	1652.50	2.11
4	2489.459	2623.70	5.39	1547.390	1595.00	3.08	2270.714	2364.00	4.11	2024.187	2086.00	3.05	2603.862	2688.60	3.25
5	3812.056	4055.60	6.39	2413.002	2478.10	2.70	3516.490	3725.50	5.94	3236.268	3391.90	4.81	3867.752	4064.40	5.08

Tablo A. 5. Tek kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukta kademenin ψ / ϕ_T = 0 konumuna ait sonlu eleman ve kesin çözüm sonuçlarının karşılaştırılması

Mod	**Ankastre-Ankastre**			**Ankastre-Serbest**			**Sabit-Ankastre**			**Sabit-Sabit**			**Serbest-Serbest**		
Sayısı	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata
1	753.929	771.27	2.30	61.741	61.83	0.14	589.597	597.86	1.40	466.455	470.47	0.86	276.763	277.49	0.26
2	1242.258	1273.20	2.49	251.486	253.30	0.72	1149.843	1174.80	2.17	1032.035	1048.90	1.63	807.136	814.94	0.97
3	1937.827	1961.50	1.22	764.593	778.12	1.77	1872.294	1883.40	0.59	1835.787	1840.20	0.24	1558.055	1586.90	1.85
4	2479.101	2614.30	5.45	1497.273	1539.40	2.81	2240.997	2331.70	4.05	2018.535	2081.10	3.10	2589.810	2675.70	3.32
5	3712.682	3973.90	7.04	2387.990	2454.80	2.80	3435.561	3630.70	5.68	3142.954	3279.70	4.35	3752.921	3927.60	4.65

EK B. İki Kademeli Değişken Kesitli Çember Eksenli Çubuğa Ait Sonlu Eleman ve Kesin Çözüm Sonuçlarının Karşılaştırılması

Tablo B. 1. İki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukta kademenin ψ_1 / ϕ_T = 0.4 konumuna ait sonlu eleman ve kesin çözüm sonuçlarının karşılaştırılması

Mod	**Ankastre-Ankastre**			**Ankastre-Serbest**			**Sabit-Ankastre**			**Sabit-Sabit**			**Serbest-Serbest**		
Sayısı	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata
1	840.209	864.39	2.88	62.846	62.94	0.15	695.332	709.81	2.08	542.316	548.70	1.18	320.222	321.28	0.33
2	1378.066	1412.80	2.52	272.816	275.25	0.89	1311.031	1343.80	2.50	1207.962	1234.40	2.19	936.122	948.02	1.27
3	2046.940	2098.80	2.53	855.952	873.54	2.05	1930.235	1954.40	1.25	1866.147	1874.40	0.44	1866.127	1917.20	2.74
4	2770.700	2965.30	7.02	1728.345	1794.20	3.81	2528.996	2661.60	5.24	2280.152	2370.40	3.96	3003.326	3133.50	4.33
5	4162.884	4198.90	0.87	2524.006	2556.00	1.27	3883.113	4162.00	7.18	3570.464	3778.40	5.82	4207.708	4210.00	0.05

Tablo B. 2. İki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukta kademenin ψ_1 / ϕ_T = 0.3 konumuna ait sonlu eleman ve kesin çözüm sonuçlarının karşılaştırılması

Mod	**Ankastre-Ankastre**			**Ankastre-Serbest**			**Sabit-Ankastre**			**Sabit-Sabit**			**Serbest-Serbest**		
Sayısı	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata
1	859.903	886.78	3.13	60.594	60.68	0.15	688.610	702.43	2.01	542.191	548.65	1.19	332.134	333.30	0.35
2	1341.760	1374.60	2.45	274.610	277.10	0.91	1258.840	1288.40	2.35	1157.977	1180.40	1.94	958.731	971.98	1.38
3	2049.073	2099.30	2.45	874.848	895.07	2.31	1928.850	1949.10	1.05	1862.925	1870.40	0.40	1812.708	1857.40	2.47
4	2757.686	2939.30	6.59	1695.976	1757.30	3.62	2537.749	2675.20	5.42	2274.345	2363.40	3.92	2919.400	3039.60	4.12
5	4104.533	4139.00	0.84	2490.311	2525.30	1.41	3926.554	4132.80	5.25	3620.734	3836.50	5.96	4260.210	4275.90	0.37

Tablo B. 3. İki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukta kademenin ψ_1 / ϕ_T = 0.2 konumuna ait sonlu eleman ve kesin çözüm sonuçlarının karşılaştırılması

Mod	**Ankastre-Ankastre**			**Ankastre-Serbest**			**Sabit-Ankastre**			**Sabit-Sabit**			**Serbest-Serbest**		
Sayısı	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata
1	847.335	872.59	2.98	58.819	58.90	0.14	666.055	678.21	-1.82	524.733	530.31	1.06	343.345	344.68	0.39
2	1314.794	1346.00	2.37	283.509	286.31	0.99	1255.051	1285.70	-2.44	1150.211	1173.00	1.98	927.329	938.74	1.23
3	2080.114	2128.00	2.30	856.164	874.86	2.18	1974.901	1999.00	-1.22	1885.859	1893.90	0.43	1785.438	1829.30	2.46
4	2806.903	2997.00	6.77	1696.077	1753.00	3.36	2546.804	2683.60	-5.37	2314.096	2409.30	4.11	2963.618	3094.80	4.43
5	4074.624	4107.40	0.80	2485.002	2519.00	1.37	3878.927	4076.40	-5.09	3572.187	3780.40	5.83	4276.413	4338.30	1.45

Tablo B. 4. İki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukta kademenin ψ_1 / ϕ_T = 0.1 konumuna ait sonlu eleman ve kesin çözüm sonuçlarının karşılaştırılması

Mod	**Ankastre-Ankastre**			**Ankastre-Serbest**			**Sabit-Ankastre**			**Sabit-Sabit**			**Serbest-Serbest**		
Sayısı	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata	MATLAB	SEY	% Hata
1	830.980	854.09	2.78	57.445	57.53	0.14	664.959	677.55	-1.89	514.650	519.74	0.99	348.405	349.84	0.41
2	1319.166	1350.70	2.39	289.154	292.20	1.05	1259.845	1290.60	-2.44	1165.706	1190.40	2.12	899.928	909.78	1.09
3	2134.547	2189.90	2.59	843.737	859.96	1.92	1981.295	2005.80	-1.24	1917.213	1926.50	0.48	1831.610	1882.50	2.78
4	2756.607	2937.30	6.55	1727.002	1790.20	3.66	2525.643	2658.00	-5.24	2257.594	2343.20	3.79	2911.195	3030.70	4.11
5	4051.013	4079.90	0.71	2513.698	2547.40	1.34	3897.671	4053.70	-4.00	3605.567	3824.20	6.06	4287.028	4357.50	1.64

ÖZGEÇMİŞ

Öznur ÖZDEMİRCİ, 22 Ağustos 1979 tarihinde İstanbul'da doğdu. İlköğretimini tamamladıktan sonra, orta ve lise tahsilini Kadıköy Kız Lisesi' nde sürdürerek, 1996 yılında Fen Bilimleri Bölümü' nden mezun oldu. Aynı yıl, İTÜ Makina Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. Beş yıllık lisans eğitiminin ardından, Haziran-2001' de Sistem Dinamiği ve Otomatik Kontrol Bölümü'nden mezun oldu. Bu arada, Haziran 2000 - Haziran 2001 tarihleri arasında, İTÜ Sanayi ile İşbirliği Projesi kapsamında, Mercedes Benz Türk Fabrikası Geliştirme Bölümü'nde bitirme tezinin oluşturan projede görev aldı.

2001 yılında İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Ana Bilim Dalı Makina Teorisi, Sistem Dinamiği ve Kontrol Programı'nda Yüksek Lisans yapmaya hak kazandı. Aynı yıl Makina Fakültesi, Mukavemet Birimi'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başlayan Öznur ÖZDEMİRCİ, halen aynı yerde çalışmalarını sürdürmektedir.