

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PETRİ AĞ ÇEŞİTLERİ VE DİFERANSİYEL PETRİ
AĞLARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Fatih GÜNDOĞAN**

**Anabilim Dalı: Elektrik Mühendisliği
Programı: Kontrol Mühendisliği**

HAZİRAN 2008

**PETRİ AĞ ÇEŞİTLERİ VE DİFERANSİYEL PETRİ
AĞLARI**

YÜKSEL LİSANS TEZİ

Müh. Fatih GÜNDOĞAN

504051123

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 Mayıs 2008

Tezin Savunulduğu Tarih : 10 Haziran 2008

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Leyla GÖREN

Diğer Jüri Üyeleri Doc.Dr. Salman KURTULAN

Doc.Dr. Mürrivet ÜÇER

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Teknolojideki gelişimin bir önceki neslin tahmin edebileceğinin ötesinde bir hıza ulaşmaya başlaması ile birlikte, son yüzyılda sistemlerin modellenmesi, analizi ve benzetimi giderek önem kazanmıştır. Buna paralel olarak, her birisi birer aydınlanma yuvası olan üniversitelerde, insanlığın sistemlerden en fazla verimi elde edebilmesi için çeşitli modelleme, analiz ve benzetim yöntemleri geliştirilmeye devam etmektedir. Biz bu sürecin farkında olan kontrol mühendisleri olarak, bilim dünyasındaki ilerlemeyi iyi takip etmek ve bu gelişim sürecinin bir parçası olmak zorundayız.

Tezime başlamadan önce Petri Ağları diye bir kavramın varlığından haberdardım ancak Türk bilim literatürünü taradığımda, üzüntüyle gördüm ki, Türk bilim insanlarının bu konuda yaptıkları çalışmalar dünya ölçeği ile kıyaslandığında yeterli düzeyde değil. Bu noktadan sonra, değerli danışman hocam Prof. Dr. Leyla GÖREN'in de teşviki ile Modelleme dünyasında nispeten yeni bir kavram olan "Petri Ağları" konusunda çalışmaya başladım.

Tezimin ilk bölümünde çalışmanın amacını tanımladım. İkinci bölümde klasik petri ağları ile ilgili genel tanımlamaları verdikten sonra, üçüncü bölümde literatürde kullanılan petri ağı çeşitlerini genel olarak derledim. Dördüncü ve beşinci bölümlerde ayrık, sürekli ve melez petri ağları ile sistem modellemesi için çeşitli örnekler verdim. Tanımlar ve modellemenin ardından, altıncı bölümde petri ağlarının analizi ile ilgili bir özetlemede bulunduktan sonra, son bölüm olan yedinci bölümde çeşitli petri ağı benzetim araçlarını tanıttım.

Tezimin tamamlanmasında metnin tamamını defalarca okuyarak hatalarımı bana sabırla gösteren değerli danışmanım Prof. Dr. Leyla GÖREN'e ve tezi tamamlamak için çalıştığım işi bırakmam gerektiğinde desteklerini benden esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Mayıs, 2008

Fatih GÜNDOĞAN

İÇİNDEKİLER

TÜRKÇE – İNGİLİZCE TERİM EŞLEŞTİRMESİ	iv
KISALTMALAR	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÖZET	viii
SUMMARY	x
1. GİRİŞ	
1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı	1
2. GENEL TANIMLAMALAR	3
2.1. Petri Ağları Tanımları ve Notasyon	3
2.2. Jeton Kavramı	6
2.3. Petri Ağı Dinamikleri	6
3. PETRİ AĞI ÇEŞİTLERİ	8
3.1. Ayrık Petri Ağları	8
3.2. Sürekli Petri Ağları (Akışkan Petri Ağları)	10
3.2.1. Sabit Hızlı Sürekli Petri Ağları-SHSPA	11
3.2.2. Değişken Hızlı Sürekli Petri Ağları-DHSPA	12
3.2.3. Diğer Sürekli Petri Ağları	12
3.2.4. Diferansiyel Petri Ağları	13
4. AYRIK PETRİ AĞLARI İLE MODELLEME	23
4.1. Modellemede Kullanılan Yapılar	23
4.1.1. Çakışma	23
4.1.2. Sıralama	23
4.1.3. Senkronizasyon	24
4.1.4. Paralellik	24
4.1.5. Kaynak Sınırlama	25
4.2. Petri Ağı Özellikleri	25
4.2.1. Sınırlılık	25
4.2.2. Güvenlilik	26
4.2.3. Canlılık	26
4.2.4. Ölümcül Kilitlenme	26
4.2.5. Koruyuculuk	26
4.3. Örnek Modeller	26
4.3.1. Ayrık Petri Ağı (Bir kimyasal reaksiyon)	26
4.3.2. Ayrık Petri Ağı (Bir iletişim protokolü, senkronizasyon kontrolü)	27
5. SÜREKLİ ve HİBRİT PETRİ AĞLARI İLE MODELLEME	30
5.1. Modellemede Kullanılan Yapılar	30
5.2. Örnek Modeller	30
5.2.1. Üç tanklı bir sistemin SPA modellemesi, makro-jetonlama	30
5.2.2. Hibrit bir sistemin HPA modellemesi	31
5.2.3. Van Der Pol Osilatörünün DPA modellemesi	35
6. PETRİ AĞLARI ANALİZİ	37

7. PETRİ AĞLARI BENZETİMİ	39
SONUÇ	41
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	44

TÜRKÇE-İNGİLİZCE TERİM EŞLEŞTİRMESİ

Ayrık Olay Sistemi: *Discrete Event System*

Geçiş: *Transition*

Kaynak Geçişi: *Source Transition*

Sonlanma Geçişi: *Sink Transition*

Petri Ağı: *Petri Net*

Sınırlı Petri Ağı: *Bounded Petri Net*

Güvenli Petri Ağı: *Safe Petri Net*

Ayrık Petri Ağı: *Discrete Petri Net*

Zaman Etiketli Petri Ağı: *Timed Petri Net*

Zaman Petri Ağı: *Time Petri Net*

Sürekli Petri Ağı: *Continuous Petri Net*

Hızlı Sürekli Petri Ağı: *Constant Speed Continuous Petri Net*

Değişken Hızlı Sürekli Petri Ağı: *Variable speed Continuous Petri Net*

Asimptotik Sürekli Petri Ağı: *The Asymptotic Continuous Petri Net*

İç hızlı Sürekli Petri Ağı: *Interval speed Continuous Petri Net*

Diferansiyel Petri Ağı: *Differential Petri Net*

Melez Petri Ağı: *Hybrid Petri Net*

Aktif: *Enabled*

Jetonlama: *Marking*

Geçicileştirme: *Temporization*

Kapsanabilirlik Ağacı: *Cover ability Tree*

Tekrar oranı matrisi: *Incidence matrix*

Olaylar-arası durum: *Inter-event state*

Hesaplama çizelgesi: *Evolution graph*

Çakışma: *Conflict*

Kısaltmalar:

AOS: Ayrık Olay Sistemi

PA: Petri Ağı

PN: Petri Ağı

SPA: Sürekli Petri Ağı

SHSPA: Sabit Hızlı Sürekli Petri Ağı

DHSPA: Değişken Hızlı Sürekli Petri Ağı

DPA: Diferansiyel Petri Ağı (Differential Petri Net)

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1: Petri ağ yapısı.

Şekil 2.2: İşaretli(jetonlu) bir Petri ağı.

Şekil 2.3: Tetikleme mekanizması.

Şekil 3.1: P-zaman etiketli Petri ağı örneği.

Şekil 3.2: T-zaman etiketli Petri ağı örneği.

Şekil 3.3: Ayrık Petri ağı yapısı.

Şekil 3.4: Basit bir sürekli Petri ağı.

Şekil 3.5: Diferansiyel Petri ağ modelinde kullanılan düğümler.

Şekil 3.6: Söзде ayrık diferansiyel geçişin genişletilmiş görüntüsü.

Şekil 3.7: Diferansiyel Petri ağlarında olası bağlantılar ve özellikleri.

Şekil 3.8: DPA çalışma algoritması

Şekil 3.9: Hesaplama çizelgesinin bir düğümü

Şekil 4.1: Çakışma örneği.

Şekil 4.2: Sıralama örneği.

Şekil 4.3: Senkronizasyon örneği.

Şekil 4.4: Paralellik örneği.

Şekil 4.5: Kaynak sınırlama örneği.

Şekil 4.6: 3-sınırlı bir Petri ağı örneği.

Şekil 4.7: Basit bir kimyasal reaksiyon.

Şekil 4.8: Basit bir iletişim protokolü, senkronizasyon kontrolü.

Şekil 5.1: Üç tanklı ve 4 valfli bir sistemin SPA modellenmesi.

Şekil 5.2: Hibrit bir sistemin DPA modeli.

Şekil 5.3: Örnek 5.2.1'e ilişkin hesaplama çizelgesi.

Şekil 5.4: Non-lineer bir petri ağı örneği.

Şekil 5.5: Örnek 5.2.3 faz plotu

Şekil 7.1: HISIM hibrit petri ağ simülatörü ekran görüntüsü

PETRİ AĞ ÇEŞİTLERİ VE DİFERANSİYEL PETRİ AĞLARI

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, Petri ağlarının Carl Adam Petri tarafından ortaya atılmasından itibaren geçirdiği serüvenin incelenmesi ve diferansiyel sistemlerin petri ağları ile nasıl modellenebileceğinin araştırılmasıdır.

Petri ağları ayırık olay sistemlerinin modellenmesi amacıyla tasarlanmış bir modelleme aracıdır, ancak zaman içerisinde kullanım alanı genişleyerek sürekli sistemlerin modellenmesi gibi farklı ihtiyaçlara cevap verebilecek şekilde geliştirilmiştir. Petri ağlarında üç temel kavram vardır. Bunlar jetonlar, yerler ve geçişler olarak ifade edilebilir. Yerler durumları, geçişler olayları, jetonlar ise sistemin dinamiklerini ifade ederler. Jetonlar yerler içerisine yerleştirilirler ve geçişler yerleri birbirlerine bağlarlar. Sistem dinamiği değişmesi için geçişlerin tetiklenmesi gerekir.

Petri Ağının tanımı:

Bir Petri ağının en yaygın tanımını kullanılırsa, bir Petri ağı $R = \langle P, T, A, W, M_0 \rangle$ ifadesi ile gösterilebilir. Burada;

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$: Sonlu yerler kümesidir. İçi boş çemberlerle gösterilir.

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$: Sonlu geçişler kümesidir. Dik bir çizgi ile yahut içi boş bir kare ile gösterilir.

A : Akış ilişkisini gösteren yönlü yaylar kümesidir. $[A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)]$, yönlü bir yay ile gösterilir.

W : Yaylara ilişkin ağırlık fonksiyonlarıdır. Yönlü yayların üzerine yazılarak gösterilir.

M_0 : Yerlere ilişkin ilk jetonlama değeridir.

Petri Ağlarının özellikleri:

Sınırlılık Özelliği

Bir P_i yeri için, m_0 başlangıç durumundan ulaşılacak tüm m_i değerleri, uygun bir $k \in \mathbb{N}^+$ değerinden küçük kalıyorsa, P_i yeri k -sınırlıdır. Bir Petri Ağının tüm yerleri sınırlı ise Petri ağı sınırlıdır. (Eğer tüm yerler k -sınırlı ise, Petri ağı da k -sınırlıdır şeklinde ifade edilir)

Güvenlilik Özelliği

Bir Petri ağı 1-sınırlı ise, güvenli petri ağı olarak adlandırılır.

Canlılık Özelliği

Bir Petri ağında, m_0 başlangıç durumundan ulaşılabilen tüm m_i durumları için aktif bir geçiş bulunabiliyorsa, o Petri ağı canlı Petri ağı olarak adlandırılır.

Ölümcül kilitleme (deadlock)

Herhangi bir durumda, petri ağının hiçbir geçişi aktif değil ise, bu durum ölümcül kilitleme olarak adlandırılır. Petri ağı bu andan sonra artık durum değiştiremez hale gelir.

Koruyuculuk Özelliği

Bir Petri ağına ilişkin geçişlerin tetiklenmesi ile Petri ağındaki toplam jeton sayısı değişmiyorsa bu Petri ağı koruyucu Petri ağı olarak adlandırılır.

Bu çalışmada klasik Petri ağları ile başlayarak diferansiyel Petri ağlarına kadar geniş bir spektrumda farklı Petri ağları tanıtılmıştır. Bu tanımlara ilişkin çeşitli örnekler verilmiş ve çeşitli benzetim araçları gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Petri ağı, diferansiyel petri ağı, benzetim, non-lineer sistem

PETRI NET TYPES AND DIFFERENTIAL PETRI NETS

SUMMARY

The aim of this work is to investigate the adventure of Petri Nets since the Carl Adam Petri's assertions in 1960s and to investigate how to model differential systems by Petri nets approach.

In 60s, Petri Nets is first introduced as a modeling tool for discrete event systems but then it is developed and the usage area is widened to answer some needs such as modeling the continuous systems. In Petri Nets, there exist three main concepts. Places, Transitions and Marking. Places indicate the states, transitions indicate the events and the marking indicate the system dynamics. Marking is the value of the places and a transition connects the places. And firing a transition changes the system dynamics.

Representation of a Petri Net:

There are more than one definition in the literature, but the most used one is below:

Petri Net: $R = \langle P, T, A, W, M_0 \rangle$ where;

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$: Set of Places. (Graphically: empty circles)

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$: Set of transitions. (Graphically: bars)

A : Set of directional arcs that shows the flow relationship. [$A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$],

(Graphically: directional arc).

W : Weight functions related to the arcs. (Graphically: written on the directional arcs)

M_0 : Initial marking related to places.

Properties of a Petri Net:

Boundedness

If, for a place P_i , all m_i values, that can be reached from m_0 initial condition, are smaller than a suitable $k \in \mathbb{N}^+$, then the place P_i is k -bounded.

If all places of a PN is bounded, then the PN is also bounded. (If all places are k -bounded, PN is also k -bounded)

Safeness

If a PN is 1-bounded, then it is called as safe PN.

Liveness

If, an enabled transition can be found for all m_i values that can be reached from m_0 initial condition, then it is called live PN.

Deadlock

If no transition in a PN is enabled for any condition, then this state is called as deadlock. Henceforth, PN can't change its state.

Conservation

If total marking in a PN doesn't change with the firing of the transitions, then it is called as conservative PN.

In this work, the concept Petri Nets is introduced in a wide spectrum from classical Petri Nets to Differential Petri Nets. Various examples related to these PN types and some simulation tools are also introduced.

Keywords: Petri Net, Differential Petri Net, Simulation, non-linear system

1. GİRİŞ

1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı

Petri Ağları, sistemlerin modellenmesinde grafiksel ya da cebirsel olarak kullanılabilen bir modelleme aracıdır. İlk olarak ayrık olay sistemlerini modellenmek için ortaya koyulsa da zamanla geliştirilerek sürekli zamanlı sistemler için de geliştirilmiştir. Bu çalışmada Petri ağları (PA) ve bu ağlara ilişkin kavramlar tanıtıldıktan sonra, Petri ağlarının bir sınıflandırmasına yer verilecektir. Daha sonra farklı Petri ağı modelleri için çeşitli örnekler incelenip, peşinden PA'ların sürekli sistemlerin modellenebilmesi için geliştirilen yeni bir sınıf olan Diferansiyel Petri Ağları incelenecektir. Bu çalışmada, Diferansiyel Petri Ağı kavramından yola çıkarak melez sistemlerin PA'lar ile modellenmesi için gerekli literatür taramasının tamamlanması amaçlanmıştır.

Petri Ağları teorisi ilk olarak 1960'lı yılların başlarında C.A. Petri tarafından ortaya koyulmuştur. Petri ağları ilk olarak ayrık olay sistemlerinin durumları ve geçiş fonksiyonları temel alınarak üretilmiştir. Günümüzde PA'lar, otomatlar ile modelleme ve analiz yöntemlerine bir alternatif olarak da kullanılmaktadır. Carl Adam Petri tarafından ayrık olay sistemlerinin modellenmesi amacıyla literatüre sunulmasından bu yana, sürekli geliştirilmiş ve Petri ağları endüstride geniş bir uygulama alanı bulmuştur.

Petri ağı kavramının zaman içerisinde, ihtiyaçlara göre genişletilmesi ile, Ayrık Petri Ağları(Renkli Petri Ağları, Zaman Etiketli Petri Ağları) , Sürekli Petri Ağları(Sabit Hızlı Sürekli Petri Ağları, Değişken Hızlı Sürekli Petri Ağları, Asimptotik Sürekli Petri Ağları, İç hızlı Sürekli Petri Ağları, Kontrollü Sürekli Petri Ağları, Diferansiyel Petri Ağları), Melez Petri Ağları olarak ayrılmıştır. Çeşitli çalışmalarla, Petri Ağı kavramındaki bu çeşitlilik daha da ileriye götürülmüştür.

Diferansiyel Petri Ağları kavramı, herhangi bir sürekli sistemin dinamiklerinin diferansiyel denklemler ile ifade edilebileceği varsayımı ile, bütün sürekli sistemleri modelleyebilecek bir araçtır.

Petri ağları kullanılarak Sistemlerin Kontrolleri de yapılabilmektedir. Ancak Petri Ağları ile sistem kontrolü tezimizin kapsamı dışında kalmaktadır.

2. GENEL TANIMLAMALAR

2.1. Petri Ağı Tanımları ve Notasyon

Literatürde bir Petri Ağı beş farklı şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 1:

Petri Ağı: $R = \langle P, T, \text{Giriş}, \text{Çıkış}, M_0 \rangle$

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$: Sonlu yerler kümesi

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$: Sonlu geçişler kümesi

Giriş: bir yerden bir geçişe olan yayları gösteren fonksiyon

Çıkış: bir geçiştten bir yere olan yayları gösteren fonksiyon

M_0 : Yerlere ilişkin ilk jetonlama değerleri

Tanım 2:

Petri Ağı: $R = \langle P, T, \alpha, \beta, M_0 \rangle$

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$: Sonlu yerler kümesi

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$: Sonlu geçişler kümesi

$\alpha = P \times T$ ileri tekrar oranı matrisi

$\beta = T \times P$ geri tekrar oranı matrisi

M_0 : Yerlere ilişkin ilk jetonlama değerleri

Tanım 3:

Petri Ağı: $R = \langle P, T, A, M_{P0}, M_{P1} \rangle$

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$: Sonlu yerler kümesi

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$: Sonlu geçişler kümesi

A : Akış ilişkisini gösteren yönlü yaylar kümesini [$A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$]

M_{P0} : Başlangıç jetonlaması

M_{P1} : Sonuç jetonlaması

Tanım 4:

Petri Ağı: $R = \langle P, T, C^-, C^+, M_0 \rangle$

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$: Sonlu yerler kümesi

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$: Sonlu geçişler kümesi
 C^- : Giriş ağırlıklarını gösteren giriş fonksiyonu matrisi
 C^+ : Çıkış ağırlıklarını gösteren çıkış fonksiyonu matrisi
 M_0 : Yerlere ilişkin ilk jetonlama değerleri

Tanım 5:

Petri Ağı: $R = \langle P, T, A, W, M_0 \rangle$

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$: Sonlu yerler kümesi

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$: Sonlu geçişler kümesi

A : Akış ilişkisini gösteren yönlü yaylar kümesi [$A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$]

W : Yaylara ilişkin ağırlık fonksiyonları

M_0 : Yerlere ilişkin ilk jetonlama değeri

İlk jetonlama değerleri gösterilmeden, bir petri ağı yapısı $N = (P, T, A, W)$ ile gösterilir. Petri ağı, ilk jetonlama değerlerinin de eklenmesi ile $R = (N, M_0)$ ile ifade edilir. [4]

Literatürde en sık kullanılan tanım bu beş tanımın sonucusudur. Tez boyunca beşinci tanım kullanılacaktır. Burada W, M_0 gibi ifadelerin alabileceği değerler farklı petri ağı çeşitlerine göre (N^+, N, R gibi) değişebilir.

Bir yerden bir geçişe giden yönlü yay: (p_i, t_j)

Bir geçişten bir yere giden yönlü yay: (t_j, p_i)

Yay ağırlığı: $w(p_i, t_j) = k$ demek, p_i yerinden t_j geçişine giden k adet yay var veya p_i yerinden t_j geçişine giden yayın ağırlığı k 'dır demektir. Bir yayın ağırlığı, yay üzerine yazılan bir rakamla belirtilmemişse, yayın ağırlığı 1 kabul edilir.

Yerlere ilişkin jeton sayıları: m_p

Geçişlere ilişkin ağırlık değerleri: m_t

Bir t_j geçişine ait olan giriş yerleri kümesi: $I(t_j)$

$$I(t_j) = \{p, p_i \in P : (p_i, t_j) \in A\}$$

Bir t_j geçişine ait olan çıkış yerleri kümesi: $O(t_j)$

$$O(t_j) = \{p, p_i \in P : (t_j, p_i) \in A\}$$

Bir p_i yerine ait olan giriş geçişleri kümesi: $I(p_i)$

$$I(p_i) = \{t, t_j \in T : (p_i, t_j) \in A\}$$

Bir p_i yerine ait olan çıkış geçişleri kümesi: $O(p_i)$

$$O(p_i) = \{t, t_j \in T : (t_j, p_i) \in A\}$$

T_j geçişinin giriş ve çıkış kümeleri sırası ile: ${}^0T_j, T_j^0$

P_i yerinin giriş ve çıkış kümeleri ise sırası ile: ${}^0P_i, P_i^0$

Notasyonları ile ifade edilebilir.

Giriş kümesi boş olan bir geçiş kaynak geçiş olarak adlandırılır. Çıkış kümesi boş olan bir geçiş ise, sonlanma geçişi olarak adlandırılır.[4]

Graflardan aşına olduğumuz şekilde ifade etmek gerekirse; Petri ağlarında geçişler olayları, yerler ise durumları belirtir [4]. Yaylar ya geçişleri yerlere yahut yerleri geçişlere bağlayabilir. Bir geçişi bir başka geçişe yahut bir yeri baka bir yere bağlayamazlar. Geçişler tetikleme mekanizması ile çalışırlar ve farklı PA modelleri için PA'ların çalışma sistemleri farklılıklar gösterir. Bu farklılıklara 3. Bölümde yer verilmiştir.

2.1'de verilen tanımlar ile örnek bir petri ağı çizebiliriz.

Örnek:

$$P = \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$$w(p_1, t_1) = 2$$

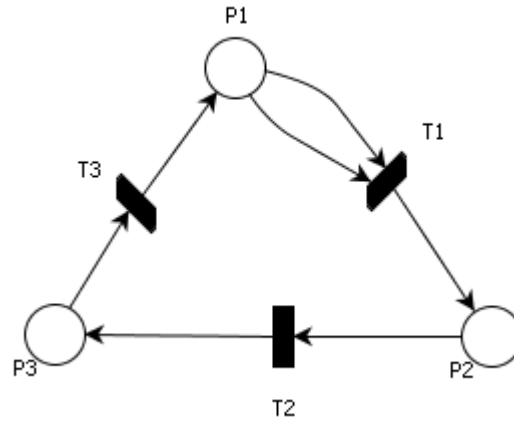
$$w(t_1, p_2) = 1$$

$$w(p_2, t_2) = 1$$

$$w(t_2, p_3) = 1$$

$$w(p_3, t_3) = 1$$

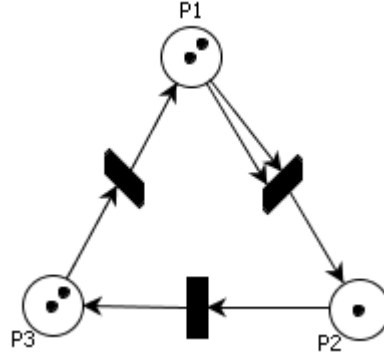
$$w(t_3, p_1) = 1$$



Şekil 2.1: 2.1 ile verilen tanımla ilişkin bir petri ağı yapısı

2.2. Petri Ağlarında Jeton Kavramı

Ayrık Petri ağlarında yerler ayrık olay sistemine ait durumları, geçişler ise olayları temsil eder. Jeton kavramı, bir olayın gerçekleşebilmesi için gerekli koşulların gerçekleşip gerçekleşmediğini anlatan bir ifade olarak karşımıza çıkar. Sistemin dinamikleri açısından da durumların değerlerini gösteren bir ifadedir.



Şekil 2.2: İşaretili(jetonlu) bir Petri Ağı

Şekil 2'de gösterilen örnekteki Petri ağının jetonlaması $\mathbf{m} = (2,1,2)$ olarak gösterilir. Burada $m_1 = m_3 = 2$ ve $m_2 = 1$ 'dir.

2.3. Petri Ağı Dinamikleri (Bir Geçişin Tetiklenmesi)

PA'larda durum değişiklikleri jetonların bir yerden bir başka yere taşınması ile gerçekleşir. Ancak bir geçişin tetiklenerek bir jetonu bir yerden bir yere taşıyabilmesi (tetiklenmesi) için, öncelikle ilgili geçişin aktif olması gereklidir.

Bir $R = (P, T, A, W, M_0)$ PA'sına ilişkin durum geçiş fonksiyonu $f: \mathbb{N}^n \times T \rightarrow \mathbb{N}^n$, aşağıdaki koşulu gerçekleştiren $t_j \in T$ için tanımlanır. (kısaca bir geçişin aktif olması için aşağıdaki gibi bir koşul tanımı yapılması gereklidir.)

$$\forall p_i \in I(t_j), x(p_i) \geq w(p_i, t_j)$$

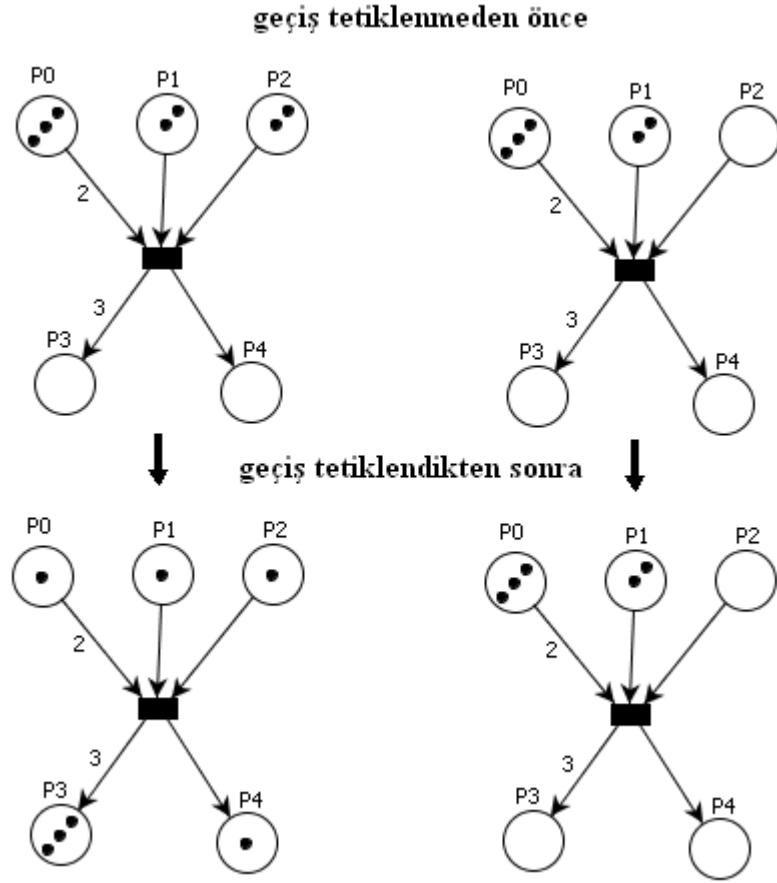
Bir f fonksiyonu tanımlı ise, $x' = f(x, t_j)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x'(p_i) = x(p_i) - w(p_i, t_j) + w(t_j, p_i), i=1, \dots, n$$

Bu, "p_i ile ilişkili bir t_j geçişi tetiklendiğinde, p_i'nin jeton sayısı, bir önceki değerine t_j'den p_i'ye giren yayların ağırlığı kadar jeton eklenir ve p_i'den t_j'ye giden yayların ağırlığı kadar jeton eksiltir" anlamına gelir.

Özetle:

- Geçişin tetiklenmesi için öncelikle tetiklenebilir olması gerekir.
- Geçiş tetiklenmesi ile PA durum değiştirir değiştirebilir.
- Geçiş tetiklenmesi ile o geçişin çıkış yerlerine yay ağırlıkları kadar jeton eklenir ve o geçişin giriş yerlerinden yay ağırlıkları kadar jeton eksiltir.



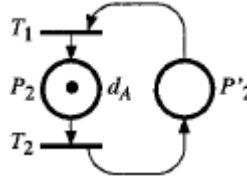
Şekil 2.2: Tetikleme mekanizması

3. PETRİ AĞI ÇEŞİTLERİ

Petri ağları temel olarak iki farklı model üzerinden çeşitli dallara ayrılmıştır. Bunlar Ayrık Petri Ağları ve Sürekli Petri Ağları olarak ifade edilebilir. Bunun yanında bir başka ayırım da Petri ağlarının tetiklenme mekanizmasına göre yapılır. Tetiklenme mekanizmalarına göre iki farklı kavram karşımıza çıkar. Zaman etiketli Petri Ağları (Timed Petri Nets) ve Zaman Petri Ağları (Time Petri Nets) olarak ifade edilebilir.

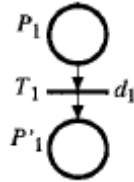
Tezimizde zaman etiketli petri ağları üzerinde duracağız.

Zaman etiketli Petri Ağları: İki farklı modelle gösterilir. Zaman geçişler ile yahut yerler ile ilişkilendirilebilir. Örneğin bir d süresi yer ile ilişkilendirilirse yerin giriş geçişi tetiklendiği anda gelen jetonlar d süresi boyunca yerde kalmak durumundadır. Yani d süresi boyunca ilgili yerin jeton sayısı değişmez. Zaman etiketli Petri ağında d süresi yerler ile ilişkilendirildiğinde, bu P-zaman etiketli Petri ağı (P-timed Petri net) olarak isimlendirilir.



Şekil 3.1: P-zaman etiketli Petri ağı örneğinde T2 geçişi d_A süresi geçmeden tetiklenemez

d süresi geçiş ile ilişkilendirildiği durumda ise ilgili geçiş aktifleştikten sonra tetiklenebilmek için d süresi kadar beklemesi gerekmektedir.



Şekil 3.2: T-zaman etiketli Petri ağı örneğinde T1 geçişi aktifleştikten (P1 girişine bir jeton atandıktan) sonra tetiklenmesi için en az d süresi kadar beklemelidir.

3.1. Ayrık Petri Ağlar (Discrete Petri Nets)

Petri Ağı kavramı ile tanıştığımızda, literatürde karşımıza ilk olarak ayrık petri ağları çıkar. Petri Ağı Notasyonu bölümünde belirttiğimiz notasyon ilk olarak ayrık petri

ağları kavramı ile birlikte ortaya koyulmuştur. Ayrık petri ağlarında, yay ağırlıkları ve yerlere ilişkin jeton sayıları pozitif tamsayılarla gösterilir.

Matematiksel ifade ile:

A: Ağ yapısı tarafından belirlenen sistem matrisi

$u(n)$: olayların ateşlenme sıralarının içerildiği yatay vektör

$x(n)$: yerlerdeki jeton sayılarıyla tanımlanan gösterildiği durum vektörü olmak üzere, Sistemin dinamik davranışı;

$$x(n+1) = x(n) + u(n).A(i,j)$$

ilişkisi ile ifade edilir, burada;

$$A(i,j) \in N, x \in N+, n \in N +$$

Veya [2]'de ifade edildiği üzere:

M_n : sistemin n. adımdaki jetonlaması

W : tekrar oranı matrisi

S : tetikleme sırasını gösteren vektör olmak üzere;

$$M_{n+1} = M_n + W . S$$

Olarak gösterilebilir.

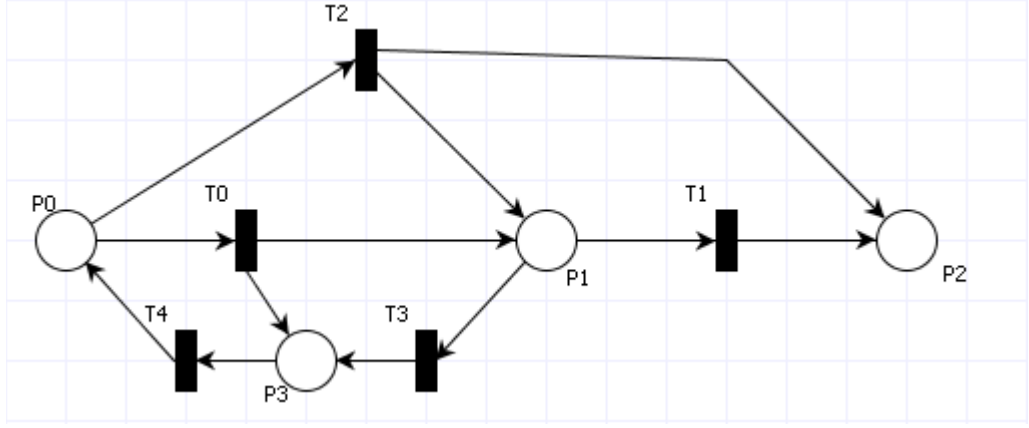
Ayrık Petri ağlarında, petri ağı ayrık geçişlerin tetiklenmesi ile durum değiştirir.

Tanım 6: Geçişlerin aktif olma durumu

Ayrık bir geçiş t anında ancak ve ancak, giriş yerindeki jeton sayısı en az tetiklenmek istenen geçişe ilişkin yayın ağırlığı kadar olması koşuluyla tetiklenebilir.

$$\forall p_i \in {}^0T_j \rightarrow M_i^n(t) \geq \text{Giriş}(p_i, t_j) \text{ koşulunda}$$

t_j : Aktiftir.



Şekil 3.3: Bir ayrık Petri ağı yapısı

Ayrık Petri Ağlarının genişletilmesi:

Ayrık Petri Ağlarına çeşitli ihtiyaçlara göre bazı ekler yapılmış ve farklı modeller oluşturulmuştur. Bu farklılaşma sonucunda genişletilmiş(extended), sonlu kapasiteli(kaynak sınırlamalı) ve renkli (coloured) petri ağları gibi tanımlar yapılmıştır. Tezde bunların yalnızca isimlerini vermekle yetineceğiz.

3.2. Sürekli Petri Ağlar (Akışkan Petri Ağlar)

Sürekli Petri ağı kavramı ilk defa klasik Petri ağının bir genelleştirilmesi olarak [1]'de sunulmuştur. Geçiş tetiklenmesi sürekli bir süreçtir ve modelin durum denklemini diferansiyel bir denklemdir. Sürekli Petri ağ yapısı, pozitif sürekli sistemlerin modellenmesine olanak sağlamakla birlikte, ayrık olay sistemlerinin modellenmesine bir yaklaşım(approximation) da sağlamaktadır. Bilindiği gibi ayrık Petri ağlarında jeton sayısı arttıkça durum sayısı da artmaktadır. Sürekli Petri ağları vasıtasıyla ayrık Petri ağlarına yapılan yaklaşımın temel avantajı, durum sayısının artmasına paralel olarak, artan olay sayısının azaltılmasıdır[1][2]. Buna ek olarak sürekli Petri ağlarının analizi de ayrık durum uzayının getirdiği hesaplama yükünden arınmıştır. Sürekli Petri Ağları çeşitli kaynaklarda karşımıza akışkan petri ağlar ismi ile de çıkar [8]. Klasik petri ağlarından temel farkı, yerlerdeki jeton sayılarının pozitif reel sayı olabilmesi ve geçişlerin belirli yahut değişken hızlarda sürekli tetiklenebilmesidir. Geçişlerdeki tetikleme hızları sabit yahut zamanla değişen özellikte olabilir.

Matematiksel ifade ile:

$$x(n + 1) = x(n) + u(n).A(i, j)$$

Burada;

$$A(i, j) \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad n \in I +$$

Olarak veya temel eşitlikle:

$$M_{n+1} = M_n + W. S$$

Şeklinde gösterilebilir.

Sürekli Petri ağlarının durumları, klasik Petri ağlarında olduğu gibi, yerlerin jetonlaması ile gösterilir. Ancak sürekli Petri ağlarındaki ulaşılabilir jetonlama sayıları, yerlerin jeton sayılarının pozitif reel sayı olması sebebiyle, sonsuz sayıda olduğu için makro-jetonlama tanımlanmıştır.

Tanım 7: Makro Jetonlama [5] [6]

N bir SPA ve M_k k anındaki jetonlaması olsun. M_k P(sonlu yerler kümesi)'yi iki alt kümeye bölebilir:

- $P^+(M_k)$: jeton sayısının pozitif olduğu yerler kümesi
- $P^0(M_k)$: jeton sayısının sıfır olduğu yerler kümesi

Makro Jetonlama, aynı P^+ ve P^0 alt kümelerine sahip kümeleri ifade eder ve bir boolean vektör ile karakterize edilebilir.

$$V: \quad P \rightarrow \{0, 1\}$$

$$P_i \rightarrow \begin{cases} 1 & : P_i \in P_1 \\ 0 & : P_i \in P_2 \end{cases}; P_1 = P^+; P_2 = P^0$$

Makro jetonlama m_j^* ile gösterilir. (bkz: 5.2.1)

Tetikleme hızlarındaki farklılıklar sürekli petri ağı modellerine çeşitlilik getirmiştir.

3.2.1. Sabit Hızlı Sürekli Petri Ağları-SHSPA

SPA modelleri arasında ilk tanımlanan SPA modelidir[6]. N bir SPA olmak üzere, $N_c = (N, V)$ olarak ifade edilebilir. Burada V her T_j geçişine bir en büyük ateşleme hızı V_j atayan bir fonksiyondur ve;

$$V: \quad T \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$T_j \rightarrow V_j$$

Şeklinde gösterilebilir.

Bir T_j ilişkilendirilen $v_j(t)$ anlık hızı, jetonların geçiş boyunca akış hızı olarak ifade edilir ve 0 ile V_j arasında değişir. SHSPA'lerde geçişlerin aktifliği, klasik PA'lardan farklıdır. Bir SHSPA'nın geçişleri iki duruma sahiptir.

1. $\forall P_i \in {}^oT_j, P_i \in P^+$ ise, geçiş güçlü aktiftir (strongly enabled).

Bu durumda T_j geçişi maximal ateşleme hızı V_j ile tetiklenir.

2. $\exists P_i \in {}^oT_j, P_i \in P^0$ ise, geçiş zayıf aktiftir (weakly enabled).

Bu durumda T_j geçişi, V_j 'den daha küçük bir v_j hızı ile tetiklenir.

SHSPA'ların durum denklemi: $\dot{m} = W \cdot v(t)$ ile gösterilir. Burada W , PA'nın tekrar oranı matrisidir. Bu bize anlık hız vektörü bilindiği takdirde, SHSPA'ların durumlarının yukarıdaki durum denkleminin çözülmesi ile bulunabileceğini söylemektedir. SHSPA'larda her düğüm 'faz' olarak adlandırılır.[5][6]

3.2.2. Değişken Hızlı Sürekli Petri Ağları-DHSPA

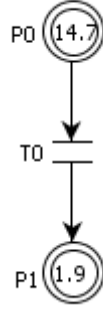
DHSPA'lar AOS'lerin modellenmesinde daha hassas (precise) yaklaşımlar yapılmak istendiği zaman kullanılabilir. Geçişlerin anlık hızlarının hesaplama farklılığıyla, SHSPA'lardan ayrılır. DHSPA'larda T_j geçişine ait tetikleme hızı aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$v_j(t) = V_j \min_{P_i \in {}^oT_j} m_i$$

3.2.3. Diğer Sürekli Petri Ağları

3.2.1 ve 3.2.2 dışında literatürde Asimptotik Sürekli Petri Ağları-ASPA, İç hızlı Sürekli Petri Ağları – İSPA, Kontrollü Sürekli Petri Ağları – KSPA gibi çeşitli tanımlamalar da mevcuttur.

Genel olarak sürekli Petri Ağları bu şekilde ifade edilebilir. Aşağıda bir sürekli Petri Ağı örneği gösterilmektedir.

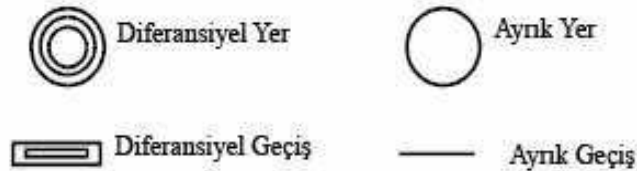


Şekil 3.4: Basit bir sürekli Petri ağı

3.2.6. Diferansiyel Petri Ağlar[3]

Sürekli sistemlere ilişkin çeşitli Petri Ağ modellerini inceledikten sonra, sürekli sistemlere ilişkin yeni bir tanımlama sayılabilecek Diferansiyel Petri Ağları tanımına geçiş yapabiliriz. Diferansiyel Petri Ağ modeli Sürekli Petri Ağları'nın zamana bağlı hız değişimi gibi avantajlarıyla, Ayrık Petri Ağ modelinin avantajlarına sahiptir. Herhangi bir sürekli sistemin lineer birinci dereceden n adet diferansiyel durum denklemi ile ifade edilebileceği varsayımı altında, Diferansiyel Petri Ağ modeli melez sistemleri tek bir grafla ifade etme yeteneğine sahiptir.

Bir Diferansiyel Petri Ağı iki çeşit yerden ve iki çeşit geçiştten oluşur. Bunlar diferansiyel yer, diferansiyel geçiş, ayrık yer ve ayrık geçiş olarak ifade edilir ve Resim 1'deki şekilde gösterilir. Bunların yanında çeşitli kaynaklarda gerekli görüldüğü durumlarda ek olarak sürekli geçişlerin ve sürekli yerlerin de kullanılabileceği vurgulanmıştır.



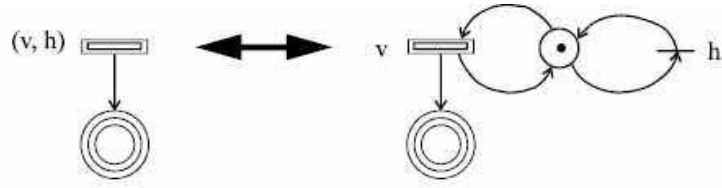
Şekil 3.5: Diferansiyel Petri ağ modelinde kullanılan düğümler

Dinamik melez petri ağlarındaki gibi, diferansiyel yerin jeton sayısı sürekli sistemin bir durum değişkenini ifade eder ve bir reel sayı olabilir.

Her diferansiyel geçişe bir yerin jeton sayısı (veya durum değişkeniyle) orantılı yahut bağımsız bir tetikleme hızı verilir. Diferansiyel geçişlerin her zaman aktif

olmasından dolayı, sürekli bir sistemi ayrıklaştırabilmek için her bir geçişe bir tetikleme frekansı (örnekleme frekansı gibi) atanır. Tetikleme frekansı bir simülasyonun entegrasyon adımı gibi algılanmalıdır. Petri Ağ Teorisine göre, bu gecikme Resim 2’de gösterildiği gibi diferansiyel geçişe bağlanmış sözde ayrık bir yere bağlanmış sözde ayrık bir geçiş ile ilişkilendirilir.

Diferansiyel geçişin bu doğal karakteri otonom diferansiyel petri ağlarının tanımlanmasına izin vermez. Gerçekte, diferansiyel geçişin doğasında var olan zaman mefhumu, sürekli sistemlerin belirli bir periyot (entegrasyon adımı) ile ayrıklaştırılmasına müsaade eder. Bu sebeple tanımı gereği diferansiyel petri ağı, zaman etiketli diferansiyel petri ağı olarak da tanımlanabilir.



Şekil 3.6: Sözde ayrık diferansiyel geçişin genişletilmiş görüntüsü

Zaman Etiketli Diferansiyel Petri Ağları:

Tanım 8: Zaman etiketli diferansiyel petri ağı, aşağıda belirtilecek şartları sağlayan bir $B = \langle R, f, c, M_0, Zaman \rangle$ denklemi ile tanımlanır:

1. $R = \langle P, T, Giriş(Pre), Çıkış(Post) \rangle$ olarak gösterilen bir petri ağıdır. Öyle ki;
P: Sonlu yerler kümesi, $|P| = n$
T: Sonlu geçişler kümesi, $|T| = m$
 $P \cap T = \emptyset$ ve $P \cup T \neq \emptyset$
Giriş(P_i, T_j) bir yerden bir geçişe olan yayları gösteren fonksiyon
Çıkış(P_i, T_j) bir geçişten bir yere olan yayları gösteren fonksiyon
2. $f: P \cup T \rightarrow \{D, DF\}$ olarak gösterilen, “diferansiyel fonksiyon” olarak isimlendirilen ve her düğümün ayrık yahut diferansiyel olduğunu gösteren bir fonksiyondur.
3. M_0 ilk durumdaki jeton sayısını gösteren bir vektördür.
4. $Zaman$, her geçişe zamanla değişebilen bir rasyonel sayı, her diferansiyel geçişe de entegrasyon adımını belirten bir gecikme atayan bir vektördür.

Diferansiyel Petri Ağlarının Giriş ve Çıkış fonksiyonları

- *Ayrık yer için*

Eğer $f(P_i) = D$ ise,

Giriş(P_i, T_j) ve Çıkış(P_i, T_j) pozitif tamsayılardır

- *Diferansiyel yer için*

Eğer $f(P_i) = DF$ ise,

Giriş(P_i, T_j) ve Çıkış(P_i, T_j) reel sayılardır

Ayrık yahut diferansiyel bir geçişi, diferansiyel bir yere bağlayan yaylara negatif ağırlıklar atanabilir. Çeşitli benzetim araçlarında bir yönlü yaya negatif ağırlık atanmadığı durumlarda, bir yerden bir geçişe, bir giriş bir de çıkış yönlü yayı tanımlanarak, bu iki yayın ağırlık farkı giriş yönünde pozitif olacak şekilde ayarlama yapılabilir. Bu yapı çıkış yayına negatif ağırlık atamaya karşılık gelir.

Diferansiyel Petri Ağlarına Jeton Atamaları

- *Ayrık yer için: Pozitif tamsayı*

Eğer $f(P_i) = D$ ise $M(P_i) = \mathbb{N}$

- *Diferansiyel yer için: Reel Sayı*

Eğer $f(P_i) = DF$ ise $M(P_i) = \mathbb{R}$

Bir Petri ağının durumu jetonlama ile belirlenir. Zaman etiketli diferansiyel petri ağında geçişin tetiklenmesi ile t gecikmesi geçene kadar ilgili yayın ağırlığı kadar jeton rezerve edilir. Bu jeton sayısı M_r ile gösterilir. Bu durumda herhangi bir zamandaki mevcut M vektörü, M_r ve M_n (reserved marking, non-reserved marking) olmak üzere iki farklı M vektörünün toplamıdır. $M_i(t)$ 'yi P_i yerinin t anındaki jeton sayısı olarak ifade ederiz. Yukarıda yaptığımız tanımdan sonra, $M_i(t) = M_{ir}(t) + M_{in}(t)$ ifadesini elde edebiliriz.

Bir diferansiyel petri ağının geçicileştirme fonksiyonu

- *Ayrık geçiş için:*

Eğer $f(T_j) = D$ ise $Zaman(T_j) = d_j = T_j$ ayrık geçişi ile ilişkilendirilen gecikme

- *Diferansiyel geçiş için:*

Eğer $f(T_j) = DF$ ise $Zaman(T_j) = \{V(T_j), d_j\} = \{V_j, h\}$: T_j diferansiyel geçişi ile ilişkilendirilen maksimum tetikleme hızı ve diferansiyel denklemin entegrasyon adımını ifade eden zaman sabiti. (Şekil 5.2)

Maksimum tetikleme hızı bir sabit veya diferansiyel geçişlerdeki jeton sayılarının lineer bir birleşimi olabilir:

$$P_i \in P \text{ ve } f(P_i) = DF \text{ için } V_j = \sum_1^m a_i * m_i \text{ olabilir.}$$

Aynı zamanda, maksimum tetikleme hızı diferansiyel geçişlerdeki jeton sayılarının lineer olmayan bir fonksiyonu da olabilir fakat keyfi bir zamanda diferansiyel geçişlerdeki jeton sayılarının sadece anlık değerleri bilinebildiği için hiçbirisinin türevleri yahut entegralleri bu lineer olmayan fonksiyon içerisinde olamaz. Jeton sayısı zamanla değiştikçe bu maksimum tetikleme hızı simülasyonun her adımında DHPN'lerde olduğu gibi değişir. Her bir diferansiyel geçişe, bir anlık tetikleme hızı ilişkilendirilmiştir. $V(T_j) = v_j(t)$. Tabi ki anlık tetikleme hızı maksimum tetikleme hızından küçük olacaktır.

$$f(T_j) = DF \text{ için } -\infty \leq v_j(t) \leq V(T_j) \leq +\infty \text{ olabilir.}$$

Yukarıdaki gibi tanımlanan Diferansiyel Petri Ağı, iki bölgeli bir graftır. Yerler ve geçişler birbirlerine yönlü birer yay ile bağlanır. Bir yerden bir geçişe doğru olan yaylarla ilişkilendirilmiş ağırlıklar, *Giriş* fonksiyonu (yahut matrisi) ile ifade edilirken, geçişlerden yerlere doğru olan yayların ağırlıkları ise, *Çıkış* fonksiyonu (yahut matrisi) ile ifade edilir.

Diferansiyel Petri Ağlarına Özel Yapısal Koşullar

Sürekli bir sistemin Petri Ağ formülasyonu ile ayrıklaştırılması işleminde, yerler ve geçişler arasında bazı koşullar tanımlanmalıdır. Entegrasyon adımı kavramını ortaya koyduğu için, modelleme aşamasındaki en önemli aşama bu koşulların tanımlanmasıdır.

Koşullar:

1. Eğer bir yay ayrık bir yeri diferansiyel bir geçişe bağlıyorsa, bu geçiş mutlaka bir başka yayla aynı ayrık yere bağlanmalıdır. Hatta bu iki yayın ağırlıkları dahi eşit olmalıdır.

$$\text{Eğer } f(P_i) = D \text{ ve } f(T_j) = DF \text{ ve } P_i \in {}^0T_j \text{ (aynı şekilde } P_i \in T_j^0 \text{) ise}$$

$$P_i \in T_j^0 \text{ (aynı şekilde } P_i \in {}^0T_j \text{) ve } \text{Giriş}(P_i, T_j) = \text{Çıkış}(P_i, T_j)$$

Bu koşul bütün ayrık yerlerin jeton sayılarının simülasyondaki hesaplama sonuçları ne olursa olsun tamsayı olarak kalmasını garanti eder.

2. Modellemede etkili olacak bir çakışma olamaz.

Bir diferansiyel yer ile ilişkilenen yapısal bir çakışma olamaz, sadece Hibrit Petri Ağlarındaki çakışma([5]'de açıklanmıştır)dikkate alınmalıdır. Bu varsayım sonraki formulizasyonlarda da geçerlidir.

Bağlantı	Mümkün mü?	Hesaplama	Koşul
	evet	ayrık	$a \in \mathbb{N}_0$
	evet	ayrık	$a \in \mathbb{N}_0$
	evet fakat aynı ağırlıkta geriye doğru da bir bağlantı olmalı	arayüz (ayrıktan sürekliliğe)	$a \in \mathbb{N}_0$
	evet fakat aynı ağırlıkta geriye doğru da bir bağlantı olmalı	arayüz (sürekliden ayrığa)	$a \in \mathbb{N}_0$
	evet	arayüz (sürekliden ayrığa)	$a \in \mathbb{R}$
	evet	arayüz (ayrıktan sürekliliğe)	$a \in \mathbb{R}$
	evet	Continuous system	$a \in \mathbb{R}$
	evet	Continuous system	$a \in \mathbb{R}$

Şekil 3.7: Diferansiyel Petri ağlarında olası bağlantılar ve özellikleri

DİFERANSİYEL PETRİ AĞLARI İÇİN ÇALIŞMA KURALLARI

Diferansiyel petri ağları, geçişlerin tetiklenmesi ile çalışır. Tetiklemeler, geçişin giriş ve çıkış yerlerindeki jeton sayılarını değiştirirler.

Aktif olma koşulları:

Ayrık geçiş için:

Tanım 9: Ayrık bir geçiş t anında ancak ve ancak, giriş yerindeki jeton sayısı en az tetiklenmek istenen geçişe ilişkin yayın ağırlığı kadar olması koşuluyla tetiklenebilir.

Eğer $f(T_j) = D$ ise;

$\forall P_i \in {}^0T_j \rightarrow M_i^n(t) \geq \text{Giriş}(P_i, T_j)$ koşulunda

T_j : Aktiftir

Tanım 10: Diferansiyel bir geçiş t anında ancak ve ancak her ayrık giriş yeri aktif olduğu durumda aktiftir.

Eğer $f(T_j) = DF$ ise;

Ancak ve ancak $\forall P_i \in {}^0T_j$ için $f(P_i) = D \rightarrow M_i(t) \geq \text{Giriş}(P_i, T_j)$ koşulunda

T_j : Aktiftir.

Tetikleme Koşulları:

Ayrık bir geçişin tetiklenmesi

Bir ayrık geçiş ancak aktiflik koşulunu yerine getiriyorsa tetiklenebilir. Eğer bir geçicileştirme fonksiyonu ayrık yere ilişkilendirilmiş ise, tetikleme olduğunda ilgili jetonlar rezerve edilir ve geçicileştirme sona erdiğinde geçiş tetiklenir.

Ayrık geçiş tetiklendiğinde:

- Ayrık geçişin giriş yerlerinden yayın ağırlığı kadar jeton eksiltir.
- Ayrık geçişin çıkış yerlerine yayın ağırlığı kadar jeton eklenir.

Yani;

$f(T_j) = D$ ve $Zaman(T_j) = d_j$ iken;

T_j , $t + d_j$ anında tetiklendiği durumda:

- $\forall P_i \in {}^0T_j$ için $M_i(t + d_j) = M_i(t) - \text{Giriş}(P_i, T_j)$
- $\forall P_i \in T_j^0$ için $M_i(t + d_j) = M_i(t) + \text{Giriş}(P_i, T_j)$

Diferansiyel bir geçişin tetiklenmesi

Bir diferansiyel geçiş ancak aktiflik koşulunu yerine getiriyorsa tetiklenebilir.

Diferansiyel geçiş tetiklendiğinde:

- Diferansiyel geçişin giriş yerlerinden, (yayın ağırlığı * tetikleme hızı) kadar jeton eksiltir.
- Diferansiyel geçişin çıkış yerlerine, (yayın ağırlığı * tetikleme hızı) kadar jeton eklenir.

Yani;

$f(T_j) = DF$ ve T_j geçişinin t anındaki tetikleme hızı $= v_j(t)$ iken;

T_j , t anında dt süresince tetiklendiği durumda:

- $\forall P_i \in {}^0T_j$ için $f(P_i) = D$ veya DF iken;

$$M_i(t + dt) = M_i(t) - v_j(t) * \text{Giriş}(P_i, T_j) * dt$$

- $\forall P_i \in {}^0T_j$ için $f(P_i) = D$ veya DF iken;

$$M_i(t + dt) = M_i(t) - v_j(t) * \text{Çıkış}(P_i, T_j) * dt$$

Hatırlatma: Diferansiyel petri ağlarına özel yapısal koşullar, ayrık yerlerdeki jeton sayılarının her halükarda tamsayı olma koşulunu ortaya koymaktaydı. Gerçekte, onlardan alınan jeton sayısı kesirli olsa bile, aynı sayıda jeton anında geriye eklenir.

Not: Eğer aynı ayrık yere bağlı bir ayrık bir de diferansiyel geçiş varsa önce ayrık geçiş daha sonra diferansiyel geçiş tetiklenir. Ayrık geçişin diferansiyel geçişe göre önceliği vardır.

Anlık Tetikleme Hızlarının Hesaplanması

Diferansiyel petri ağlarında bir sürekli geçiş için anlık tetikleme hızının hesaplanması, geçişin durumuna bağlıdır. Bir başka deyişle, geçişin aktif olup olmamasına bağlıdır. Anlık tetikleme hızının hesaplanması için, geçişe ilişkin *Zaman fonksiyonu* kullanılır. O halde:

- Eğer T_j diferansiyel geçişi aktif değil ise: $v_j(t) = 0$
- Eğer T_j diferansiyel geçişi aktif ise: $v_j(t) = V(T_j)$, v_j durum değişkenlerine bağlı olabilir $\{ v_j(t) = \sum_i a_i m_i(t) \}$

Tekrar Oranı Matrisi ve Temel Eşitlik

Her hangi bir ağ için bir *tekrar oranı matrisi* W tanımlanabilir:

$$W_{ij} = \text{Çıkış}(P_i, T_j) - \text{Giriş}(P_i, T_j) \text{ olmak üzere,}$$

$$W = [W_{ij}]_{n \times m}$$

Temel eşitlik: eğer ayrık geçişler için bir tetikleme sırası belirlersek; $\sigma(t)$ karakteristik vektörü ($\dim(\sigma) = m$), ve diferansiyel geçişler için $v(t)$ anlık hız vektörü sayesinde, t_i anında jetonlaması bilinen bir ağın, t_k anındaki jetonlamasına aşağıdaki temel eşitlikle ulaşılabilir.

$$M(t_k) = M(t_i) + W. (\sigma(t_k) + \int_{t_i}^{t_k} v(u) du)$$

Diferansiyel Petri Net Çalışma Algoritması

DPA ile modellenen sistemin simülasyonu için bir çalışma algoritması tanımlanmıştır. Çalışma algoritması, iki gerekli bölümden oluşur. İlk bölüm, aktif geçişleri ve diferansiyel geçişlerin tetikleme hızlarını hesaplarken, ikinci bölüm en yakın olayın zamanına karar verir. Sistem durumlarını değiştiren tüm olaylar

hesaplanır, 'en yakın olay', zaman bakımından en yakın olandır. Şimdiki zaman, bu olayın zamanı olur ve aynı anda yerlerin yeni durumları hesaplanır.

Belirli bir jetonlama ve belirli bir zaman için aktif geçişlerin belirlenmesi, ilgili diferansiyel yerlerin tetikleme hızlarının önceki paragraflarda anlatıldığı şekilde belirlenebilmesine olanak sağlar. Geçişlerin aktifliğine göre, sıradaki olay zamanlarının belirlenmesi yerlerin durumlarına bağlıdır.



Şekil 3.8: DPA çalışma algoritması

İki olay arasında, sistem durumları sabit kalır. Bu davranış ve 'durum' ile ifade edilen, Tanımda 11'de açıklanmıştır.

Tanım 11: Bir DPA'nın olaylar-arası durumu(interevent state),

1. Ayrık yerlerin jetonlaması
2. Diferansiyel geçişlerin tetikleme hızları
3. Ayrık ve diferansiyel yerlerin ayrılmış (korunmuş, reserved) jetonlaması.

Sabit kaldığı bir zaman aralığına karşılık gelir.

Bu tanımdan hareketle; Sıradaki olay zamanlarının hesaplanması için, hangi tip olayların bir olaylar-arası durumu değiştirebileceğini bilmek gerekir.

Özellik: Zaman etiketli diferansiyel Petri ağıının olaylar arası durumu ancak ve ancak aşağıdaki olaylardan birisi (aynı anda birden fazla olması da mümkündür) ile değişir.

- 1.** Ayrık geçişin tetiklenmesi
- 2.** Bir ayrık geçişin giriş yeri olan bir diferansiyel yerin rezerve edilmemiş(non-reserved) jeton sayısının karşı düşen yayın ağırlığına eşit hale gelmesi.

Hesaplama çizelgesi

DPA'nın hesaplama çizelgesi, olaylar arası durumlara karşılık düşen düğümlerle ifade edilebilir. Bu çalışmada tercih edilen notasyonda, bir düğüm iki parçaya bölünmüştür.

İlk parça ayrık yerlerin jeton sayılarını gösterir.

$M_D = \{M_i \text{ öyle ki } f(P_i) = D\}$, ayrık yerlerdeki toplam jeton sayısını gösterir.

$M_D^r = \{M_i^r \text{ öyle ki } f(P_i) = D\}$, ayrık yerlerdeki rezerv edilmiş jeton sayısını gösterir.

İkinci parça diferansiyel geçişlerin tetikleme hızı vektörünü ve rezerv edilmiş jeton sayılarını (M_{DF}^r) gösterir.

$$M_{DF}^r = \{M_i^r \text{ öyle ki } f(P_i) = DF\}$$

Periyodun başındaki ve sonundaki diferansiyel yerlerdeki toplam jeton sayısı M_{DF}^r 'de ayrıca gösterilir.

$$M_{DF} = \{M_i \text{ öyle ki } f(P_i) = DF\}$$

Şekil 3,9'da hesaplama çizelgesinin bir düğümü gösterilmiştir.



Şekil 3.9: Hesaplama çizelgesinin bir düğümü

Bu düğümler, olayların gerçekleşmesini ve birbirini takip eden iki olaylar-arası durum arasında geçen zamanı ifade eden yaylarla birbirlerine bağlanırlar. Bir yay ile ilişkili bir geçiş; d_k tetiklenme süresini göstermek üzere, <tetiklenen geçişler | d_k > ile gösterilir.

4. AYRIK PETRİ AĞLARI İLE MODELLEME

4.1. Modellemede Kullanılan Yapılar

4.1.1. Çakışma

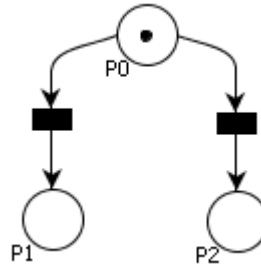
Bir yer iki yahut daha fazla geçişi besliyorsa buna çakışma durumu adı verilir. Çakışma durumları, 'etkin' ve 'etkin olmayan' olarak ikiye ayrılır.

Etkin çakışma: Bir yerdeki jeton sayısı iki geçişi birden besleyecek seviyede değilse, bu çakışma etkin çakışma olarak adlandırılır.

Etkin olmayan çakışma: Eğer jeton sayıları iki geçişi birden besleyecek seviyede ise, bu çakışma etkin olmayan çakışma olarak adlandırılır.

Aynı yerden beslenen geçişler, aynı anda tetiklenemez. Çakışma durumunun engellenmesi için aynı kaynaktan beslenen geçişlerin tetiklenmesinde bir sıra söz konusu olmalıdır.

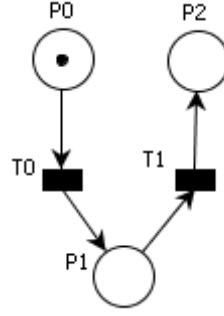
Çakışma durumunu şekil 4.1'deki örnek üzerinde gösterebiliriz.



Şekil 4.1: Çakışma Örneği

4.1.2. Sıralama

Genel olarak geçişlerin tetiklenmesi için bir sıralamanın önemi yoktur. Fakat yerlerin jeton sayılarının pozitif olması gereken petri ağlarında, çeşitli durumlarda tetikleme sıralaması önemlidir. Sıralama yapısını bir örnek üzerinde gösterebiliriz.

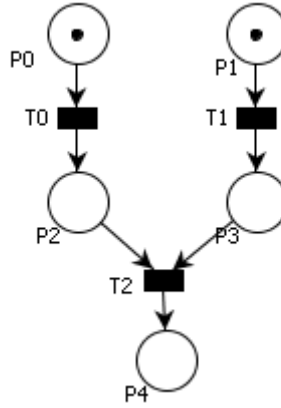


Şekil 4.2: Sıralama Örneği

Yukarıdaki yapıda, T_0 geçişi tetiklenmeden, T_1 geçişi tetiklenemez.

4.1.3. Senkronizasyon

Bir olayın gerçekleşebilmesi için iki veya daha fazla koşulun gerçekleşmiş olması gerektiği durumlarda kullanılan petri ağ yapısıdır. Senkronizasyon yapısını bir örnek üzerinde gösterebiliriz.

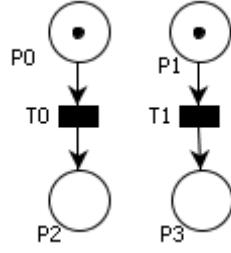


Şekil 4.3: Senkronizasyon örneği

Yukarıdaki yapıda, T_0 ve T_1 geçişleri tetiklenmeden T_2 geçişi tetiklenemez.

4.1.4. Paralellik

İki yahut daha fazla olayın birbirinden bağımsız olması durumunda kullanılan Petri ağ yapısıdır. Paralellik yapısını bir örnek üzerinde gösterebiliriz.

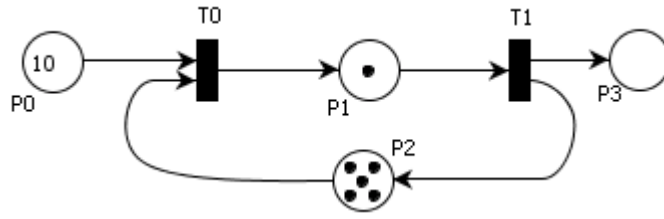


Şekil 4.4: Paralellik örneği

Yukarıdaki yapıda, T_0 ve T_1 geçişleri birbirlerinden bağımsız olarak tetiklenebilirler.

4.1.5. Kaynak Sınırlama

Çeşitli sistemlerde belirli bir kaynağın tükenmesi durumunda, sistem işleyişi kaynak tükendiği için sekteye uğrayabilir. Bunun gibi kaynaklardaki sınırlılığın sistem işleyişini etkilediği durumlarda kullanılabilen Petri ağ yapısıdır. Kaynak sınırlama yapısını bir örnek üzerinde gösterebiliriz.



Şekil 4.5: Kaynak sınırlama örneği

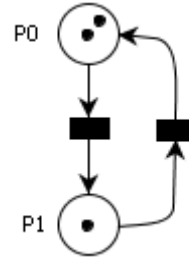
Yukarıdaki modelde, T_0 geçişi art arda 5 defadan fazla tetiklenemez. Burada P_0 yeri veri tutan bir bellek alanı, P_1 yeri geçici bir değişken ve P_3 yeri bilginin taşınması düşünülen yeni bellek alanı olarak düşünülebilir. P_1 geçici değişkenine en fazla 5 birimlik bilgi yüklenebilmektedir. Buradaki kaynak sınırlama, P_0 yerindeki bilgiyi P_3 yerine taşıyabilmek için, P_1 geçici değişkeninin bilgi taşıma kapasitesinin aşılmamasını garanti eder.

4.2. Petri Ağı Özellikleri

4.2.1. Sınırlılık Özelliği

Bir P_i yeri için, m_0 başlangıç durumundan ulaşılabilecek tüm m_i değerleri, uygun bir $k \in \mathbb{N}^+$ değerinden küçük kalıyorsa, P_i yeri k -sınırlıdır.

Bir Petri Ağının tüm yerleri sınırlı ise Petri ağı sınırlıdır. (Eğer tüm yerler k -sınırlı ise, Petri ağı da k -sınırlıdır şeklinde ifade edilir)[5]



Şekil 4.6: 3-sınırlı bir Petri ağı örneği

4.2.2. Güvenlilik Özelliği

Bir Petri ağı 1-sınırlı ise, güvenli petri ağı olarak adlandırılır.[5]

4.2.3. Canlılık Özelliği

Bir Petri ağında, m_0 başlangıç durumundan ulaşılabilen tüm m_i durumları için aktif bir geçiş bulunabiliyorsa, o Petri ağı canlı Petri ağı olarak adlandırılır.[5]

4.2.4. Ölümcül kilitlenme (deadlock)

Herhangi bir durumda, petri ağının hiçbir geçişi aktif değil ise, bu durum ölümcül kilitlenme olarak adlandırılır. Petri ağı bu andan sonra artık durum değiştiremez hale gelir.[5]

4.2.5. Koruyuculuk Özelliği

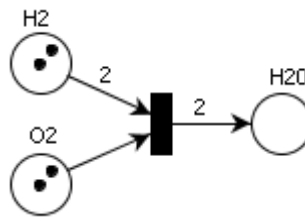
Bir Petri ağına ilişkin geçişlerin tetiklenmesi ile Petri ağındaki toplam jeton sayısı değişmiyorsa bu Petri ağı koruyucu Petri ağı olarak adlandırılır.[5]

4.3. Örnek Modeller

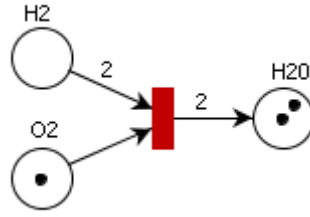
Örnek 1: Ayrık Petri Ağı (Basit bir kimyasal reaksiyon)[4]

$2 H_2 + O_2 \rightarrow 2 H_2O$ Kimyasal reaksiyonunu ele alalım.

PA modelini aşağıdaki gibi kurabiliriz.



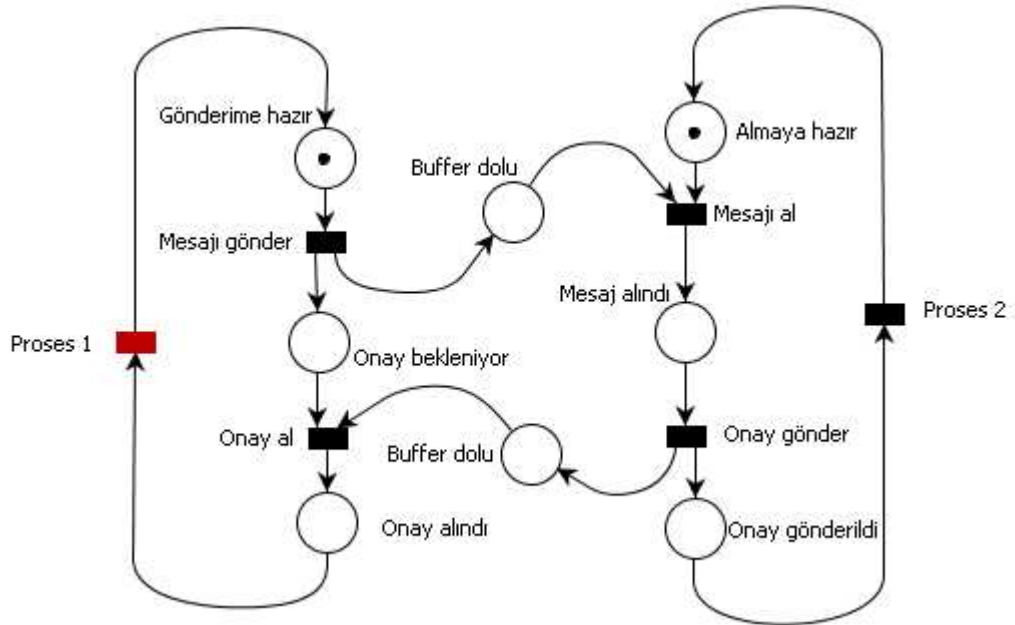
(a)



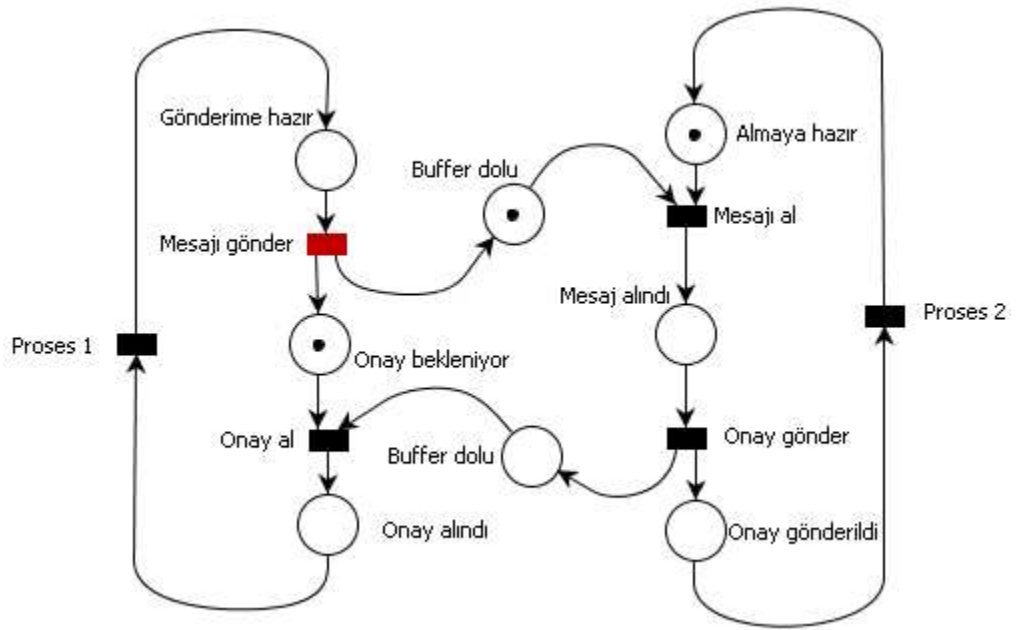
(b)

Şekil 4.7: Basit bir kimyasal reaksiyon. (a) Kimyasal denklemin petri ağı modeli. 2 adet H_2 molekülü ve 2 adet O_2 molekülü içermekte. (b) Geçiş tetiklendikten sonra 2 adet H_2O molekülü üretilmekte, 1 adet O_2 molekülü kalmakta. Bu noktadan sonra $M_{H_2} < \text{Giriş}(H_2, T)$ olduğu için, T geçişi aktif değildir.

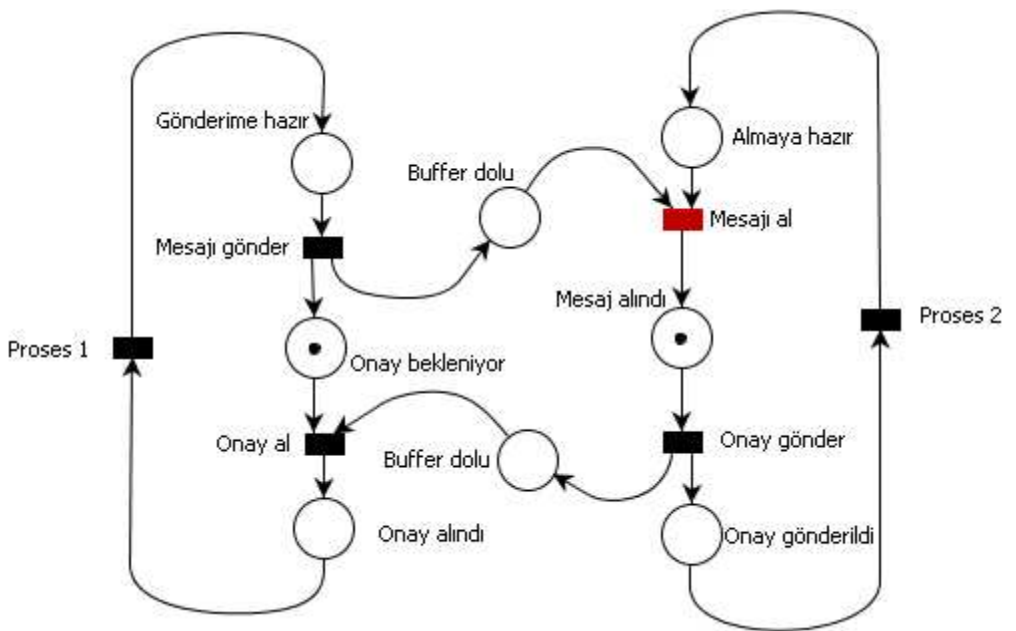
Örnek 2: Ayrık Petri Ağı (Basit bir iletişim protokolü, senkronizasyon kontrolü)[4]



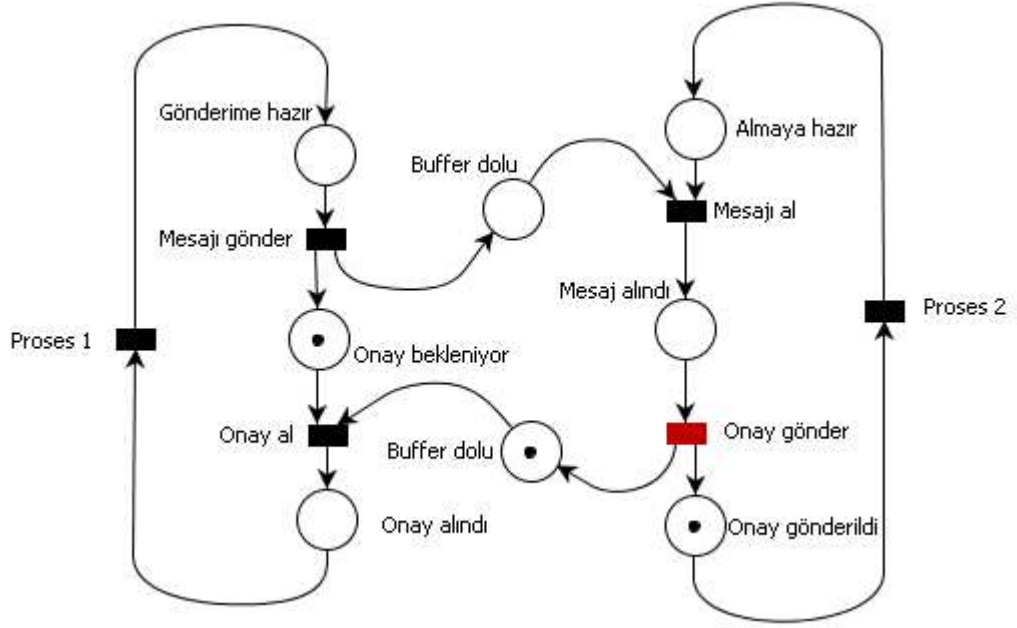
(a)



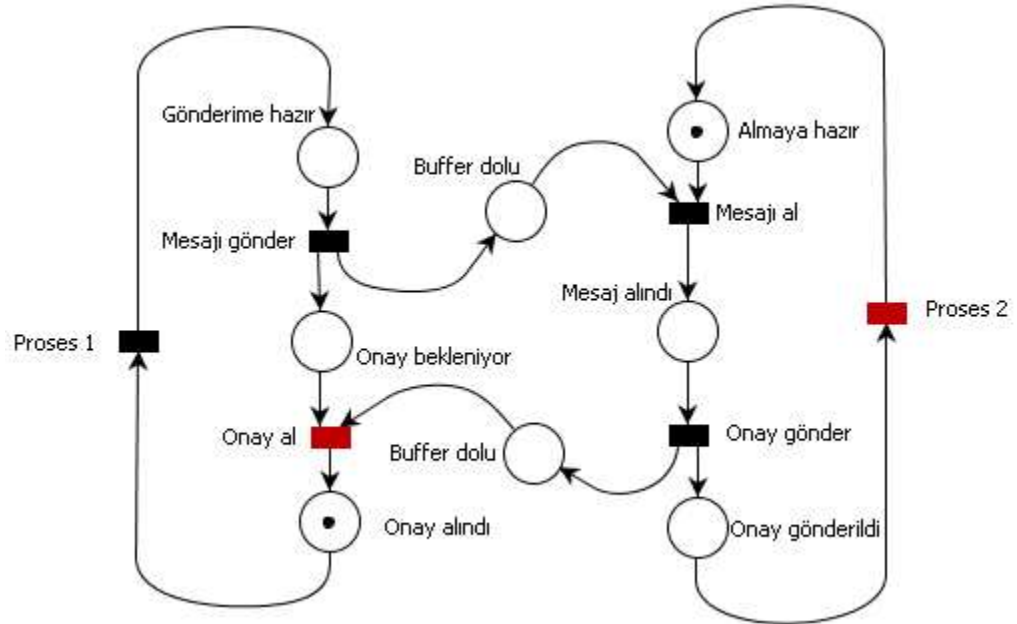
(b)



(c)



(d)



(e)

Şekil 4.8: Basit bir iletişim protokolü, senkronizasyon kontrolü. (a) İletişim protokolünün Petri ağ modeli, Proses 1'in başlangıcı ile bilgi gönderime hazır hale gelmiş. Proses 2'ye ait tarafta ise, karşıdan gönderilecek bilgi alınmaya hazır durumda. (b) Proses 1 tarafında mesaj Buffer'a yazılıyor. Ve Proses 1 tarafı daha sonra mesaj alındı onayı beklemeye başlıyor. (c) Proses 2 tarafı mesajı alıyor. (d) Proses 2 tarafı mesaj alındı onayını Buffer'a yazıyor. (e) Proses 1 tarafı Proses 2 tarafının mesaj alındı onayını alıyor ve Proses 1 yeniden işleme başlıyor.

5. SÜREKLİ ve HİBRİT PETRİ AĞLARI İLE MODELLEME

5.1. Modellemede Kullanılan Yapılar

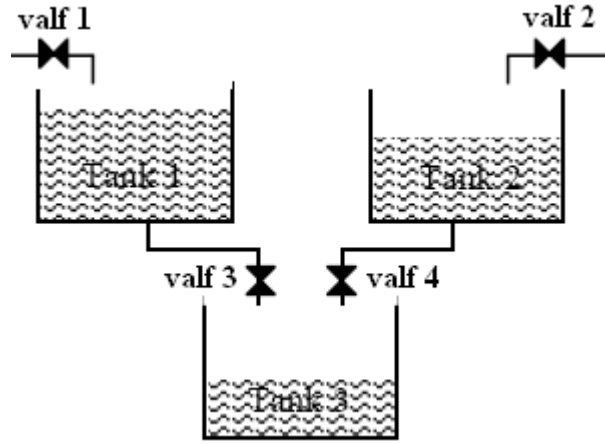
Yerlerdeki jeton sayılarının reel sayı olabilmesi sebebiyle, senkronizasyon, sıralama, kaynak sınırlama, çakışma gibi durumlar yoktur.

Çakışma durumları ayrık petri ağlarındaki gibidir.

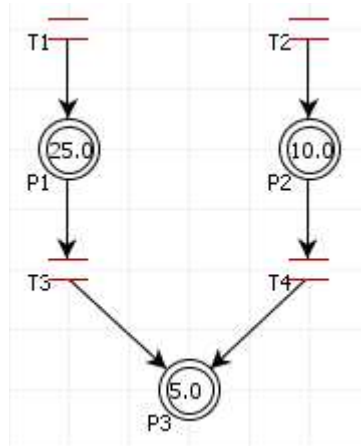
5.2. Örnek Modeller

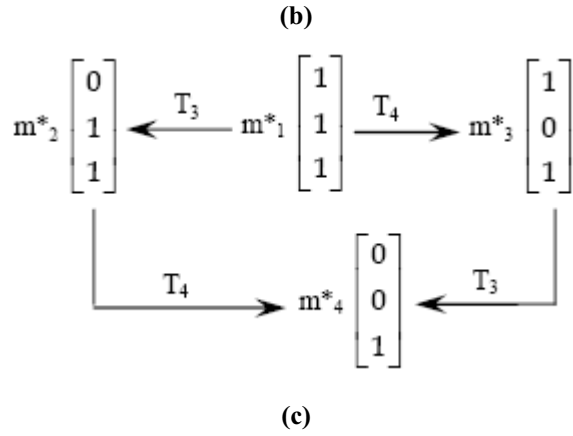
5.2.1. Örnek: Üç tanklı bir sistemin SPA modellemesi, makro-jetonlama [6]

Şekil 9(a) 'da verilen sistemdeki tanklarda sistemin başlangıç anında, 25, 10, 5 birimlerinde sıvı olduğu var sayılarak, SPA modelini oluşturalım. Oluşturulacak modelde, T_1, T_2, T_3, T_4 geçişleri sistemdeki valfleri, P_1, P_2, P_3 yerleri de sistemdeki tankları gösterecektir. Şekil 9(b)'de sistemin SPA modeli verilmiştir.



(a)





Şekil 5.1: Üç tanklı ve 4 valfli bir sistemin SPA modellenmesi. (a) modellenmek istenen sistem. (b) Sistemin SPA modeli. (c) SPA modelinin erişilebilirlik ağacı.

Şekil 9(c)'de görülen SPA modelinin erişilebilirlik ağacı, SPA modeli sayesinde elde edilebilecek olan tüm makro jetonlamaları göstermektedir.

5.2.2. Örnek: Hibrit bir sistemin DPA modellemesi[3]

Diferansiyel Petri ağlarına bir örnek için ilk olarak [3]ta belirtilen örneği kullanalım. Bu örnekte bir hibrit sistemin DPA ile modellenmesi incelenmiştir.

DPA ile modellemek istediğimiz hibrit sistem aşağıda verilen iki farklı davranışa sahiptir.

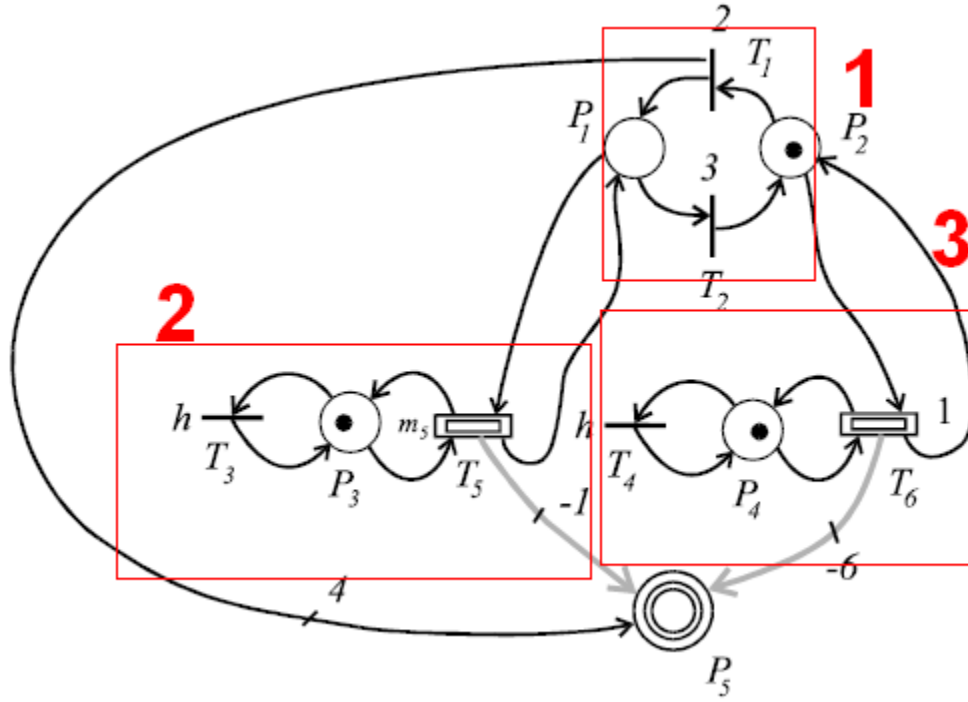
- I. $\dot{x}(t) = -6$
- II. $\dot{x}(t) = -x(t)$

Sistemin davranışının bu iki model arasında değişimi basit bir kuralla belirlensin.

1. Sistem $kT < t < kT + 2T/5$, $k = 0, 1, \dots$ için $\dot{x}(t) = 6$ modelini kullanır
2. Sistem $kT + 2T/5 < t < (k+1)T$, $k = 0, 1, \dots$ için $x(t)$ 'yi $\rightarrow x(t) + 4$ 'e eşitleyerek $\dot{x}(t) = -x(t)$ modelini kullanır.

Entegrasyon adımını keyfi bir değer olarak $h=0,5$ seçebiliriz. 0,5 değeri kaba bir değer olsa da sonuçları göstermek amacıyla kullanılabilir.

Kaynakta bu şekilde verilen bir sistem için aşağıdaki DPA modeli önerilmiştir.



Şekil 5.2: Hibrit bir sistemin DPA modeli

1 Numaralı kutudaki model, iki sistem davranışı arasındaki geçişi modellemektedir. P_1 yerinde bir jeton var ise T_5 geçişi aktiftir ve sistem 2 numaralı kutu ile modellenen biçimde çalışır, P_2 yerinde bir jeton var ise T_6 geçişi aktiftir ve sistem 3 numaralı kutu ile modellenen biçimde çalışır.

Örnek ile ilgili olarak aşağıdaki kümeleri tanımlarız.

$P_D = \{P_1, P_2\}$: Ayrık yerleri gösterir

$T_D = \{T_1, T_2\}$: Ayrık geçişleri gösterir

$P_{DI} = \{P_3, P_4\}$: Sözde ayrık yerleri gösterir

$T_{DI} = \{T_3, T_4\}$: Sözde ayrık geçişleri gösterir

$P_{DF} = \{P_5\}$: Diferansiyel yerleri gösterir

$T_{DF} = \{T_5, T_6\}$: Diferansiyel geçişleri gösterir

Bu durumda;

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
P_1						
P_2						
P_3						
P_4						
P_5						

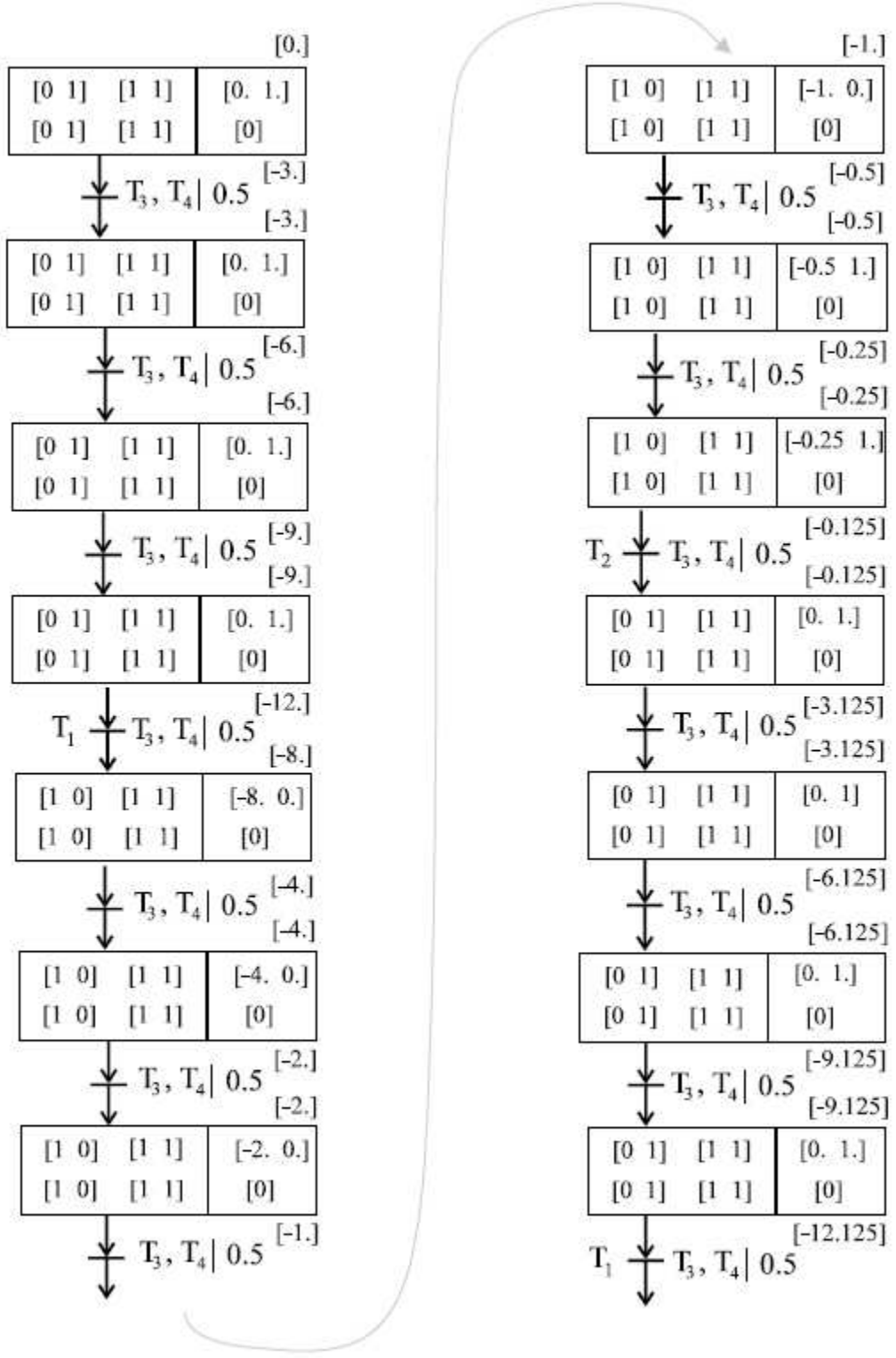
Şablonuna uygun olarak, giriş, çıkış ve tekrar oranı matrisleri oluşturulursa

$$\mathbf{giriş} = \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \mathbf{çıkış} = \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & -6 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{çıkış} - \mathbf{giriş} = \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & -6 \end{array} \right)$$

Matrisleri elde edilir.

Şekil 5.3’de verilen, bu diferansiyel Petri ağına ait hesaplama çizelgesi sürekli duruma ait bilgiyi içermektedir. Ayrık yerlerdeki bilgilerin çizelgeye alınmaması her hangi bir bilgi kaybına sebep olmamaktadır.

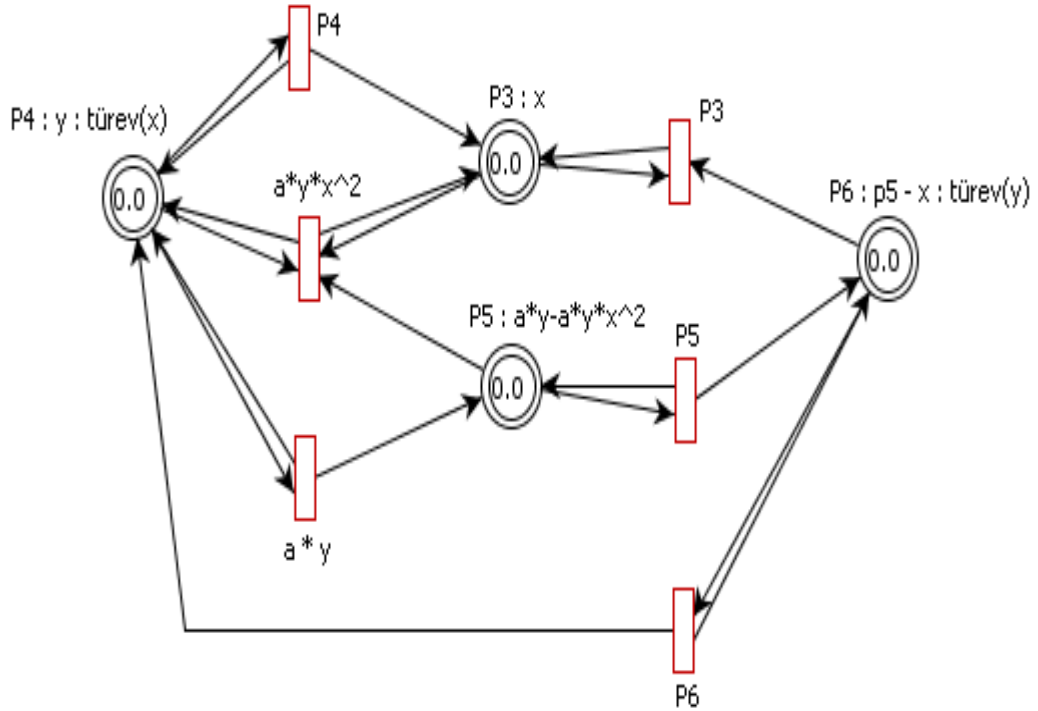


Şekil 5.3: Örnek 5.2.1'e ilişkin hesaplama çizelgesi

5.2.3. Örnek: Van Der Pol Osilatörünün DPA modellemesi

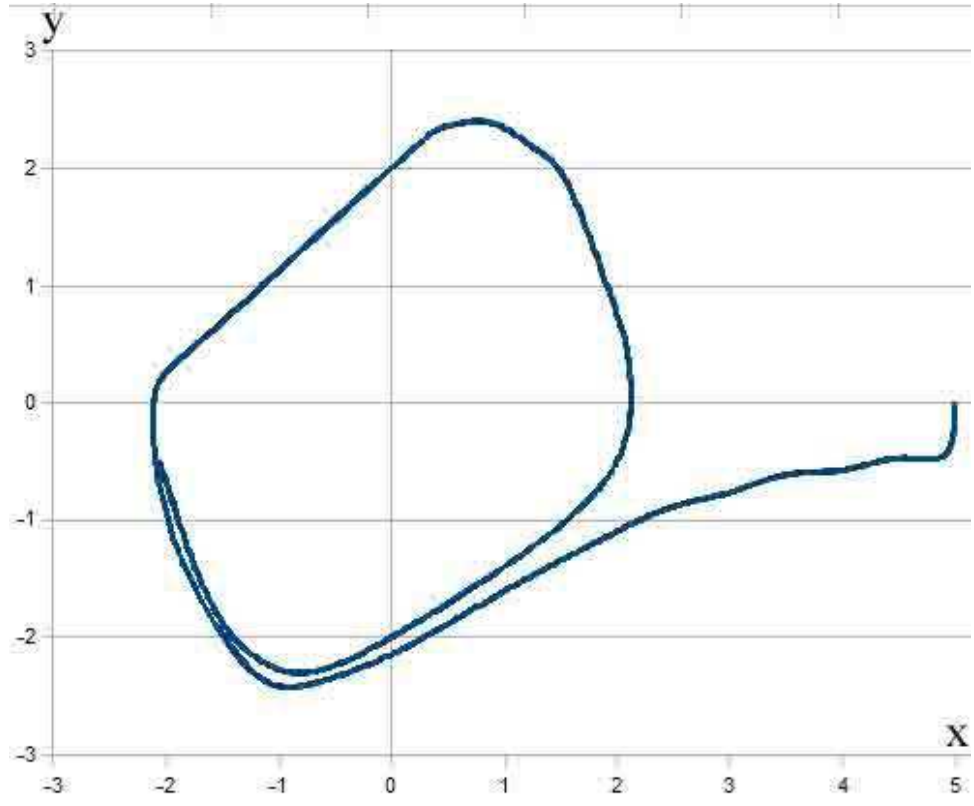
Genellikle $\frac{d^2x}{dt^2} + \mu (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0$ denklemi ile ifade edilen Van Der Pol osilatörünü, birinci dereceden diferansiyel denklemler ile $\dot{x}_1 = x_2$ ve $\dot{x}_2 = \mu (1 - x_1^2)x_2 - x_1$ şeklinde iki denklem ile ifade edersek, sistemi 7.1'de gösterilecek olan HISIM simülatorü ile aşağıdaki şekilde kurabiliriz.

(Şekil 5.4'te verilen petri ağında, $x_1 = x$, $x_2 = y$ ve $\mu = a$ olarak gösterilmiştir)



Şekil 5.4: Non-lineer bir petri ağı örneği. Sistem simülasyonu başlatıldığı andan itibaren, yerlerden herhangi birine bir ilk değer atanmasıyla, simülasyon çalışmaya başlayacaktır.

$\mu = 0.5$ ve $x_f = 5$ alındığında Van Der Pol osilatörü sisteminin faz plotu aşağıdaki gibi olmaktadır.



Şekil 5.5: Örnek 5.2.3 faz plotu

6. PETRİ AĞLARI ANALİZİ [9]

Çeşitli kaynaklarda verilen farklı Petri Ağı analiz yöntemlerini üç grupta toplayabiliriz; kapsama ağacı yöntemi, matris-denklemler yaklaşımı ve indirgeme teknikleri.

Kapsama ağacı yöntemi (coverability graph):

Başlangıç jetonlaması M_0 olarak verilen bir Petri ağından, bir t sayısı kadar yeni jetonlamalar oluşturabiliriz. Oluşturulan her bir jetonlamadan da geçerli bir t sayısı kadar yeni jetonlamalar oluşturulabilir. [4].

M_0 'ı ağacın kökü olarak düşündüğümüzde, her bir t zamanı ile ulaşılan yeni durumlar ağacın dallarını oluşturacaktır. Kapsama ağacının amacı, M_0 başlangıç jetonlamasından ulaşılabilecek tüm durumların belirlenmesidir. Kapsama ağacı ve erişilebilirlik ağaçlarının ikisi de Petri ağı davranışının analizi için kullanılır.

Petri ağları için indirgeme yöntemleri:

Mühendislikte karmaşık sistemlerin analizi yapılırken, analizi yapılmak istenen sistem öncelikle daha basit sistemlere ayrılabilir. Benzer yöntemle basit bir sistem kapsamlı bir analiz yapmak için genişletilebilir. Petri ağlarının analizi yapılmak istendiğinde aynı şekilde, karmaşık petri ağı modüllere ayrıştırılarak basitleştirilebilir. Bu alt modüllerin analizi gerçekleştirildikten sonra, alt modüllerden alınan veriler sayesinde tüm petri ağının özellikleri türetilebilir[4]. Bu yapıya *modüler petri ağları* ismi de verilmektedir.

Tekrar oranı matrisi ve durum denklemleri (incidence matrix and state equations):

Tekrar oranı matrisi ve durum denklemleri yaklaşımında, petri ağı ile ilişkilendirilen matris denklemleri, Petri ağının dinamik karakterinin analizini yapmak için kullanılır[7]. Yaklaşımın temeli bir Petri ağına ilişkin yerler ve geçişler arasındaki

olası tüm bağlantıların matris denklemleri ile açıklanabilmesine dayanmaktadır. Matris denklemi, erişilebilirlik problemi çalışmalarında oldukça kullanışlıdır.

7. PETRİ AĞLARI BENZETİMİ:

Petri Ağlarının bilgisayar ortamında benzetimi için internette pek çok araç bulunmasına rağmen, bu araçların çoğunun kodlanması ya yarım bırakılmış yahut petri ağlarının gelişen yapısına uyum sağlayamayarak güncelliğini yitirmiştir. Bu çalışmada petri ağ modellerinin benzetim aracı olarak iki farklı yazılım kullanılmıştır.

- Açık kaynak kodlu bir yazılım olan HISIM Hibrit Petri Ağ Benzetim Aracı
- SIRPHYCO Benzetim Aracı

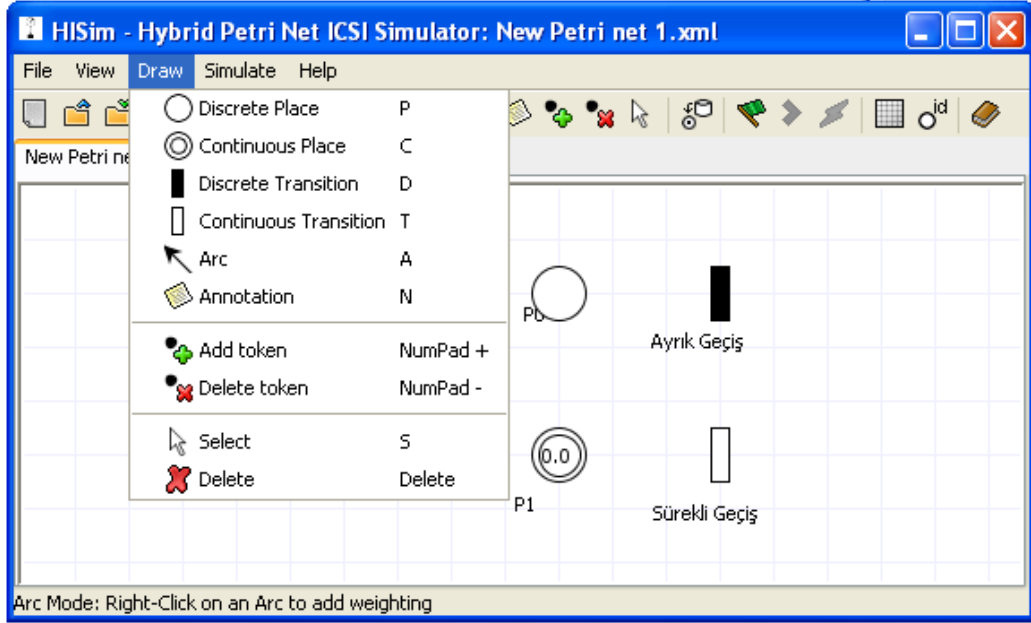
7.1. HISIM:

HISIM kabaca, ayrık yer, ayrık geçiş, diferansiyel yer, diferansiyel geçiş ve yönlü yay olmak üzere 5 model içerir ve en büyük eksikliği diferansiyel öğeleri ayrık öğelerle birleştirememesidir. Bu sebeple bu benzetim aracını kullanarak hibrit petri ağ benzetimi yapmak (en azından mevcut yazılım sürümü ile) mümkün gözükmemektedir. Kaynak kodlarının açık olması nispeten bir artı olarak gözükse de hibrit petri ağ benzetimi yapılmasına izin verilmemesi bu aracın en göze batan eksikliğidir. Ayrıca yapılan benzetim sonuçlarının bir graf üzerinde gösterilememesi de benzetim aracının kullanımını verimsiz hale getirmektedir. Ancak tetikleme hızı olarak bir fonksiyon atayabilme özelliği sayesinde dikkat çekebilir (örneğin T1 geçişine $\text{Sin}(P1)$ gibi bir tetikleme hızı atanabilmektedir).

Yazılımın bir kullanıcı el kitabı bulunmadığı için çalıştırmak ve kullanmak zaman alabilir. Yazılım kullanılmak istenirse ilk olarak yapılması gereken, yazılımın kurulabilmesi için ortam değişkenlerine (Bilgisayarım → özellikler → gelişmiş → ortam değişkenleri → sistem değişkenleri → yeni) “CLASSPATH” adında bir değişken eklenmesi gerekmektedir. Çalışan bir örnek olarak aşağıdaki değişken değeri gösterilebilir:

```
“ C:\Documents and Settings\user\Belgelerim\petri_nets\simulator\hisim\bin;  
C:\Documents and Settings\user\Belgelerim\petri_nets\simulator\JEP\jep-3.2.0-  
trial.jar; C:\Program Files\Java\j2re1.4.2_09\lib ”
```

Yazılım'ın kullandığı düğümlemlerle birlikte ekran görüntüsü:



Şekil 7.1: HISIM hibrit petri ağ simülasyonu ekran görüntüsü

7.2. SIRPHYCO:

Yazılımı David, H.Alla tarafından koordine edilen SIRPHYCO, HISIM'a alternatif olarak kullanılacak bir simülasyon aracıdır. SIRPHYCO'da tasarlanan bir modelde bulunan yerlerin jeton sayıları parametre olarak kullanılmadığı için, simülasyon yapılabilecek sistemlere büyük bir kısıt getirilmiştir. Ancak yapılan simülasyon sonuçlarının izlenebileceği grafik tablolarının bulunması yazılım için bir artı sayılabilir.

SONUÇ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, petri ağlarının gelişim süreci farklı kaynaklardan incelenmiş ve farklı petri ağ modelleri tez kapsamı içerisinde tanıtılmıştır. Araştırma konumuzun esas olarak klasik petri ağlarından yola çıkarak diferansiyel ve melez petri ağlarına doğru ilerlemek olması sebebiyle, tez çalışmasında stokastik petri ağları, bulanık petri ağları gibi kavramların yalnızca isimlerine yer verilmiştir. Literatür taramamızda Petri Ağları ile çeşitli kontrol mekanizmaları geliştirildiği görülmüş ancak tez kapsamı dahilinde kalmadığı için, bu yayınlar çalışmamıza dahil edilmemiştir.

Çalışmamda, ayrık olay sistemlerin modellenmesi amacıyla ortaya koyulan Klasik Petri Ağları yaklaşımının, zaman içerisinde geliştirilen Diferansiyel Petri Ağları yaklaşımı ile sürekli sistemleri modelleyebilecek bir güce kavuşmuş olduğunu gördüm. Van der pol osilatörü gibi bir non-lineer sürekli sistemin modellemesini gerçekleştirerek tezimi tamamladım.

Tez çalışmamda karşılaştığım en büyük engel, diferansiyel-melez Petri Ağları yaklaşımı ile yapılan modellemelerin benzetiminin yapılamaması idi. İnternet yardımı ile edinebildiğim tüm benzetim araçları, bir şekilde ya teorideki gelişmenin gerisinde kalmışlardı ya da yanlış çalışmaktaydılar. Petri Ağları için bir benzetim aracı yazmanın, Petri Ağları konusunda yapılacak çalışmaların önünü açması açısından faydalı olacağı kanaatindeyim. Bundan sonra bu konuda yapılacak çalışmalar bu noktadan devam edebilir.

KAYNAKLAR

- [1]: David,R. and Alla, H., 1987. Continuous Petri nets, *Proceedings of 8th European Workshop on Application and Theory of Petri Nets*, Saragossa, Spain, June 1987, pp.275-294
- [2]: David,R. and Alla, H., 1993. A modeling and analysis tool for discrete event systems: Continuous Petri net
- [3]: Demongodin, I. and Koussoulas, N.T., 1996. Modeling Dynamic Systems through Petri Nets, *Proceedings of CESA'96, Symp. On Discrete Events and Manufacturing Systems*, Lille, France, July 1996, pp. 279-284
- [4]: Murata and Tadao, 1989. Petri Nets: Properties, analysis and applications, *Proceedings of IEEE*, Vol. 77, No. 4, pp. 541-580.
- [5]: David,R. and Alla, H., Discrete, 2004. *Continuous and Hybrid Petri Nets*, Springer
- [6]: Ghomri, L., Alla, H., Modeling and Analysis using Hybrid Petri Nets, <http://arxiv.org/pdf/0706.1716.pdf>
- [7]: Zurawski, R., Zhou, M., 1994. Petri Nets and Industrial Applications: A Tutorial, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 41, No. 6, pp. 567-581.
- [8]: Xie, X., 2000. Performance optimization of discrete event systems with failures using fluid petri nets, *Proceedings of 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, December 2000, pp.430-435

[9]: Özcan, K., Petri Ağlarının Üretim Sistemlerinde Kullanılması,
*[http://web2.deu.edu.tr/fak/muhendislik/endustri/petri_aglarinin_ureti
m_sistemler.htm](http://web2.deu.edu.tr/fak/muhendislik/endustri/petri_aglarinin_uretim_sistemler.htm)*

ÖZGEÇMİŞ

1982 senesinde Balıkesir’de doğdu. İlk ve Orta öğretimini İstanbul’da tamamladı. Liseyi Atatürk Fen Lisesi ve Beşiktaş Lisesinde okudu. Lisans eğitimini İTÜ Kontrol Mühendisliğinde tamamladı. Lisans döneminde IEEE Öğrenci kulübünde aktif çalışmalarda bulundu. Airties Kablosuz İletişim firmasında 2.5 senelik yazılım mühendisliğinden sonra yüksek lisans eğitimini tamamlamak için iş hayatına ara verdi. Yüksek Lisans eğitimine İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği dalında devam etmektedir.

Fatih Gündoğan