İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AMENABLE BANACH CEBİRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Didem EROĞLU

Anabilim Dalı : Matematik Mühendisliği

Programı : Matematik Mühendisliği

Tez Danışmanı: Öğr.Gör.Dr. Fuat ERGEZEN

HAZİRAN 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AMENABLE BANACH CEBİRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Didem EROĞLU
(509071003)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 07 Mayıs 2010
Tezin Savunulduğu Tarih : 10 Haziran 2010

Tez Danışmanı : Öğr.Gör.Dr. Fuat ERGEZEN(İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Doç.Dr. Banu UZUN (IŞIK ÜNV)
Öğr.Gör.Dr.Nurhan ÇOLAKOĞLU(İTÜ)

HAZİRAN 2010

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında gerekli tavsiye ve yönlendirmeleri yapan, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım değerli hocam Sayın Dr.Fuat Ergezen'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, kızkardeşim Özlem'e ve erkek arkadaşım Hulusi'ye Yüksek Lisans öğrenimim boyunca gösterdikleri özveri ve desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Mayıs 2010

Didem EROĞLU

Matematik Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathcal{A}(E)$	:*E* üzerinde yaklaşık operatörler
B'	: *B*'nin dual uzayı
$B^1(A,E)$	: *A*'dan *E*'ye iç türevler
$B^n(A,E)$	: Hochschild kompleksin *n*-kosınırı
C^S	: *S*'den *C*'ye tanımlanan tasvirlerin kümesi
$C_b(G)$	: G üzerindeki sınırlı sürekli fonksiyonların kümesi
$C^b(X)$	: *X* üzerindeki sınırlı fonksiyonların cebri
$C_0(X)$	: X üzerinde sonsuzdaki değeri sıfır olan sürekli fonksiyonların kümesi
δ_g	: *G*'deki nokta kütle
e_G	: *G* grubunun birimi
$\mathcal{H}^1(A,E)$	: Birinci Hochschild kohomoloji grubu
$\mathcal{H}^n(A,E)$	: *n*-inci Hochschild kohomoloji grubu
$H^n(A,E)$	: *n*-inci cebirsel Hochschild kohomoloji grubu
$\ker T$	: *T*'nin çekirdeği
$L(E,F)$	: *E*'den *F*'ye sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$L(E)=L(E,E)$	: *E*'den *E*'ye sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$\ell^\infty(S)$	: *S* üzerinde sınırlı fonksiyonların alt kümesi
$L^\infty(G)$	: *G* üzerindeki sınırlı fonksiyonların kümesi
$L^1(G)$	: G üzerinde Haar ölçüsüne göre integrallenebilen kompleks değerli fonksiyonların uzayı
$LUC(G)$	: *G* üzerindeki sol düzgün sürekli fonksiyonların kümesi
$M(G)$	: *G*'nin ölçü cebri
$\mathcal{N}^1(A,E)$	: *A*'dan *E*'ye sürekli iç türevlerin uzayı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$rad\,A$	: *A*'nın Jacobson radikali
$RUC(G)$	: *G* üzerindeki sağ düzgün sürekli fonksiyonların kümesi
$\operatorname{supp}(f)$	: *f*'in desteği
$UC(G)$	: *G* üzerindeki düzgün sürekli fonksiyonların kümesi.
$\mathcal{Z}^1(A,E)$	: *A*'dan *E*'ye sınırlı türevler
$\mathcal{Z}^n(A,E)$	: Hochschild kompleksin *n*-koçemberi

$\lVert\cdot\rVert_{\in}$	: injektif tensör normu
$\lVert\cdot\rVert_{\pi}$	: projektif tensör normu
$*$	: konvulüsyon
$\otimes$	: cebirsel tensör çarpımı
$\hat{\otimes}$	: projektif tensör çarpımı
$\check{\otimes}$	: injektif tensör çarpımı
$:=$	: tanıma eşit
$\square$	: kanıtın sonu

AMENABLE BANACH CEBİRLERİ

ÖZET

Soyut harmonik analizin temel taşları yerel kompakt gruplar ve bu gruplara bağlı cebirlerdir. Bu cebirlerin en önemlilerinden biri Fourier cebirleridir. Yerel kompakt grup, yerel Haussdorf topolojik uzay ve grubun çarpma işlemi ile ters alma işlemini karşılaştırılabilir yapan bir gruptur. Yani çarpma işlemi ve ters alma işlemi süreklidir.

Yerel kompakt gruplar için en belirleyici özelllik amenable kavramıdır. İlk olarak diskırit gruplarda Von Neuman tarafından tanımlanmıştır. Bu gruplar için amenable kavramı Banach –Tarski paradoksuna bağlı olarak ortaya çıkmıştır. Banach – Tarski paradoksunun en çok bilinen ifadesi; " Bir portakalı sonlu dilimlere ayırıp, tekrar birleştirerek yarıçapları ilk portakalın yarıçapı kadar olan iki tane portakal elde edebiliriz" şeklindedir. Banach–Tarski paradoksu, paradoksal ayrıştırmanın (paradoxical decomposition) bir örneğidir. Bir grubun paradoksal olmaması onun amenable olmasını gerektirir. Tersi de amenable ise paradoksal değildir.

Amenable kelimesini ilk olarak M.M. Day kullandı. Day, amenable yarı gruplar üzerine çalışmalarından sonra, yerel kompakt gruplar için amenable tanımını vermiştir; $L^{\infty}(G)$ üzerinde sol dönüşüm değişmez bir mean varsa bir G yerel kompakt grubuna amenable denir. Bütün sonlu, değişmeli ve kompakt gruplar amenabledir. İki üreteçli serbest grup ise amenable değildir.

1972 yılında B. E. Johnson, Hochschild kohomoloji yardımıyla Banach cebirlerinde amenable tanımını vermiştir. Johnson, bir yerel kompakt grubun grup cebrinin, grup amenable ise amenable olduğunu göstermiştir.

Bilinen Banach cebirlerinin çoğu amenabledır. Örneğin, değişmeli C^*-cebirleri, kompakt operatörlerin cebirleri, amenable grupların grup cebri amenabledır. Bu çalışmada amenable radikal Banach cebirleri incelenmiştir. Runde değişmeli olmayan amenable radikal Banach cebirlerinin olduğunu gösterirken, değişmeli amenable radikal Banach cebirlerinin olup olmadığı bilinmiyordu. Runde'nin örneğinden bir yıl sonra C. J. Read değişmeli amenable radikal Banach cebrine bir örnek vermiştir. Bu cebrin inşasında teknik zorluklar olmasına rağmen inşa fikrinin daha basit olduğu gösterilmiştir.

AMENABLE BANACH ALGEBRAS

SUMMARY

The cornerstones of Abstract Harmonic Analysis are locally compact groups and algebras related to these groups. One of the most important of these algebras is Fourier algebras. Locally compact group is a group that makes it possible to compare locally Hausdorff topological space with the product and inverse of the group. Namely, product and inverse operations are continuous.

The most distinctive feature of locally compact groups is the concept of “amenable”. This was first defined by Von Neuman in discrete groups. The concept of amenable for these groups first emerged in relation to the Banach –Tarski paradox. The most common known expression of Banach –Tarski paradox is; “An orange can be chopped into a finite number of chunks, and these chunks can then be put together again to yield two oranges, each of which has the same diameter as the one that just went into pieces.”. Banach–Tarski paradox is an example of paradoxical decomposition. The fact that a group is not paradoxical requires that group to be amenable. And reversely, if the group is amenable, then it is not paradoxical.

The word “amenable” was first used by M.M. Day. After his studies on amenable semi-groups, Day gave the definition of amenable for locally compact groups; If there is a left translation invariant mean on $L^{\infty}(G)$, a locally compact group G is called amenable. All finite, commutative and compact groups are amenable. Two generators on free group are not amenable.

In 1972, B. E. Johnson gave the amenable definition in Banach algebras with the help of Hochschild cohomology. Johnson showed that the group algebra of a locally compact group is amenable if the group is amenable.

Most of the known Banach algebras are amenable. For instance, commutative C^*-algebras, algebras of compact operators, group algebra of amenable groups are amenable. This study analyzes the amenable radical Banach algebras. When Runde showed that there are non-commutative amenable radical Banach algebras, it was not known whether there were commutative amenable radical Banach algebras. One year later the example of Runde, C. J. Read gave an example of commutative amenable radical Banach algebra. Although there are technical difficulties in the construction of this algebra, it is shown that the construction idea is more simple.

1. GİRİŞ

"Amenable" kavramı ilk olarak, 1904 yılında Lebesgue'nin $\mathbb{R}$ üzerinde Lebesgue integralinin özelliklerinin bir listesini vermesiyle ortaya çıkmıştır. Bu özelliklerin biri hariç, hepsi, Riemann integralinin temel özellikleriyle aynıydı. Farklı olan özellik Monoton Yakınsaklık Teoremi'nin bir versiyonuydu. Lebesgue doğal olarak, Monoton Yakınsaklık Teoremi bir kenara bırakılırsa, integralin özelliklerinin yine aynı şekilde verilip verilemeyeceğini sordu. Monoton Yakınsaklık Teoremi aslında sayılabilir toplamsallık ile denk olduğundan Lebesgue'in sorusu şu şekilde de sorulabilirdi: Eğer Monoton Yakınsaklık Teoremindeki koşullar sadece sonlu toplamsallık ile yer değiştirirse Lebesgue integrali hala tek midir?

Banach, daha sonra Lebesgue integralinden farklı olarak $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu toplamsal ve invaryant olan integral örneği verdi ve böylece bu soru olumsuz olarak yanıtlanmış oldu.

Daha sonra $\mathbb{R}$ üzerinde bir invaryant ölçünün varlığı kanıtlandı. İnvaryant ölçü μ ile ilgili göze çarpan iki önemli gerçek vardı: Birincisi; $\mathbb{R}$'nin bütün altkümelerinde tanımlanmış olması, ikincisi $\mathbb{R}$'nin μ-ölçüsünün sonlu olmasıydı. $\left(\mu(\mathbb{R})=1\right)$. Halbuki bu $\mathbb{R}$'nin Lebesgue ölçüsünün ∞ olması ile çelişiyordu. Modern dilde, $\mathbb{R}$ bir diskırit grup olarak amenable'dı ve μ ölçüsü bir invaryant mean'di.

1920'lerde ve 1930'larda, bir X kümesi üzerinde bir G grubu için invaryant mean'nin varlığı Banach ve Tarski tarafından araştırıldı. 1929 yılında Von Neuman Banach-Tarski teoremleri ile çalışmasında [29] makalesinde ilk olarak amenable kavramını tanımladı. Bu gruplar için amenable kavramı Banach Tarski paradoksuna bağlı olarak ortaya çıkmıştır. Tarski 1938 yılında böyle bir mean'nin ancak ve ancak X kümesinin bir "G-paradoksal ayrışımı" olmadığı durumda var olabileceğini gösterdi.

" Amenable" terimi ilk olarak Mahlon Marsh Day tarafından 1950 yılında kullanıldı. (amenable = mittelbar (Almanca) = moyennable (Fransızca)). Day, [7], [8], [9], [4],

[11] makalelerinde diskırit yarı grup ve gruplardan, yerel kompakt gruplara amenable kavramını geliştirmiştir. $L^{\infty}(G)$ üzerinde sol dönüşüm değişmez bir mean varsa bir G yerel kompakt grubuna amenable denir. Yine bu yıllarda Rosen [24] , Silverren [28], Folner [13], amenable diskırit ve yerel kompakt gruplar üzerinde önemli çalışmalar yapmışlardır.

B. E. Johnson, Hochschild kohomoloji gruplarından faydalanarak, Banach cebirleri için, amenable kavramını anlamlı kıldı. 1972 yılında yayınlanan ünlü makalesinde [17] G bir grup olmak üzere $L^{1}(G)$ Banach cebrinin amenable olması için gerek ve yeter şartın G'nin amenable olması gerektiğini kanıtlamıştır.

Daha sonraki yıllarda, Helemskii [16] makalesinde amenable Banach cebirlerinin homolojik özelliklerini incelemiştir. Bundan sonraki çalışmalar daha derin teoriler gerektirmiş ve kuvvetli, zayıf amenable kavramlarının doğmasına sebep olmuştur. Haagerup'un [15] makalesinde C^{*}-cebirlerinin amenable olması için gerek ve yeter şartın nükleer olması gerektiğine dair teoremi çok derin bir teorem örneğidir.

Amenable konusunda, 1988 yılında basılan A.L.T. Paterson'nun " Amenability", 2001 yılında basılan H.G. Dales'in "Banach algebras and automatic continuity", 2002 yılında basılan V. Runde'nin "Lectures on amenability" kitapları son yıllardaki temel kitaplardır.

Bu tezin, birinci bölümünde amenable konusunun tarihsel gelişimi verilmiştir. İkinci ve dördüncü bölümlerde temel bilgi ve kavramlar verilerek, Banach cebirlerinde amenable kavramına hazırlık yapılmıştır. Üçüncü bölümde harmonik analiz ve operatör uzaylarında hayati rol oynayan tensör çarpımları verilmiştir. Beşinci bölümde topolojik gruplar, altıncı bölümde harmonik analizin temel aracı olan yerel kompakt uzaylarda ölçü ve integrasyon kavramları verilmiştir. Yedinci bölümde diskırit ve yerel kompakt gruplar üzerinde amenable kavramı verildikten sonra son bölümde Banach cebirlerinde değişmeli ve değişmeli olmayan amenable radikal Banach cebirlerinin inşası verilmiştir.

2. CEBİRLER

Bu bölümde amenable Banach cebirleri için gerekli olacak temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Cebirler

2.1.1. Tanım: F cismi $\left(F=\mathbb{R} \text{ veya } F=\mathbb{C}\right)$ üzerinde $A \text{ x } A$'dan A'ya giden, $(x,y)\rightarrow x\cdot y$ tasviri ile verilen ve aşağıdaki şartları sağlayan A lineer uzayına *cebir* denir. Literatürde *lineer birleşim cebri (linear associative algebra)* olarakta isimlendirilir.

$\forall x,y,z\in A$ ve $\forall \alpha\in F$,

1) $x(yz)=(xy)z$

2) $x(y+z)=xy+xz$

$(x+y)z=xz+yz$

3) $(\alpha x)y=\alpha(xy)=x(\alpha y)$ **(2.1)**

$F=\mathbb{R}$ ise cebire reel cebir, $F=\mathbb{C}$ ise kompleks cebir denir.

2.1.2. Tanım: A cebrinin $A_1\subset A$ alt kümesi A'daki toplama, skalerle çarpma ve çarpma işlemleri altında bir cebir oluşturuyorsa, A_1'e A'nın bir *alt cebri* denir.

2.1.3. Teorem: A_1, A cebrinin bir alt kümesi olsun. $\forall x,y\in A_1$ ve $\forall\alpha\in F$,

1) $x+y\in A_1$

2) $\alpha x\in A_1$

3) $xy\in A_1$ **(2.2)**

ise A_1 bir alt cebirdir.

2.1.4. Tanım: *A* cebrinde $\forall x \in A$ için $xe = ex = x$ olacak şekilde bir $e \in A$ varsa *A* cebrine “birimli cebir” denir. *e* elemanına da *A* cebrinin *birim elemanı* denir.

2.1.5. Tanım: Birim elemanlı bir *A* cebrinde $yx = e$ ise *y*’ye *x*’in *sol tersi* denir ve x_l^{-1} ile gösterilir. $xy = e$ ise *y*’ye *x*’in *sağ tersi* denir ve x_r^{-1} ile gösterilir.

Bir elemanın sağ ve sol tersi varsa bunlar aynıdır.

$$x_l^{-1} = x_l^{-1}\left(x x_r^{-1}\right) = \left(x_l^{-1} x\right) x_r^{-1} = e \cdot x_r^{-1} = x_r^{-1} \qquad \textbf{(2.3)}$$

$\Rightarrow x_l^{-1} = x_r^{-1}$ bulunur. Bu durumda *x*’in tersi vardır ve x^{-1} ile gösterilir.

2.1.6. Teorem: Birimli bir A cebrinde *x*’in tersi var ve $xy = yx$ ise x^{-1} ile *y* değişmelidir.

2.1.7. Tanım: Bir değişmeli alt cebir başka bir değişmeli alt cebir tarafından kapsanmıyorsa bu cebire *maksimal alt cebir* denir.

2.1.8. Teorem: Her değişmeli alt cebir bir maksimal değişmeli alt cebir tarafından içerilir.

2.1.9. Teorem: *x* bir maksimal değişmeli alt cebir A_1’in elemanı ve x^{-1} varsa $x^{-1} \in A_1$ dir.

2.1.10. Tanım: Bir birimli *A* cebrinin sıfırdan farklı her elemanının tersi varsa *A*’ya *bölüm cebri (division algebra)*denir.

2.1.11. Teorem: Bir birimli *A* cebrinin sıfırdan farklı her elemanının sol tersi (ya da sağ tersi) varsa *A* bir bölüm cebridir.

2.1.12. Tanım: Bir *A* cebrinin *merkezi (center)*

$$C = \{x \in A : xy = yx, \quad \forall y \in A\}$$

olarak tanımlanır. Bir *A* cebrinin merkezi bir değişmeli alt cebirdir.

2.1.13. Tanım: Bir *A* cebrinin $I = I_L$ alt kümesi,

i) I_L, *A* lineer uzayının bir alt uzayı

ii) $x \in I_L$, $\forall a \in A$ için $a x \in I_L$

şartlarını sağlıyorsa I_L'ye A'nın bir *sol ideali* denir. Sağ ve iki taraflı ideal benzer şekilde tanımlanır.

2.1.14. Teorem: Birimli bir A cebrinde bir x elemanının sol (sağ) tersinin olması için gerek ve yeter şart herhangi bir öz (proper) sol (sağ) ideale ait olmamasıdır.

2.1.15. Tanım: A cebrinin bir sol (sağ veya iki taraflı) ideali A cebrinin başka sol (sağ veya iki taraflı) ideali tarafından kapsanmıyorsa *maksimal ideal* olarak adlandırılır.

2.1.16. Teorem: Birimli A cebrinde her sol (sağ veya iki taraflı) ideal bir maksimal sol (sağ veya iki taraflı) ideal tarafından kapsanır.

2.1.17. Teorem: Birimli bir cebirde bir x elemanının sol (sağ) tersinin olması için gerek ve yeter şart herhangi bir maksimal sol (sağ) ideale ait olmamasıdır.

2.1.18. Tanım: Sıfırdan farklı, iki-taraflı ideali olmayan cebire *basit (simple) cebir* denir.

2.1.19. Tanım: I, A cebrinin iki taraflı bir ideali olsun. A'nın iki elemanı x_1 ve x_2 için $x_1 - x_2 \in I$ ise *I'ya denk modül* (*equivalent modülo I*) denir.

2.1.20. Tanım: A cebrinde bir $x \in A$ alalım. *x'in sınıfı*,

$$[x] = \{ y \in A : x - y \in I \} = x + I \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.21. Tanım: Aşağıdaki işlemler altındaki cebire *bölüm (quotient) cebri* denir.

$$[x + y] = [x] + [y]$$

$$[\alpha x] = \alpha [x]$$

$$[x \cdot y] = [x] \cdot [y] \tag{2.5}$$

Bölüm cebri A/I ile gösterilir.

2.1.22. Tanım: *A* cebrinin I_L sol idealine, $\forall x \in A$ için $xu - x \in I_L$ olacak şekilde bir $u \in A$ varsa *regüler* denir. *u* elemanına *birim modül I ideali* (*identity modülo the ideal* I_L) denir.

I iki taraflı idealinin regüler olması demek $\exists\, u \in A$,

$ux - x \in I$ ve $xu - x \in I$, $\forall x \in A$ **(2.6)**

olmasıdır. Eğer *A* birimli ise $u = e$ olmalıdır ve her ideal regüler olur.

2.1.23. Teorem: *A* cebrinde bir *x* elemanının bir sol tersinin olmaması için gerek ve yeter şart $I_L = \{ a + ax \}$, $a \in A$ bir sol ideal olmasıdır. Bu durumda I_L, *x*'i içermeyen regüler sol idealdir.

2.1.24. Teorem: *A* cebrinde bir *x* elamanının bir sol tersinin olması için gerek ve yeter şart keyfi maksimal regüler sol ideal M_L için $x + y + yx \in M_L$ olacak şekilde bir *y* elemanının olmasıdır.

2.2. Banach Cebirleri

2.2.1. Tanım: *E* bir lineer uzay olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ tasvirine *E* üzerinde bir *norm* denir.

i) $\|x\| \geq 0 \quad (x \in E);\quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \in \mathbb{C}, x \in E)$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in E)$. **(2.7)**

Üzerinde norm tanımlanan *E* uzayına normlu uzay denir ve $(E, \|\cdot\|)$ ile gösterilir.

2.2.2. Tanım: Bir normlu uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise diğer bir deyişle, normlu uzay tam ise *Banach uzayı* olarak adlandırılır.

2.2.3. Tanım: *A* bir cebir olsun. *A* üzerinde *cebir normu*, *A*'yı normlu uzay yapan ve

iv) $\|ab\| \leq \|a\| \|b\| \qquad (a, b \in A)$ **(2.8)** koşulunu sağlayan $\|\cdot\|: A \to \mathbb{R}$ tasviridir. Bu norm ile A cebrine *normlu cebir* denir ve $(A, \|\cdot\|)$ ile gösterilir. $(A, \|\cdot\|)$ normlu cebri, normlu uzay tam ise *Banach cebri* olarak adlandırılır.

2.2.4. Tanım: Bir A Banach cebri bir e_A birim elemanına sahip ve $\|e_A\| = 1$ ise *birimli (unital) Banach cebri* olarak adlandırılır.

2.2.5. Örnekler:

2.2.5.1. Örnek: S, boş olmayan bir küme ve C bir cebir olsun. C^S, S'den C'ye tanımlanan fonksiyonların kümesini göstersin ve üzerindeki cebirsel işlemler şu şekilde tanımlansın.

$\forall s \in S \quad , \forall f, g \in C^S$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$(\alpha f + \beta g)(s) = \alpha f(s) + \beta g(s)$

$(fg)(s) = f(s) g(s)$

$$1(s) = 1. \qquad \textbf{(2.9)}$$

C^S, değişmeli ve birimli cebirdir.

2.2.5.2. Örnek: $\ell^\infty(S)$, S üzerindeki sınırlı fonksiyonların altkümesini göstersin. (S'den C'ye giden sınırlı fonksiyonlar) S üzerinde düzgün norm (uniform norm) şu şekilde tanımlansın.

$$|f|_S = \sup\{|f(s)| : s \in S\} \qquad (f \in \ell^\infty(S)) \qquad \textbf{(2.10)}$$

O halde $(\ell^\infty(S), |\cdot|_S)$ birimli Banach cebridir.

2.2.5.3. Örnek: X bir topolojik uzay olsun. $C(X)$, X üzerindeki bütün sürekli fonksiyonların cebrini ve $C^b(X)$, X üzerindeki, sınırlı fonksiyonların cebrini göstersin. $|f|_X = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \qquad (f \in \ell^\infty(X))$

olmak üzere, $(C^b(X), |\cdot|_X)$ bir birimli cebirdir.

2.2.5.4. Örnek: *E* ve *F* lineer uzaylar olsun. $L(E,F)$, *E*'den *F*'ye bütün lineer tasvirlerin koleksiyonunu göstersin. $L(E,F)$ standart işlemler altında lineer uzaydır.

E ve *F*'yi Banach uzayları olarak alalım. $B(E,F)$, *E*'den *F*'ye bütün sınırlı (diğer bir deyişle sürekli) lineer operatörlerin ailesini göstersin. Bu durumda $L(E,F)$'nin alt uzayıdır ve Banach uzayıdır. Operatör normu,

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in E \ , \ \|x\| \leq 1\} \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanır.

$L(E,E)$ için kısaca $L(E)$ ve $B(E,E)$ için kısaca $B(E)$ kullanılabilir. $L(E)$'deki *S* ve *T* operatörlerinin çarpımı,

$$(ST)(x) = (S \circ T)(x) = S(Tx) \quad (x \in E) \tag{2.12}$$

ile verilir. Aşikar olarak,

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\| \quad (S,T \in B(E)) \tag{2.13}$$

sağlanır. $(B(E), \|\cdot\|)$ bir birimli Banach cebridir.

$B(E)$'nin birimi, I_E birim operatörüdür. $B(E)$ değişmeli olmayan Banach cebrine bir örnektir.

2.3. Modüller

2.3.1. Tanım: *A*, $\mathbb{C}$ üzerinde bir cebir ve *E*, $\mathbb{C}$ üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$(a,x) \mapsto a \cdot x \ , A \times E \to E$$

tasviri aşağıdaki koşulları sağlar ise *E*'ye bir *sol A-modül* denir.

i) $a \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha \, a \cdot x + \beta \, a \cdot y \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ a \in A, \ x, y \in E)$

ii) $(\alpha a + \beta b) \cdot x = \alpha \, a \cdot x + \beta b \cdot x \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C} \ , \ a, b \in A \ , \ x \in E)$

iii) $a \cdot (b \cdot x) = ab \cdot x \quad (a, b \in A \ , x \in E)$ **(2.14)**

A, $\mathbb{C}$ üzerinde bir cebir ve *E*, $\mathbb{C}$ üzerinde bir lineer uzay olsun.

$\left(a,x\right)\mapsto x\cdot a \quad , \quad A\text{x}E\to E$

tasviri aşağıdaki koşulları sağlar ise *E*’ye bir *sağ A-modül* denir.

i) $\left(\alpha x+\beta y\right)\cdot a=\alpha x\cdot a+\beta y\cdot a \quad \left(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C},\ a\in A\ ,\ x,y\in E\right)$

ii) $x\cdot\left(\alpha a+\beta b\right)=\alpha x\cdot a+\beta x\cdot b \quad \left(\alpha,\beta\in\mathbb{C}\ ,\ a,b\in A\ ,\ x\in E\right)$

iii) $\left(x\cdot a\right)\cdot b=x\cdot ab \quad \left(a,b\in A\ ,\ x\in E\right)$ **(2.15)**

Bir *A*-bimodül , sol *A*-modül ve sağ *A*-modül olan bir *E* uzayıdır ve

$a\cdot\left(x\cdot b\right)=\left(a\cdot x\right)\cdot b \qquad \left(a,b\in A\ ,\ x\in E\right)$ **(2.16)**

koşulunu sağlar. Varsayalım ki *A* değişmeli ve

$a\cdot x=x\cdot a \quad \left(a\in A\ ,\ x\in E\right)$ **(2.17)**

olacak şekilde *E* bir *A*-bimodül olsun. O halde *E* bir *A*-modüldür.

2.3.2. Tanım: *E* bir sol *A*-modül olsun.

$\rho\left(a\right)\left(x\right)=a\cdot x \quad \left(a\in A,\ x\in E\right)$ **(2.18)**

ile tanımlanan $\rho:A\to L\left(E\right)$ tasviri bir homorfizmdir ve bu şekildeki her homomorfizm bir sol *A*-modül tanımlar. ρ tasviri*, E* lineer uzayı üzerinde *A* cebrinin *temsili* olarak adlandırılır.

2.3.3. Tanım: Farzedelim ki *A* birimli olsun. Eğer

$e_A\cdot x=x \quad \left(x\in E\right)$

koşulu sağlanıyorsa sol A-modül *E*’ye *birimli* denir.

2.3.4. Tanım: Eğer $A\cdot E=\{a.x:\ a\in A,\ x\in E\}\neq\left\{0\right\}$ ve *E*’nin alt modülleri sadece $\left\{0\right\}$ ve *E* ise *E* modülüne *basit (simple)* denir.

Bir basit modül *E* için, $A\cdot x=E \qquad \forall x\in E\setminus\left\{0\right\}$

2.3.5. Tanım: *E* ve *F* sol *A*-modül olmak üzere,

$T\left(a\cdot x\right)=a\cdot Tx \quad \left(a\in A\ ,\ x\in E\right)$ **(2.19)**

koşulunu sağlayan $T:E\to F$ lineer tasvirine *sol A-modül homomorfizm* denir.

Benzer şekilde *A*-bimodül homomorfizm de tanımlanabilir.

2.3.6. Tanım: A bir Banach cebri ve *E* bir sol *A*-modül olan bir Banach uzayı olsun. Eğer,

$$\rho(a): x \mapsto a \cdot x \ , E \to E \tag{2.20}$$

tasviri her $a \in A$ için sürekli ise *E*'ye *zayıf Banach sol A-modül* denir. Eğer,

$$(a, x) \mapsto a \cdot x \ , \ A \times E \to E \tag{2.21}$$

tasviri sürekli ise *E*'ye *Banach sol A-modül* denir.

Benzer şekilde sağ *A*-modüller ve *A*-bimodüller tanımlanabilir. Her $a \in A$ için

$$\| a \cdot x \| \leq C_a \| x \| \quad (x \in E) \tag{2.22}$$

olacak şekilde bir $C_a > 0$ sabiti varsa *E*, zayıf Banach'tır.

$$\| a \cdot x \| \leq C \| a \| \| x \| \quad (a \in A, \ x \in E) \tag{2.23}$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti varsa E Banach'tır.

A ve *B* Banach cebirleri, $\theta : A \to B$ homomorfizm olsun.

$$a \cdot b = \theta(a) b \ , \ b \cdot a = b \theta(a) \quad (a \in A \ , b \in B) \tag{2.24}$$

tasvirleri için *B* zayıf Banach *A*-bimodüldür. Fakat θ sürekli ise *B* Banach *A*-bimodüldür.

2.3.7. Önerme: *A* birimli Banach cebri olsun.

i) *A*'daki her primitif ideal kapalıdır.

ii) *E* basit sol *A*-modül olsun. *E* üzerinde, $(E, \| \cdot \|)$ bir Banach sol A-modül olacak şekilde $\| \cdot \|$ normu vardır.

2.3.8. Tanım: *A* bir Banach cebri ve *E* bir Banach *A*-bimodül olsun. $a \in A$ ve $\lambda \in E'$ için $a \cdot \lambda$ ve $\lambda \cdot a$ şu şekilde tanımlanır.

$$< x, a \cdot \lambda > = < x \cdot a, \lambda > \quad , \quad < x, \lambda \cdot a > = < a \cdot x, \lambda > \quad (x \in E) \tag{2.25}$$

O halde $a\cdot\lambda$, $\lambda\cdot a\in E'$ ve E' bir Banach A-bimodüldür ve E''ye E'nin *dual modülü* denir. $E=A$ alınırsa,

$$<b,a\cdot\lambda>=<ba,\lambda> \quad , \quad <b,\lambda\cdot a>=<ab,\lambda> \qquad \left(a,b\in A\ ,\ \lambda\in A'\right) \tag{2.26}$$

işlemleri için A' bir Banach A-bimodüldür. Bu modül A'nın dual modülü olarak adlandırılır.

2.4. Türevler

2.4.1. Tanım: A bir cebir ve E bir A-bimodül olsun.

$$D(ab)=a\cdot Db+Da\cdot b \qquad (a,b\in A) \tag{2.27}$$

koşulunu sağlayan $D:A\to E$ lineer tasvirine *türev (derivation)* denir.

(2.27) denklemi *birim türev (derivation identity)* olarak adlandırılır. A'dan E'ye türevlerin kümesi $Z^1(A,E)$ ile gösterilir. $Z^1(A,E)$, $\mathbb{L}(A,E)$'nin bir lineer altuzayıdır. Örneğin, bir $x\in E$ ve

$$\delta_x(a)=a\cdot x-x\cdot a \qquad (a\in A) \tag{2.28}$$

kümesi alınırsa , $a,b\in A$ için

$$\begin{aligned}\delta_x(ab)&=a\cdot(b\cdot x-x\cdot b)+(a\cdot x-x\cdot a)\cdot b\\ &=\delta_x(a)\cdot b+a\cdot\delta_x(b)\end{aligned} \tag{2.29}$$

elde edilir ve δ_x bir türevdir. Bu formdaki türev *iç türev (inner derivation)* olarak adlandırılır. İç türev olmayan türevlere ise *dış türev (outer derivation)* denir.

$$\delta_b : a\mapsto ab-ba\ ,\ A\to A \tag{2.30}$$

tasviri, A cebri üzerinde bir iç türevdir. A'dan E'ye tanımlanan iç türevlerin kümesi $N^1(A,E)$ ile gösterilir ve $Z^1(A,E)$'nin bir lineer alt uzayıdır. $\mathbb{C}$ lineer uzayı, $(a,z)\mapsto\varphi(a)z$, $A\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ tasviri için A-modüldür ve bu da $\mathbb{C}_\varphi$ ile gösterilir. $Z^1(A,\mathbb{C}_\varphi)$ kümesi,

$$d(ab)=\varphi(a)\,d(b)+d(a)\,\varphi(b) \qquad (a,b\in A) \tag{2.31}$$

olacak şekilde $d: A \to \mathbb{C}$ lineer fonksiyonellerinden oluşur. Bu tasvirler φ'deki *noktasal türevlerdir.*

A bir Banach cebri ve *E* bir Banach *A*-bimodül olsun. *A*'dan *E*'ye sürekli türevlerin uzayı $\mathcal{Z}^1(A, E)$ ile sürekli iç türevlerin uzayı ise $\mathcal{N}^1(A, E)$ ile gösterilir.

2.4.2. Teorem: (Singer ve Wermer)

A bir değişmeli Banach cebri ve $D: A \to A$ bir sürekli türev olsun. O halde $D(A) \subset rad\, A$.

2.4.3 Teorem: (Sinclair)

A bir Banach cebri ve $D: A \to A$ bir sürekli türev olsun. O halde, *A*'nın her primitif *P* ideali için $D(P) \subset P$ dir.

2.5. Radikaller

2.5.1. Tanım: *R* değişmeli bir halka ve *I* bir ideal olsun. $a, b \in R$ olmak üzere $a \cdot b \in I$ iken $a \in I$ veya $b \in I$ ise *I*'ya *asal (prime) ideal* denir.

2.5.2. Tanım: *R* bir halka ve *M* bir ideal olsun. $M \neq R$ ve *M*'yi içeren *R* ile *M* arasında bir ideal yoksa *M*'ye *maksimal ideal* denir. Yani,

$M \;\; maksimal \Leftrightarrow M \subset J \subset R \Rightarrow J = R$

2.5.3. Teorem: Her değişmeli ve birimli halkada maksimal ideal asal idealdir.

2.5.4. Teorem: Her değişmeli ve birimli halkada *M* idealinin maksimal ideal olması için gerek ve yeter şart R / M nin cisim olmasıdır.

2.5.5. Teorem: Her değişmeli ve birimli halkada *I* idealinin asal ideal olması için gerek ve yeter şart R/I nın tamlık bölgesi olmasıdır.

2.5.6 Tanım: *R* değişmeli halkasında bir $a \in R$ elemanı $n > 0 \; (n \in \mathbb{N})$, $a^n = 0$ şartını sağlıyorsa a'ya *nilpotent eleman* denir.

2.5.7. Teorem: Bir *R* değişmeli halkasında bütün nilpotent elemanların kümesi *N*, *R*'nin bir idealidir ve R/N'nin sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoktur.

2.5.8. Tanım: Teorem 2.5.7.'deki *N* idealine *Nil radikal* denir.

2.5.9. Teorem: *R* halkasının nil radikali *R*'nin bütün asal ideallerinin kesişimidir.

2.5.10. Tanım: Değişmeli *R* halkasının bütün maksimal ideallerinin kesişimi *J*'ye *R*'nin *Jacobson radikali* denir.

2.5.11. Teorem: Bir *a* elemanının *R* halkasının Jacobson radikaline ait olması için gerek ve yeter şart $\forall r \in R$ için $1-ar$ 'nin birim olmasıdır.

2.5.12. Teorem: Bir *a* elemanının *R*'de tersi olması için gerek ve yeter şart $a+J$ 'nin *R/J*'de tersinin olmasıdır.

2.5.13. Teorem: *N*, *R*'de bir nil ideal ise *N*, Jacobson radikal *J*'dir.

2.5.14. Tanım: *R*'nin bir *x* elemanı için $x+y+xy=0$ şartını sağlayan *R*'de bir *y* elemanı varsa *x*'e *sağ quasi-regüler* denir. Eğer $x+y+yx=0$ olacak şekilde bir $y \in R$ varsa *x*'e *sol quasi-regüler* denir.

Sağ quasi-regüler eleman nilpotent elemanın genellemesidir. $\exists n \in Z^+$ için $x^n=0$ oluyorsa *x*'e nilpotent eleman demiştik. Eğer

$y=-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}$ seçilirse,

$$\begin{aligned} x+y+xy &= x+\left(-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}\right)+\left(-x^2+x^3-x^4+\ldots+(-1)^{n-1}x^n\right) \\ &= (-1)^{n-1}x^n \\ &= 0 \qquad \textbf{(2.32)} \end{aligned}$$

bulunur.

2.5.15. Teorem: *x*'in sağ quasi-regüler olması için gerek ve yeter şart $\{r+xr\}=R$ olmasıdır.

2.5.16. Tanım: Bir halkanın her elemanı sağ quasi-regüler ise halkaya *sağ quasi-regüler* denir.

2.5.17. Tanım: Bir R halkasının bir I sağ idealinin (sol ya da iki taraflı ideal de olabilir) her elamanı sağ quasi-regüler ise I'ya *sağ quasi-regüler sağ ideal* denir. I sol idealinin her elemanı sağ quasi-regüler ise I'ya *sağ quasi-regüler sol ideal* denir.

2.5.18. Teorem: x sağ quasi-regüler ve y bir sağ quasi-regüler sağ ideal I'ya ait ise $x+y$ bir sağ quasi-regüler elemandır.

2.5.19. Sonuç: İki sağ quasi-regüler sağ idealin toplamı bir sağ quasi-regüler idealdir.

2.5.20. Sonuç: Bir R halkasının bütün sağ quasi-regüler ideallerinin toplamını J ile gösterelim. J, sağ quasi-regüler sağ idealdir. J, R'nin her sağ quasi-regüler sağ idealini içerir.

2.5.21. Teorem: J iki taraflı idealdir.

2.5.22. Teorem: Bir z elemanı hem sağ quasi-regüler $z+w+zw=0$ ve hem de sol quasi-regüler yani $z+t+tz=0$ ise $t=w$, $wz=zw$ ve w tektir.

2.5.23. Tanım: I, R'nin bir sağ ideali olsun. $\forall r\in R$, $er-r\in I$ olacak şekilde R'de bir e elemanı varsa I sağ idealine *modüler* denir. Böyle bir e elamanına I'nın bir *sol birimi* denir.

2.5.24. Teorem: Herhangi bir R halkasının Jacobson radikali,

R'nin bütün modüler sağ maksimal ideallerinin kesişimi (α)'ya,

R'nin bütün modüler sol maksimal ideallerinin kesişimi (β)'ya,

$\{x : xr$ sağ quasi-regüler, $\forall r\in R\}$ kümesi (γ)'ya,

$\{x : rx$ sol quasi-regüler, $\forall r\in R\}$ kümesi (δ)'ya

eşittir.

2.5.25. Sonuç: R halkası birimli halka ise bütün sağ (sol ya da iki taraflı) idealler modüler sağ (sol ya da iki taraflı) ideallerdir. Dolayısıyla, Jacobson radikal bütün sağ maksimal ideallerin kesişimidir.

2.5.26. Tanım: *R* bir halka ve *M*, *R*'nin bir ideali olsun.

$$\left(M:R\right) \equiv \left\{ r \in R : Rr \subseteq M \right\} \tag{2.33}$$

olarak tanımlanır. $I, J \in R$ idealleri için,

$$\left(I:J \right) = \left\{ r \in R: \; rJ \subseteq I \right\} \tag{2.34}$$

olarak tanımlanır.

2.5.27. Teorem: *M* bir modüler sağ ideal ise $\left(M:R \right) \subseteq M$ ve $\left(M:R\right)$, *M*'de içerilen en büyük iki taraflı idealdir.

2.5.28. Tanım: *R*'de $\left(M:R\right)=0$ olacak şekilde bir maksimal sağ ideal varsa *R*'ye *sağ primitif* denir.

2.5.29. Tanım: *P*, *R*'de bir ideal ise ve R/P sağ primitif ise *P*'ye *sağ primitif ideal* denir.

2.5.30. Teorem: *M*, *R*'nin bir maksimal modüler sağ ideali ise $\left(M:R\right)$ bir sağ primitif idealdir.

2.5.31. Teorem: Jacobson radikali *J*, *R*'nin bütün sağ primitif (veya sol primitif) ideallerinin kesişimine eşittir.

2.6. Banach Cebirlerinde Radikaller

2.6.1. Tanım: Birimli bir *A* cebrinde keyfi *y* elemanı için $\left(e + yx_0 \right)_L^{-1}$ varsa x_0 elemanına genelleştirilmiş *nilpotent eleman* denir.

2.6.2. Tanım: *A* cebrindeki bütün genelleştirilmiş nilpotent elemanların kümesine *A*'nın *Jacobson radikali* denir.

2.6.3. Teorem: Birim elemanlı bir cebrin radikali cebrin bütün maksimal sol ideallerinin kesişimine eşittir.

Benzeri maksimal sağ idealler içinde söylenebilir. O halde radikal iki taraflı idealdir.

Kanıt: x_0 bütün maksimal sol ideallerde olsun. Kabul edelim ki öyle bir $\exists y \in A$ vardır ki $(e + yx_0) = z$'nin tersi olmasın. Sol tersi yoksa z bir maksimal sol I_L idealine aittir. x_0 bütün maksimal sol ideallerde ise $x_0 \in I_L$ dir.

O halde $yx_0 \in I_L$ dir. Buradan $e = z - yx_0 \in I_L$ bulunur. Bu da çelişkidir çünkü sol idealde birim eleman olamaz. O halde $e + yx_0$'ın sol tersi her y için vardır. Yani x_0 radikale aittir.

Tersine, x_0 radikalin elemanı olsun. x_0 elemanının bütün maksimal sol ideallere ait olduğunu göstermemiz gerekir. Tersine olarak kabul edelim ki $\exists I_L$, $x_0 \notin I_L$ koşulunu sağlayan bir I_L maksimal sol ideali olsun.

$$z = a - yx_0 \ , \ (a \in I_L \ , \ y \in A)$$

şeklindeki bütün z elemanlarının kümesi bir sol idealdir ve I_L'yi kapsar. Bu durumda z'lerden oluşan küme A olmalıdır, çünkü I_L maksimal idealdir.

Bu durumda, $\exists y, a \in A$ vardır ki $e = a - yx_0$ dır.

O halde $e + yx_0 = a \in I_L$ dir ve $e + yx_0$'ın sol tersi olamaz. Bu ise hipotez ile çelişkilidir. Çünkü x_0 elemanı radikalden alınmıştı ve sol tersi olması gerekirdi.

Dolayısıyla, x_0 bütün maksimal sol ideallere aittir. □

2.6.4. Sonuç: Bu teoreme göre radikal bir sol idealdir.

2.6.5. Teorem: x_0'ın birimli bir A cebrinin radikaline ait olması için gerek ve yeter şart $(e + ax_0)^{-1}$ in $\forall a \in A$, varolmasıdır.

2.6.6. Teorem: Bütün maksimal sol ideallerin kesişimi bütün maksimal sağ ideallerin keişimine eşittir. O halde radikal iki taraflı idealdir.

2.6.7. Tanım: Keyfi $z \in A$ ve keyfi α skaleri için $\alpha x_0 + zx_0$'ın bir sol quasi-tersi varsa x_0 elemanına *genelleştirilmiş nilpotent eleman* denir.

2.6.8. Tanım: A cebrinde bütün genelleştirilmiş nilpotent elemanların kümesine cebrin *radikali denir* ve *radA* ile gösterilir.

2.6.9. Tanım: Eğer cebir radikaline eşit ise (yani *radA* = A ise) A cebrine *radikal cebir* denir. Diğer durumda cebire *radikal olmayan cebir* denir.

2.6.10. Teorem: Bir radikal olmayan cebirde, radikal, bütün maksimal regüler sol ideallerin kesişimi veya bütün maksimal regüler sağ ideallerin kesişimine eşittir. Dolayısıyla, radikal iki taraflı idealdir.

2.6.11. Teorem: A'nın bütün indirgenemez (irreduciable) temsillerinin (representation) çekirdeğinin kesişimi Jacobson radikaldir.

2.6.12. Teorem: Eğer A bir radikal olmayan cebir ise, cebrin radikali A'nın bütün primitif ideallerinin kesişimidir.

2.6.13. Tanım: Bir cebrin radikali yalnız sıfır elemanını içeriyorsa (yani $\mathrm{rad}A=\{0\}$), cebire *yarı-basit (semi-simple)* denir.

2.6.14. Teorem: rad$A$, A cebrinin radikali ise A / rad$A$ bir yarı-basit cebirdir.

2.6.15. Teorem: Bir cebrin radikali , A'daki bütün quasi-regüler sol (ya da sağ) ideallerinin toplamına eşittir.

2.6.16. Teorem: Cebrin radikali, $\forall x \in A$ ve her α skaleri için $(\xi + x)q$ $\left(\text{veya } q(\xi + x)\right)$ quasi-regüler olacak şekilde bütün q elemanlarından oluşur.

2.6.17. Tanım: Bir normlu cebirde bir ideal, topolojik nilpotent elemanların kümesi N'de içeriliyorsa *topolojik nil ideal* olarak adlandırılır.

2.6.18. Teorem: Bir normlu cebrin radikali bir topolojik nil idealdir.

2.6.19. Teorem: Bir A Banach cebrinin radikali aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) Radikal, kapalı iki taraflı idealdir.

ii) Radikal, topolojik nil idealdir ve bütün topolojik nil sol (veya sağ) ideallerin toplamına eşittir.

iii) Radikalin her elemanı, iki taraflı topolojik sıfır bölendir.

2.6.20. Sonuç: Banach cebrinde, topolojik nilpotent elemanların kümesi N bir ideal ise, o halde radikal N'ye eşittir.

2.6.21. Sonuç: Bir değişmeli yarı basit cebrin herhangi alt cebri (kapalı veya değil) yarı-basittir.

3. TENSÖR ÇARPIMI

Bu bölümde harmonik analiz ve operatör uzaylarda cebirin yapısını belirleyen en önemli kavramlardan biri olan tensör çarpımları verilmiştir. Tensör çarpımları ile ilgili detaylı bilgiler [27] da bulunabilir.

3.1. Cebirsel Tensör Çarpımı

3.1.1. Tanım: $E_1,\ldots,E_n$ lineer uzaylar olsun. $E_1, E_2, \ldots, E_n$ nin *tensör çarpımı* $\mathcal{T}$ bir lineer uzay ve $\tau : E_1\times\cdots\times E_n \to \mathcal{T}$ aşağıdaki evrensel özelliği sağlayan bir *n*-lineer tasvir olmak üzere $(\mathcal{T},\tau)$ ikilisidir. Her F lineer uzayı ve her n-lineer tasvir $V: E_1\times\cdots\times E_n \to F$ için $V=\widetilde{V}\circ\tau$ olacak şekilde tek bir $\widetilde{V}:\mathcal{T}\longrightarrow F$ lineer tasviri vardır. $E_1,\ldots,E_n$ nin $(\mathcal{T},\tau)$ tensör çarpımı tek değildir. $\mathcal{T}'$ bir başka lineer uzay ve $\theta:\tau'\to\tau$ lineer uzayların bir izomorfizmi ise $(\tau',\theta\circ\tau)$, $E_1,\ldots,E_n$ nin bir başka tensör çarpımıdır.

Verilen iki $(\mathcal{T}_1,\tau_1)$ ve $(\mathcal{T}_2,\tau_2)$ tensör çarpımı; $(\mathcal{T}_1,\tau_1)$ ve $(\mathcal{T}_2,\tau_2)$nin bir izomorfizmi, $\tau_2=\theta\circ\mathcal{T}_1$ olacak şekilde $\theta:\mathcal{T}_1\to\mathcal{T}_2$ ye bir izomorfizmdir.

Verilen $E_1,\ldots,E_n$ lineer uzayları ve $(\mathcal{T},\tau)$ tensör çarpımı için standart notasyon kullanılırsa, $\mathcal{T}$ için $E_1\otimes\ldots\ldots\otimes E_n$ yazılır ve

$$x_1\otimes\ldots\ldots\otimes x_n := \tau(x_1,\ldots,x_n) \qquad (x_1\in E_1,\ldots\ldots,x_n\in E_n) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki formun elemanlarına *temel tensörler (elementary tensors)* denir ve $E_1\otimes\ldots\ldots\otimes E_n$ nin elemanları *tensörler* olarak adlandırılır.

3.1.2. Önerme: $E_1,\ldots,E_n$ lineer uzaylar ve $x\in E_1\otimes\ldots\ldots\otimes E_n$ olsun. O halde bir $m\in\mathbb{N}$ ve her bir $j=1,\ldots,n$ için,

$$\mathrm{x}=\sum_{k=1}^{m} x_1^{(k)}\otimes\ldots\ldots\otimes x_n^{(k)} \qquad \textbf{(3.2)}$$

olacak şekilde, $x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(m)}\in E_j$ vardır.

3.1.3. Örnek: *A* bir cebir, *E* bir sol *A*-modül ve *F* bir sağ *A*-modül olsun.

$$a\cdot\left(x\otimes y\right)=a\cdot x\otimes y \quad \text{ve} \quad \left(x\otimes y\right)\cdot a=x\otimes y\cdot a \qquad \left(a\in A,\ x\in E,\ y\in F\right) \qquad \textbf{(3.3)}$$

olacak şekilde, $E\otimes F$ 'de *A*'nın tek bir bimodül aksiyonu vardır.

3.1.4. Teorem: $E_1,\ldots,E_n$ lineer uzayları için $E_1\otimes\ldots\otimes E_n$ tensör çarpımı mevcuttur.

3.1.5. Lemma: $m\in\mathbb{N}$, $E_1,\ldots,E_n$ lineer uzaylar ve $j=1,\ldots,n$ için

$$\sum_{k=1}^{m} x_1^{(k)}\otimes\ldots\otimes x_n^{(k)}=0 \qquad \textbf{(3.4)}$$

olacak şekilde $x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(m)}\in E_j$ olsun. Eğer $x_n^{(1)},\ldots\ldots,x_n^{(m)}$ lineer bağımsız ise,

$x_1^{(k)}\otimes\ldots\otimes x_{n-1}^{(k)}=0 \qquad \left(k=1,\ldots,m\right)$ elde edilir.

3.2. Banach Uzaylarında Tensör Çarpımı

Eğer $E_1,\ldots,E_n$ Banach uzayları ise Teorem 3.1.4' e göre tensör çarpımının $E_1\otimes\ldots\otimes E_n$ olduğunu biliyoruz. Tensör çarpımı genelde Banach uzayı değildir. $E_1\otimes\ldots\otimes E_n$ üzerinde norm tanımlayabiliriz. Bu norma göre tamlaştırma yapılarak Banach uzayı elde edilebilir.

3.2.1. Tanım: $E_1,\ldots,E_n$ Banach uzayları olsun. $E_1\otimes\ldots\otimes E_n$ üzerinde bir norm $\|\cdot\|$,

$$\left\|x_1\otimes\ldots\otimes x_n\right\|=\left\|x_1\right\|\ldots\ldots\left\|x_n\right\| \qquad \left(x_1\in E_1,\ldots,x_n\in E_n\right) \qquad \textbf{(3.5)}$$

koşulunu sağlarsa *çapraz norm (cross norm)* olarak adlandırılır. Böyle bir normun olup olmadığı akla gelen ilk sorudur. Cevabı aşağıdaki 3.3 ve 3.4 alt bölümlerinde verilmiştir.

3.3. İnjektif Tensör Çarpımı

$E_1,\dots,E_n$ Banach uzayları ve $E_1',\dots\dots,E_n'$ onların dual uzayları olsun. $j=1,\dots,n$ için $\phi_j \in E_j'$ olsun. $\mathbb{C}\otimes\dots\otimes\mathbb{C}\cong\mathbb{C}$ olduğu için $\phi_1\otimes\dots\otimes\phi_n$, $E_1\otimes\dots\otimes E_n$ üzerinde bir lineer fonksiyoneldir.

3.3.1. Tanım: $E_1,\dots,E_n$ Banach uzayları ve $E_1',\dots\dots,E_n'$ onların dual uzayları olsun. Bu durumda $\mathrm{x}\in E_1\otimes\dots\otimes E_n$ için,

$$\|\mathrm{x}\|_{\in} := \sup\left\{ \left| <\mathrm{x}, \phi_1\otimes\dots\dots\otimes\phi_n> \right| : \phi_j \in B_1\left[\,0, E_j'\,\right], j=1,\dots,n \right\} \qquad \textbf{(3.6)}$$

olarak tanımlansın. $E_1\otimes\dots\otimes E_n$ üzerinde $\|\cdot\|_{\in}$ normuna *injektif norm* denir.

3.3.2. Önerme: $E_1,\dots,E_n$ Banach uzayları olsun. Bu durumda, $\|\cdot\|_{\in}$ normu $E_1\otimes\dots\otimes E_n$ üzerinde bir çapraz normdur.

3.3.3. Tanım: $E_1,\dots,E_n$ Banach uzayları olsun. $E_1\otimes\dots\otimes E_n$ nin $\|\cdot\|_{\in}$ normuna göre tamlaştırılmasına *injektif tensör çarpımı* denir ve $E_1 \overset{\vee}{\otimes}\dots\overset{\vee}{\otimes} E_n$ ile gösterilir.

3.3.4. Örnek: *A* bir Banach cebri, *E* bir sol Banach *A*-modül ve *F* bir sağ Banach *A*-modül olsun. $E\otimes F$ ’deki *A*’nın bimodül aksiyonu, bir Banach *A*-bimodülde $E\overset{\vee}{\otimes}F$ ye dönüşür.

Ω bir küme ve *E* bir lineer uzay olsun. $f\in\mathbb{C}^{\Omega}$ ve $x\in E$ için $fx\in E^{\Omega}$ şu şekilde tanımlanır.

$$(fx)(w) := f(w)x \quad (w\in\Omega) \qquad \textbf{(3.7)}$$

3.3.5. Teorem: Ω bir yerel kompakt Hausdorff uzayı ve *E* bir Banach uzayı olsun. O halde,

$$C_0(\Omega)\,\mathrm{x}\,E \to C_0(\Omega, E), \quad (f,x)\mapsto fx \qquad \textbf{(3.8)}$$

bilineer tasviri bir izometrik izomorfizm üretir.

$$C_0(\Omega)\overset{\vee}{\otimes}E \cong C_0(\Omega, E) \qquad \textbf{(3.9)}$$

3.3.6. Örnek: Ω_1 ve Ω_2 yerel kompakt Hausdorff uzayları olsun. Bu durumda, bir kanonik izometrik cebir izomorfizmi vardır.

$$C_0(\Omega_1)\overset{\vee}{\otimes}C_0(\Omega_2) \cong C_0(\Omega_1 \times \Omega_2) \qquad \textbf{(3.10)}$$

3.3.7. Tanım: E bir Banach uzayı, $x_1,\ldots,x_n \in E$ ve $\phi_1,\ldots,\phi_n \in E'$ olsun.Bu durumda,

$$T := \sum_{j=1}^{n} x_j \odot \phi_j \in \mathcal{F}(E) \qquad \textbf{(3.11)}$$

şu şekilde tanımlanır:

$$T\,x = \sum_{j=1}^{n} < x, \phi_j > x_j \qquad (x \in E) \qquad \textbf{(3.12)}$$

3.3.8. Önerme: E bir Banach uzayı olsun. Bu durumda,

$$E \otimes E' \to L(E), \; x \otimes \phi \mapsto x \odot \phi \qquad \textbf{(3.13)}$$

lineer tasviri, $E \otimes E'$ üzerindeki injektif norma göre bir izometridir ve $E \overset{\vee}{\otimes} E'$ ve $\mathcal{A}(E)$'nin bir izometrik izomorfizmine genişler.

3.4. Projektif Tensör Çarpımı

3.4.1. Tanım: $E_1,\ldots,E_n$ Banach uzayları olsun. $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ üzerinde $\|\cdot\|_\pi$ *projektif normu*, $\mathrm{x} \in E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ için

$$\|\mathrm{x}\|_\pi := inf\left\{ \sum_{k=1}^{m} \left\|x_1^{(k)}\right\| \ldots \left\|x_n^{(k)}\right\| : \, \mathrm{x} = \sum_{k=1}^{m} x_1^{(k)} \otimes \ldots \otimes x_n^{(k)} \right\} \qquad \textbf{(3.14)}$$

şeklinde tanımlanır.

3.4.2. Önerme: $E_1,\ldots,E_n$ Banach uzayları ve $\|\cdot\|$ normu $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ üzerinde herhangi bir çapraz norm olsun. Bu durumda $\|\cdot\|_\pi$ projektif normu $\mathrm{x} \in E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ için,

$$\|\mathrm{x}\| \le \|\mathrm{x}\|_\pi \qquad (\mathrm{x} \in E_1 \otimes \ldots \otimes E_n) \qquad \textbf{(3.15)}$$

şartını sağlayan bir çapraz normdur.

3.4.3. Tanım: $E_1,\ldots,E_n$ Banach uzayları olsun. $E_1\otimes\ldots\otimes E_n$ nin $\|\cdot\|_\pi$ normuna göre tamlaştırılmasına *projektif tensör çarpımı denir ve* $E_1\hat{\otimes}\ldots\hat{\otimes}E_n$ ile gösterilir.

3.4.4. Örnek: *A* bir Banach cebri, *E* bir sol Banach *A*-modül ve *F* bir sağ Banach *A*-modül olsun. O halde, $E\otimes F$ üzerinde *A*'nın bimodül aksiyonu, bir Banach *A*-bimodülde $E\hat{\otimes}F$ ye dönüşür.

3.4.5. Önerme: $E_1,\ldots,E_n$ Banach uzayları ve $x\in E_1\hat{\otimes}\ldots\hat{\otimes}E_n$ olsun.Bu durumda,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x_1^{(k)}\right\|\ldots\left\|x_n^{(k)}\right\|<\infty \qquad \textbf{(3.16)}$$

ve

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}x_1^{(k)}\otimes\ldots\otimes x_n^{(k)} \qquad \textbf{(3.17)}$$

olacak şekilde $j=1,\ldots,n$ için E_j 'de $\left(x_j^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ dizileri vardır.

(3.18) sağlanacak şekilde (3.17) daki bütün sonsuz serilerin infumumu $\|\cdot\|_\pi$ dir.

3.4.6. Teorem: (Ω,S,μ) bir ölçü uzayı ve *E* bir Banach uzayı olsun. O halde,

$$L^1(\Omega,S,\mu)\times E\to L^1(\Omega,S,\mu;E), \quad (f,x)\mapsto f(x) \qquad \textbf{(3.18)}$$

bilineer tasviri $L^1(\Omega,S,\mu)\hat{\otimes}E$ ve $L^1(\Omega,S,\mu;E)$ nin bir izometrik izomorfizmini üretir.

3.4.7. Örnek: *E* bir Banach uzayı ve *F* bir sonlu boyutlu Banach uzayı olsun. O halde, $E\otimes F$ injektif ve projektif normda tamdır ve $E\check{\otimes}F\cong E\hat{\otimes}F$ dir.

4. HOCHSCHILD KOHOMOLOJİ

Cebirsel kohomoloji grupları $H^n(A,E)$'i 1945-1946 yıllarında ilk olarak Hochschild tanımlamıştır. Banach cebirlerinde amenable tanımını vermek için 1972 yılında Johnson, Hochschild kohomolojisinden faydalanmıştır. Bu bölümde Hochschild kohomolojinin temel kavramları verilmiştir.

A bir cebir ve *E* bir *A*-bimodül olsun. $A\times.......\times A$ (n tane) dan *E*'ye bütün *n*-lineer tasvirlerin lineer uzayı $L^n(A,E)$ ile gösterilir. $\left(L^0(A,E)=E\right)$

4.1. Tanım: *A* bir cebir ve *E* bir *A*-bimodül olsun. $\forall\, x\in E$ için,

$$\delta^0(x):a\mapsto a\cdot x-x\cdot a \quad , \quad A\to E \tag{4.1}$$

tanımlansın. $n\in\mathbb{N}$ ve $T\in L^n(A,E)$ için $\delta^n T\in L^{n+1}(A,E)$ şu şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned}\delta^n T\left(a_1,.......,a_{n+1}\right)=&\,a_1\cdot T\left(a_2,.....,a_{n+1}\right)+(-1)^{n+1}T\left(a_1,...,a_n\right)\cdot a_{n+1}\\&+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\,T\left(a_1,...,a_{j-1},a_j\,.a_{j+1},a_{j+2}....,a_{n+1}\right)\end{aligned} \tag{4.2}$$

$n\in\mathbb{Z}^+$ olsun. δ^n , $L^n(A,E)$'den $L^{n+1}(A,E)$'ye bir lineer tasvirdir. Bu tasvirlere *bağlantı tasvirleri (connecting maps)* denir. İşlemler uzun olmasına karşın doğrudan hesaplama ile

$\delta^{n+1}\circ\delta^n=0$ ve $im\ \delta^n\subset\ker\delta^{n+1}$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}&L^{\bullet}(A,E):0\to E\xrightarrow{\delta^0}L(A,E)\xrightarrow{\delta^1}L^2(A,E)\to\cdots\to\\&\qquad L^n(A,E)\xrightarrow{\delta^n}L^{n+1}(A,E)\xrightarrow{\delta^{n+1}}L^{n+2}(A,E)\to\cdots\end{aligned} \tag{4.3}$$

lineer uzaylar ve lineer tasvirlerin bir kompleksidir.

$n\in\mathbb{N}$ için $\ker\delta^n$ ve $im\,\delta^{n-1}$'in elemanları sırasıyla n-koçember ve n-kosınırdır.

$$Z^n(A,E)=\ker\delta^n \quad \text{ve} \quad N^n(A,E)=im\,\delta^{n-1} \tag{4.4}$$

olarak alalım.

4.2. Tanım: *A* bir cebir ve *E* bir *A*-bimodül olsun. $n\in\mathbb{N}$ için *E*'deki katsayılarla *A'nın n-inci kohomoloji grubu*,

$$H^n\left(A,E\right)=Z^n\left(A,E\right)/N^n\left(A,E\right) \tag{4.5}$$

$$H^0\left(A,E\right)=\ker\delta^0=\left\{x\in E:\ a\cdot x=x\cdot a\ \left(a\in A\right)\right\} \tag{4.6}$$

dır.Aslında, $H^n\left(A,E\right)$ kohomoloji grupları lineer uzaylardır.

$T\in\mathcal{L}\left(A,E\right)$ için, $T\in im\,\delta^0$ olması için gerek ve yeter şart

$$T\left(a\right)=a\cdot x-x\cdot a\quad\left(a,b\in A\right) \tag{4.7}$$

koşulunu sağlayan bir $x\in E$ olmasıdır. Aynı zamanda,

$$\left(\delta^1 T\right)\left(a,b\right)=a\cdot Tb-T\left(ab\right)+Ta\cdot b\quad\left(a,b\in A\right) \tag{4.8}$$

dır. $N^1\left(A,E\right)$ *ve* $Z^1\left(A,E\right)$ 2.4.1 deki tanımlama ile aynıdır. $H^1\left(A,E\right)$, iç türevlerin uzayı olarak, tüm türevlerin uzayının bir bölümüdür. $H^1\left(A,E\right)=\left\{0\right\}$ olması için gerek ve yeter şart A'dan E'ye her türevin, iç türev (inner derivation) olmasıdır. *A* bir Banach cebri ve *E* bir Banach *A*-bimodül olsun. $B^n\left(A,E\right)$, $L^n\left(A,E\right)$'deki sınırlı tasvirlerin Banach uzayını göstersin. Kompleks $B^\bullet\left(A,E\right)$ 4.3 denkleminde L yerine B yazılarak tanımlanır:

$$B^\bullet\left(A,E\right):0\longrightarrow E\xrightarrow{\delta^0}B\left(A,E\right)\xrightarrow{\delta^1}B^2\left(A,E\right)\longrightarrow\cdots\longrightarrow$$

$$B^n\left(A,E\right)\xrightarrow{\delta^n}B^{n+1}\left(A,E\right)\xrightarrow{\delta^{n+1}}B^{n+2}\left(A,E\right)\longrightarrow\cdots \tag{4.9}$$

$\ker\delta^n$ ve $im\,\delta^{n-1}$'in elemanları sırasıyla, sürekli n-koçember ve sürekli n-kosınır'dır ve $\mathcal{Z}^n\left(A,E\right)$ ve $\mathcal{N}^n\left(A,E\right)$ uzaylarıdır.

E'deki katsayılarla *A'nın n-inci sürekli kohomoloji grubu* şu şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{H}^n\left(A,E\right)=\mathcal{Z}^n\left(A,E\right)/\mathcal{N}^n\left(A,E\right) \tag{4.10}$$

Bu bir yarı normlu uzaydır.

$\left(\text{Genellikle, } \mathcal{N}^n(A,E), \mathcal{Z}^n(A,E)\text{'de kapalı değildir.}\right)$ $\mathcal{H}^1(A,E)$ iç türevlerin uzayı olarak , A’dan E’ye sürekli türevlerin uzayının bölümüdür.

Her $T \in \mathcal{Z}^2(A,E)$ için 2-koçember birim (2-cocycle identity) elde edilir.

$$a \cdot T(b,c) - T(ab,c) + T(a,bc) - T(a,b) \cdot c = 0 \qquad (a,b,c \in A) \tag{4.11}$$

Bundan dolayı $H^2(A,E)=\{0\}$ olması için gerek ve yeter şart bazı $S \in L(A,E)$ için her böyle *T’ nin* , $\delta^1 S$ formunda olmasıdır.

5. TOPOLOJİK GRUPLAR

Bu bölümde topolojik grup tanımı ve gerekli teoremler verilmiştir.

5.1. Tanım: Üzerinde bir topoloji ve grup yapısı oluşturan *G* kümesine, grup işlemlerinin sürekliliği ile ilgili aşağıdaki iki şartı sağlarsa, bir *topolojik grup* denir.

i) *G*x*G*'den *G*'ye giden $\left(x,y\right)\rightarrow xy$ tasviri süreklidir.

ii) *G*'den *G*'ye giden $x\rightarrow x^{-1}$ tasviri süreklidir.

Birinci koşul için şunları söyleyebiliriz: *G*'nin keyfi *x*, *y* elemanları ve *xy*'nin keyfi *U* komşuluğu için *x*'in ve *y*'nin sırasıyla öyle *V, W* komşulukları vardır ki $VW\subset U$ şartı sağlanır. Özel olarak *e*'nin bir *U* komşuluğu için *e*'nin öyle bir *V* komşuluğu vardır ki $V^2\subset U$ dir . Yine birinci şarttan, keyfi $y\in G$ için *G*'den *G*'ye giden $x\rightarrow xy$ ve $x\rightarrow yx$ tasvirlerinin sürekli olduğunu söyleyebiliriz. Bu ifade, *U*, *G*'nin bir açık alt kümesi ise *Uy* ve *yU* kümelerinin keyfi $y\in G$ için açık olmasına denktir. Diğer bir deyişle bir topolojik grubun topolojisi sağ ve sol dönüşüm (translation) altında değişmezdir (invariant).

İkinci koşul için ise şunları söyleyebiliriz: *V*, *G*'nin herhangi bir alt kümesi olsun. V^{-1} ile $V^{-1}=\left\{x^{-1}:x\in G\right\}$ kümesini göstereceğiz. *G*'nin herhangi bir V^{-1} kümesi açık ise *V*'de açık kümedir. Tersi de doğrudur: *V* açık ise V^{-1} kümeside açıktır.

G topolojik grubu üzerindeki topoloji Hausdorff, diskırit, kompakt veya yerel kompakt ise *G*'ye Hausdorff, diskırit, kompakt veya yerel kompakt topolojik grup denir. Bir topolojik grupta topolojinin dönüşümü değişmez olduğundan *e*'nin bir kompakt komşuluğu varsa *G,* bir yerel kompakt topolojik gruptur.

Bir *G* topolojik grup T_0-uzayı ise Hausdorfftur. Bunu gösterelim. $x,y\in G$ ise öyle bir *U* açık kümesi vardır ki $x\in U$, $y\notin U$ dır. Bu durumda *e*'nin öyle *V, W* komşulukları vardır ki $U=xV$ ve $W^2\subset V$ dir. Bu ise *xW* ve yW^{-1}'nin arakesitlerinin boş küme olmasını gerektirir.

5.2. Tanım: G_1 topolojik gurubundan G_2 topolojik grubuna giden bire-bir, üzerine bir tasvir, cebirsel izomorfizm ve homeomorfizm ise G_1 ve G_2'ye *izomorfiktir* denir.

5.3. Tanım: G_1 grubunun G_2 grubu içinde bir *temsili (representation)* G_1'den G_2'ye giden $\forall x, y \in G$ için

$$f(xy)=f(x)f(y) \tag{5.1}$$

şartını sağlayan *f* tasviridir. Eğer G_1 ve G_2 topolojik gruplar ve *f* temsili sürekli ise *f* tasvirine *morfizm* denir.

G topolojik grubunun bir *H* alt grubu alt uzay topoloji ile bir topolojik gruptur.

5.4. Tanım: *G* bir topolojik Hausdorff grup ve *H*, *G*'nin herhangi bir alt grubu olsun. *H*'ın sol kalanları yeni bir topolojik uzay oluşturur. Bu uzaya *bölüm uzayı* denir ve *G/H* ile gösterilir. Bölüm uzayındaki sürekli topoloji aşağıdaki gibidir;

G'den *G/H* üzerine gelen π_H kanonik (doğal) tasviri

$$\pi_H : G \to G/H \ , \ \pi_H(x)=xH \tag{5.2}$$

sürekli yapan bölüm topolojisidir. (π_H yalnız sürekli değil aynı zamanda açık tasvirdir.) π_H'nın sürekli ve açık tasvir olmasından dolayı *G* yerel kompakt ise *G/H'*da yerel kompakttır. *H* normal alt grup ise *G/H* bir topolojik gruptur.

5.5. Teorem: *G* bir topolojik grup olsun.

a) K, G'nin bir kompakt alt kümesi ve *U*, *K*'yı içeren *G*'de bir açık küme olsun. Bu durumda *e*'nin öyle bir *V* komşuluğu vardır ki $KV \subset U$ dur.

b) *G* yerel kompakt ve *H*, *G*'nin bir kapalı alt grubu ise *G/H*'ın herhangi bir *L* kompakt kümesi için $\pi_H(K)=L$ şartını sağlayan $K \subset G$ kompakt kümesi vardır.

c) GxG'den G'ye giden $(x,y)\to xy$ tasviri açıktır. Benzer şekilde

$$(x,y)\to y^{-1}x \ , \ (x,y)\to x \ , \ (x,y)\to y, \cdots \tag{5.3}$$

açıktır.

d) Sayılabilir bir yerel kompakt grup veya bölüm uzayı diskırittir.

6. YEREL KOMPAKT UZAYLAR ÜZERİNDE İNTEGRASYON

Yerel kompakt gruplar üzerinde amenable tanımı Haar ölçüsü ile verilir. Bu bölümde yerel kompakt uzaylar üzerinde ölçü, ölçülebilir fonksiyonlar ve integrasyon tanımı verilmiş ve temel teoremler ele alınmıştır. Daha sonra Haar ölçüsü verilerek $L^1(G)$ uzayları incelenmiştir.

6.1. Ölçü

X bir yerel kompakt uzay olsun. X üzerinde reel (kompleks) değerli, kompakt destekli (destek(support): $f(x)\neq 0$ olan bütün x'lerin oluşturduğu kümenin kapanışına denir) bütün sürekli fonksiyonların uzayı $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$ $\left(\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)\right)$ ile gösterilir. X kompakt değilse $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$ $\left(\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)\right)$'in tamlaştırılması $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}(X)$ $\left(\mathcal{C}^0_{\mathbb{C}}(X)\right)$ Banach uzayı ile gösterilir. $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}(X)$ de norm

$$\|f\|_\infty = \underset{x\in X}{maks}\left|f(x)\right| \tag{6.1}$$

ile verilir. $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}(X)$, $\left(\mathcal{C}^0_{\mathbb{C}}(X)\right)$, X üzerinde sonsuzda sıfır olan reel (kompleks) sürekli fonksiyonların yukarıdaki norma göre Banach uzayıdır.

6.1.1. Tanım: X üzerinde bir reel (kompleks*) ölçü* μ, $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$ $\left(\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)\right)$ üzerinde aşağıdaki özelliği sağlayan bir reel (kompleks) lineer fonksiyonel olarak tanımlanır.

Her $K\subset X$ kompakt kümesi ve K'da destekli olan keyfi $f\in\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$ $\left(f\in\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)\right)$ fonksiyonu için

$$\left|\mu(f)\right|\leq M_K\|f\|_\infty \tag{6.2}$$

şartını sağlayacak bir M_K sabiti vardır.

$\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$'ın bütün pozitif fonksiyonlarının kümesi $\mathcal{K}_{+}(X)$ üzerindeki keyfi $f\in\mathcal{K}_{+}(x)$ için $\mu(f)\geq 0$ şartını sağlayan reel μ ölçüsüne *pozitif* denir. $\mu(f)$ sayısına, f'in μ'ye göre *integrali* denir ve

$$\int_X f(x)\,d\mu(x)\ ,\ \int f(x)\,d\mu(x) \text{ veya } \int f\,d\mu \qquad \textbf{(6.3)}$$

notasyonları ile gösterilir.

6.1.2. Teorem: μ pozitif ölçü ise

$$|\mu(f)|\leq\mu(|f|) \qquad \textbf{(6.4)}$$

dir.

6.1.3. Teorem: $\mathcal{K}(X)$ üzerinde bir pozitif lineer fonksiyonel bir pozitif ölçüdür.

6.1.4. Tanım: Keyfi $f\in\mathcal{K}(X)$ için

$$|\mu(f)|\leq M\|f\|_{\infty} \qquad \textbf{(6.5)}$$

şartını sağlayan bir M sayısı varsa μ ölçüsüne *sınırlı ölçü* denir. M sayısının en küçüğüne μ'nün normu denir ve $\|\mu\|$ ile gösterilir.

$$\|\mu\|=\sup\left\{\,|\mu(f)|: f\in K(X), \|f\|_{\infty}\leq 1\right\} \qquad \textbf{(6.6)}$$

Kompakt olmayan X için, sınırlı ölçü süreklilik tarafından $C^0(X)$'e genişletilebilir. Yukarıdaki norma göre bunlar bir Banach uzayı oluşturur. Bu uzay $M^1(X)$ ile gösterilir. Bu uzay $C^0(X)$'in dual uzayıdır.

6.1.5. Tanım: μ ölçüsünün *desteği (support),* suppμ, $X\setminus E$' de destekli keyfi $f\in K(X)$ için $\mu(f)=0$ şartını sağlayan en küçük kapalı $E\subset X$ kümesidir. Verilen bir μ ölçüsü için bir $|\mu|$ pozitif ölçüsü aşağıdaki gibi tanımlanır. $f\in\mathcal{K}_{+}(X)$ için,

$$|\mu|(f)=\sup\left\{|\mu(g)|:\ g\in K(X)\,,|g|\leq f\ \right\} \qquad \textbf{(6.7)}$$

Her reel ölçü, iki reel pozitif ölçünün farkı olarak yazılabilir.

$$\mu_+ = \frac{|\mu| + \mu}{2} \quad , \quad \mu_- = \frac{|\mu| - \mu}{2} \quad , \quad \mu = \mu_+ - \mu_- \tag{6.8}$$

$$\mu = |\mu| \Leftrightarrow \mu \text{ pozitif} \quad \left(|\mu(f)| \leq |\mu|(f) \quad f \in K \right) \tag{6.9}$$

6.2. Pozitif Ölçülerin Alttan Yarı Sürekli Fonksiyonlara Genişlemeleri

Bu bölümde X yerel kompakt uzay ve X üzerinde, değerleri $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$'da olan fonksiyonlar düşünülecektir. $\mathbb{R}_+$'dan $\overline{\mathbb{R}}_+$ ye toplam ve çarpımın genişlemeleri $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+$ için $\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty$, $0 < \alpha \leq \infty$ için $\infty \cdot \alpha = \alpha \cdot \infty = \infty$ ve $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$ olarak tanımlanır. X üzerindeki tanımlı, değerleri $\overline{\mathbb{R}}_+$'da olan bütün fonksiyonların kümesi $\mathcal{H}_+(X)$ veya kısaca $\mathcal{H}_+$ ile gösterilir.

Bir pozitif ölçünün $\mathcal{K}_+$'dan $\mathcal{H}_+$'ya genişlemesini inceleyelim.

X üzerindeki tanımlı değerleri $\mathbb{R}$ veya $\overline{\mathbb{R}}_+$ da olan bir fonksiyonlar ailesi S olsun.

Bir $x \in X$ için, $\{ f(x) : f \in S \}$ kümesini $S(x)$ ile gösterelim.

$\sup S$ fonksiyonu X üzerinde aşağıdaki gibi noktasal tanımlanır:

$$(\sup S)(x) = \sup(S(x)) \tag{6.10}$$

6.2.1. Tanım: Keyfi $a \in \mathbb{R}_+$ için $\{ x : F(x) > a \}$ kümesi açık ise $F \in \mathcal{H}_+$ fonksiyonuna *alttan yarı-sürekli* denir. (Değerleri $\mathbb{R}$'de olan fonksiyonlar içinde benzer tanım verilir.) Üstten yarı-süreklilik " > " yerine " < " alınarak tanımlanır.

X üzerinde, değerleri $\overline{\mathbb{R}}_+$'da olan bütün alttan yarı-sürekli fonksiyonların sınıfını $\mathcal{I}_+(X)$ veya kısaca $\mathcal{I}_+$ ile gösterelim.

$$\mathcal{K}_+ \subset \mathcal{I}_+ \subset \mathcal{H}_+ \tag{6.11}$$

6.2.2. Tanım: Değerleri $\overline{\mathbb{R}}_+$'de veya $\mathbb{R}$'de olan $\mathcal{F}$ fonksiyonların ailesine keyfi $f, g \in \mathcal{F}$ çifti için $f \leq h$ ve $g \leq h$ şartını sağlayacak bir $h \leq \mathcal{F}$ fonksiyonu varsa, "$\leq$"'ya göre *filitre* (*filtering)* veya basitçe filitre denir. Benzer olarak keyfi $f, g \in \mathcal{G}$

çifti için $h \leq f$ veya $h \leq g$ olacak şekilde bir $h \in \mathcal{G}$ varsa $\mathcal{G}$ ailesine "$\geq$" göre *filitre* denir.

6.2.3. Tanım: Herhangi bir $f \in \mathcal{H}_+$ için "$\leq$"'ya göre $\mathcal{K}_+$'da $\mathcal{F}_f$ ailesini ve "$\geq$"'ya göre $\mathcal{I}_+$'da $\mathcal{G}_f$ ailesini aşağıdaki gibi tanımlarız:

$$\mathcal{F}_f = \{ k : k \in \mathcal{K}_+ , k \leq f \} \tag{6.12}$$

$$\mathcal{G}_f = \{ F : F \in \mathcal{I}_+ , f \leq F \} \tag{6.13}$$

$\mathcal{F}_f$ ve $\mathcal{G}_f$ gerçekten filitredir. $k_1, k_2 \in \mathcal{F}_f$ ile $\sup(k_1, k_2) \in \mathcal{F}_f$ ve $F, G \in \mathcal{G}_f$ ise $\inf(F, G) \in \mathcal{G}_f$ dir.

6.2.4. Teorem: $\mathcal{I}_+$ uzayı aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $\mathcal{I}_+$, $\overline{\mathbb{R}}_+$'nın elemanları ile çarpım altında ve toplama altında kapalıdır.

ii) $\mathcal{I}_+$, supremum alma altında kapalıdır.

iii) $f \in \mathcal{H}_+$ ise $f \in \mathcal{I}_+ \Leftrightarrow f = \sup \mathcal{F}_f$ dır.

6.2.5. Tanım: (Birinci Genişleme) μ , X üzerinde tanımlı bir pozitif ölçü olsun. $\mathcal{I}_+$ üzerinde $\mu^\times$ fonksiyoneli

$$\mu^\times(F) = \sup \mu(\mathcal{F}_f) \quad , \quad F \in \mathcal{I}_+ \tag{6.14}$$

tarafından tanımlanır.

$\mu^\times$, $\mathcal{K}_+$ üzerinde μ ile çakışır. Bu yüzden $\mu^\times$, $\mathcal{K}_+$'dan $\mathcal{I}_+$'ya μ'nin bir genişlemesidir. $\forall F \in \mathcal{I}_+$ için $0 \leq \mu^\times(F) \leq \infty$ dır.

6.2.6. Teorem: $\mathcal{I}_+$ üzerinde tanımlı $\mu^\times$ için aşağıdaki özellikler sağlar

i) $\mu^\times(aF) = a\,\mu^\times(F) \quad (a \in \overline{\mathbb{R}}_+ , F \in \mathcal{I}_+)$

ii) $F_1 \leq F_2 \Rightarrow \mu^\times(F_1) \leq \mu^\times(F_2) \qquad F_1, F_2 \in \mathcal{I}_+$ **(6.15)**

6.2.7. Teorem: $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ $\mathcal{K}_+$'da filitre aileleri olsun. X üzerindeki herhangi bir pozitif μ ölçüsü için aşağıdakiler sağlanır.

i) $\sup \mathcal{F} \in \mathcal{K}_+$ ise $\mu(\sup \mathcal{F}) = \sup \mu(\mathcal{F})$

ii) $\sup \mathcal{F}_1 = \sup \mathcal{F}_2$ ise $\sup \mu(\mathcal{F}_1) = \sup \mu(\mathcal{F}_2)$

iii) $\mu^{\times}(\sup \mathcal{F}) = \sup \mu(\mathcal{F})$ **(6.16)**

6.2.8. Teorem: $\mathcal{I}_+$ üzerinde $\mu^{\times}$ fonksiyoneli toplamsaldır. Yani

$$\mu^{\times}(F_1 + F_2) = \mu^{\times}(F_1) + \mu^{\times}(F_2), \qquad F_1, F_2 \in \mathcal{I}_+ \quad \textbf{(6.17)}$$

6.2.9. Tanım: (İkinci Genişleme) μ, X üzerinde bir pozitif ölçü olsun. $\mu^{\times}$, $\mathcal{I}_+$ üzerinde birinci genişlemede tanımlandığı gibi tanımlansın. $\mathcal{H}_+$ üzerinde $\mu^{\times}$ fonksiyoneli

$$\mu^{\times}(f) = \inf \mu^{\times}(\mathcal{G}_f) \quad f \in \mathcal{H}_+ \quad \textbf{(6.18)}$$

tarafından tanımlanır. $\mu^{X}(f)$ yerine genellikle

$$\int_X^{\times} f(x)\, d\mu(x) \text{ veya } \int^{\times} f\, d\mu \quad \textbf{(6.19)}$$

yazılır ve f'ın μ 'ye göre *üst integrali* denir.

$\forall f \in \mathcal{H}_+$ için $0 \le \mu^{\times}(f) \le \infty$ dir. $f \in \mathcal{I}_+$ için $\mu^{\times}$ birinci tanımdaki gibidir. Bu yüzden $\mathcal{I}_+$'dan $\mathcal{H}_+$'ya $\mu^{\times}$ fonksiyonelinin bir genişlemesidir.

6.2.10. Teorem: $\mathcal{H}_+$ üzerinde tanımlı $\mu^{\times}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $\mu^{\times}(af) = a\,\mu^{\times}(f) \qquad a \in \overline{\mathbb{R}}_+,\ f \in \mathcal{H}_+$

ii) $f_1 \le f_2 \Rightarrow \mu^{\times}(f_1) \le \mu^{\times}(f_2) \quad , \quad f_1, f_2 \in \mathcal{H}_+$ **(6.20)**

$f \le |f - g| + g$ olduğundan $f, g \in \mathcal{H}_+$ için

$$\left| \mu^{\times}(f) - \mu^{\times}(g) \right| \le \mu^{\times}(|f - g|) \quad \textbf{(6.21)}$$

dir.

6.2.11. Teorem: $\mathcal{F}$, $\mathcal{I}_+$'da filitre ailesi olsun. Bu durumda $\sup\mathcal{F}\in\mathcal{I}_+$ ve X üzerinde tanımlı herhangi pozitif μ ölçüsü için

$$\mu^{\times}(\sup\mathcal{F})=\sup\mu^{\times}(\mathcal{F}) \qquad \textbf{(6.22)}$$

integral notasyonu ile,

$$\int^{\times}\sup_{F\in\mathcal{F}} Fd\mu=\sup_{F\in\mathcal{F}}\int^{\times} Fd\mu \qquad \textbf{(6.23)}$$

dır.

6.2.12. Tanım: μ, X üzerinde tanımlı bir pozitif ölçü olsun. Keyfi $A\subset X$ kümesi için A'nın *dış ölçüsü*, $\mu^{\times}(A)$, φ_A, A'nın karakteristik fonksiyonu olmak üzere $\mu^{\times}(\varphi_A)$ olarak tanımlanır. Burada $\mu^{\times}$, ikinci genişlemedeki tanımdır.

Her $A\subset X$ için $0\leq\mu^{\times}(A)\leq\infty$

6.2.13. Teorem: $\mu^{\times}$ dış ölçüsü,

i) $A\subset B\Rightarrow\mu^{\times}(A)\leq\mu^{\times}(B) \qquad A,B\subset X$

ii) $\mu^{\times}\left(\bigcup_{n\geq1} A_n\right)\leq\sum_{n\geq1}\mu^{\times}(A_n) \qquad A_n\subset X\ ,\ n\geq1$ **(6.24)**

şartlarını sağlar.

6.2.14. Tanım: $\mu^{X}(A)=0$ ise $A\subset X$ alt kümesine μ'ye göre *önemsiz küme* (negligable) denir. Hemen hemen her yerde (*h.h.h*) terimi bir önemsiz küme dışında X'in her noktası için anlamında kullanılacaktır.

6.2.15. Teorem: μ bir pozitif ölçü ve $f,g\in\mathcal{H}_+$ olsun.

i) $\int^{\times} f\,d\mu=0\Leftrightarrow \textbf{\textit{h.h.h}}\ f(x)=0$

ii) $\int^{\times} f\,d\mu<\infty\Rightarrow \quad h.h.h.\ f(x)<\infty$

iii) $h.h.h.\ f(x)\leq g(x)\Rightarrow\int^{\times} f\,d\mu\leq\int^{\times} g\,d\mu$

iv) *h.h.h.* $f(x)=g(x)\Rightarrow \int^{\times} f\,d\mu=\int^{\times} g\,d\mu$ **(6.25)**

dır.

6.3. İntegre Edilebilir Fonksiyonlar

B reel veya kompleks Banach uzayı olsun. $\mathcal{K}_B(X)$ veya kısaca $\mathcal{K}_B$ ile kompakt destekli, değerleri *B*'de olan *X* üzerindeki bütün sürekli fonksiyonların kümesini göstersin.

6.3.1. Tanım: $\mathcal{F}_B^1(X,\mu)$ veya kısaca $\mathcal{F}_B^1$ uzayı, aşağıdaki şartı sağlayan bütün $f:X\to B$ fonksiyonlarının lineer uzayı olarak tanımlanır. $\mathcal{H}_+(X)$'de f'in ilgili $\|f\|:X\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu

$$\mu^{\times}(\|f\|)<\infty \qquad \textbf{(6.26)}$$

şartını sağlasın veya integral notasyonu ile

$$\int^{\times}\|f(x)\|\,d\mu(x)<\infty \qquad \textbf{(6.27)}$$

şartı sağlansın. $\mu^{\times}(\|f\|)$ üst integrali $N_1(f)$ ile gösterilecektir.

6.3.2. Teorem: $\mathcal{F}_B^1$ uzayı için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) N_1, $\mathcal{F}_B^1$ üzerinde bir yarı-normdur.

ii) $N_1(f)=0\Leftrightarrow$ *h.h.h* $f(x)=0$

iii) $\mathcal{F}_B^1$, N_1 yarı-normuna göre tamdır. **(6.28)**

6.3.3. Tanım: $\mathrm{L}_B^1(X,\mu)$ veya kısa L_B^1 , $\mathcal{F}_B^1$'de $\mathcal{K}_B$'nin kapanışı olarak tanımlanır.

6.3.4. Tanım: i) L_B^1 , N_1 yarınormuna göre tamdır.

ii) $f\in\mathcal{F}_B^1$ ise $\|f\|\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^1$ ve $N_1(f)=N_1(\|f\|)$ dir.

iii) $k\in\mathcal{K}_B$ ise $\|K\|\in\mathcal{K}_+$ ve supp$\|k\|=$supp *k* dır.

iv) $f \in \mathsf{L}_B^1$ ise $\|H\| \in \mathsf{L}_{\mathbb{R}}^1$ dir. Özel olarak $f \in \mathsf{L}_{\mathbb{R}}^1$ ise $|f| \in \mathsf{L}_{\mathbb{R}}^1$ dır.

v) $f, g \in \mathsf{L}_{\mathbb{R}}^1$ ise $\sup(f, g) \in \mathsf{L}_{\mathbb{R}}^1$ **(6.29)**

6.3.5. Tanım: $n_B(X, \mu)$ veya kısaca n_B notasyonu ile $N_1(f) = 0$ olan bütün $f \in \mathsf{L}_B^1$ fonksiyonlarının kapalı lineer alt uzayını gösterelim. L_B^1 / n_B bölüm uzayı bir Banach uzayıdır ve $L_B^1(X, \mu)$ veya kısaca L_B^1 ile gösterilir. f'in normu $\|\cdot\|_1$ ile gösterilir.

Benzer olarak $1 < p < \infty$ için $\mathsf{L}_B^p(X, \mu)$ veya kısaca L_B^p uzayları

$$N_p(f) = \left(\int^{\times} \| f(x) \|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \quad \textbf{(6.30)}$$

tarafından tanımlanan N_p yarı-normu ile tanımlanır. $\|\cdot\|_p$ normu ile de $L_B^p(x, \mu)$ veya kısaca L_B^p Banach uzayları tanımlanır.

$K_{\mathbb{R}}$ veya $K_{\mathbb{C}}$ üzerinde tanımlanan μ integrali *B* Banach uzayları için K_B'de henüz tanımlanmadı. Önce *B*'yi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ alalım. $K_{\mathbb{R}}$, $\mathsf{L}_{\mathbb{R}}^1$, $L_{\mathbb{R}}^1$ veya $K_{\mathbb{C}}$, $\mathsf{L}_{\mathbb{C}}^1$, $L_{\mathbb{C}}^1$ yerine K, L^1, L^1 alalım. Verilen integral K'dan L^1'e süreklilik yardımıyla genişletilebilir.

$$\mu(f) = \lim_{\substack{k \to f \\ k \in K}} \mu(k) \qquad f \in \mathsf{L}^1 \quad \textbf{(6.31)}$$

6.3.6. Tanım: $\tilde{\mathsf{L}}_{\mathbb{R}}^1(X, \mu)$ veya ksıaca $\tilde{\mathsf{L}}_{\mathbb{R}}^1$ *h.h.h.* $f(x) = g(x)$ olacak şekilde bir $g \in \mathsf{L}_{\mathbb{R}}^1$ fonksiyonun var olduğu, μ'ye göre hemen hemen her yerde tanımlı, değerleri $\overline{\mathbb{R}}$'de olan bütün *f* fonksiyonlarının kümesi gösterilir. $\tilde{L}_{\mathbb{R}}$'nin elemanlarına *integrallenebilir fonksiyonlar* denir. $f \in \tilde{\mathsf{L}}_{\mathbb{R}}^1$ için $\mu(f)$ integrali $\mu(f) = \mu(g)$ olarak tanımlanır. $\mu(f)$ integrali

$$\int f \, d\mu \quad \text{veya} \quad \int f(x) \, d\mu(x) \quad \textbf{(6.32)}$$

ile gösterilir.

6.3.7. Teorem: L_B^1'de $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ dizisi hemen hemen heryerde $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(x\right)$ var olan bir dizi olsun. Limit varsa $\lim\limits_{n\to p} f_n\left(x\right)=f\left(x\right)$ alalım. $n\geq 1$ için

$$\left\| f_n\left(x\right)\right\| \leq g\left(x\right) \qquad \textbf{(6.33)}$$

olacak şekilde $\mu^{\times}\left(g\right)<\infty$ olmak üzere bir $g\in\mathcal{H}_+$ fonksiyonu var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f\in\tilde{\mathsf{L}}_B^1$, $\tilde{\mathsf{L}}_B^1$'de

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ ve } \mu\left(f\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(f_n\right) \qquad \textbf{(6.34)}$$

dır. İntegral notasyonu,

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n\, d\mu \qquad \textbf{(6.35)}$$

dir.

6.3.8. Tanım: μ , X yerel kompakt uzayı üzerinde bir pozitif ölçü olsun. $\varphi_A\in\mathsf{L}^1\left(X,\mu\right)$ olacak şekilde bir $A\subset X$ kümesine μ'ye göre *integrallenebilir küme* denir.

$$\mu\left(A\right)=\int \varphi_A\, d\mu \qquad \textbf{(6.36)}$$

olarak tanımlanır ve A'nın ölçüsü $\mu\left(A\right)$'dır denir. (Burada φ_A karakteristik fonksiyondur.) $0\leq\mu\left(A\right)<\infty$ olduğu kolayca görülür. Bütün sonlu dış ölçüye sahip açık ve kapalı kümeler integrallenebilirdir. Özel olarak kompakt kümeler integrallenebilirdir.

6.3.9. Teorem: Bir $A\subset X$ kümesinin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall\varepsilon>0$ için $\mu\left(\Omega\right)-\mu\left(K\right)<\varepsilon$ olacak şekilde bir integrallenebilir $\Omega\supset A$ açık kümesi ve kompakt $K\subset A$ kümesinin olmasıdır. Yani, her integrallenebilir A kümesi için

$$\mu\left(A\right)=\inf_{A\subset\Omega}\mu\left(\Omega\right) \qquad \Omega \text{ açık ve integrallenebilir} \qquad \textbf{(6.37)}$$

$$\mu\left(A\right)=\sup_{K\subset A}\mu\left(K\right) \qquad K \text{ kompakt} \qquad \textbf{(6.38)}$$

ile ifade edilir.

6.4. Ölçülebilir Fonksiyonlar

6.4.1. Tanım: μ, X yerel kompakt uzayı üzerinde bir pozitif ölçü ve Φ, değerleri bir topolojik uzayda olan X üzerinde bir fonksiyon olsun. Verilen herhangi bir $K \subset X$ kompakt kümesi için K'nın bir önemsiz kümeye bir parçalanışı var ve Φ'nin her K_n'ye kısıtlanması sürekli olacak şekilde sayılabilir kompakt K_n küme ise varsa Φ'ye μ ölçüsüne göre *ölçülebilir fonksiyon* denir.

6.4.2. Tanım: Bir $A \subset X$ alt kümesinin karakteristik fonksiyonu ölçülebilir ise A'ya *ölçülebilir küme* denir.

Bütün açık ve kapalı kümeler ölçülebilir. A ve B ölçülebilir ise $A \cup B$, $A \cap B$, $X \setminus A$ ölçülebilirdir.

6.4.3. Tanım: Her $K \subset X$ kompakt kümesi için $A \cap K$ önemsiz küme ise X'in A alt kümesine *yerel önemsiz küme* denir. Yerel hemen hemen her yerde demek (*y.h.h.h.*) yerel önemsiz küme haricindeki X'in bütün noktaları demektir.

6.4.4. Tanım: *f*, değerleri $\overline{\mathbb{R}}_{+}$ da olan X üzerinde herhangi bir fonksiyon olsun. μ'ye göre yerel hemen hemen heryerde $f(x) \leq M$ olacak şekilde en küçük M $(0 \leq M \leq \infty)$ sayısına *yeterli supremum* denir ve

$$\underset{x \in X}{ess\sup} f(x) \tag{6.39}$$

ile gösterilir.

6.4.5. Tanım: Değerleri B Banach uzayında olan X üzerindeki φ fonksiyonu

$$\underset{x \in X}{ess\sup} \left\| \varphi(x) \right\| < \infty \tag{6.40}$$

şartını sağlıyorsa (μ'ye göre) *yeterli sınırlı* denir. Eğer φ yeterli sınırlı ise $\underset{x \in X}{ess\sup} \left\| \varphi(x) \right\|$, $N_{\infty}(\varphi)$ ile gösterilir.

X üzerinde ölçülebilir, yeterli *sınırlı değerleri* bir B Banach uzayında olan φ fonksiyonları bir tam uzay oluşturur. Bu uzay $\mathcal{L}_B^{\infty}(X,\mu)$ veya kısaca $\mathcal{L}_B^{\infty}$ ile gösterilir. Bu uzayda N_{∞} yarı-normdur. $\mathcal{L}_B^{\infty}$, $\mathcal{L}_B^{p}$, $1 \le p \le \infty$'de olduğu gibi heryerde tanımlı fonksiyonları içerir.

6.4.6. Tanım: B bir Banach uzayı olsun. $n_B^{\infty}(X,\mu)$ veya kısaca n_B^{∞}, $N_{\infty}(\varphi)=0$ olan bütün $\varphi \in \mathcal{L}_B^{\infty}$ fonksiyonların kapalı lineer alt uzayı olsun. Bu durumda $\mathcal{L}_B^{\infty} / n_B^{\infty}$ bir Banach uzayıdır ve $L_B^{\infty}(X,\mu)$ veya kısaca L_B^{∞} ile gösterilir. Norm, N_{∞}'dan elde edilir ve $\|\cdot\|_{\infty}$ ile gösterilir.

$\mathcal{L}_B^{\infty}$ ve L_B^{∞} uzaylarındaki iki fonksiyonun aynı elemanı temsil etmesi için gerek ve yeter şart yerel hemen hemen her yerde ikisinin çakışmasıdır. Genellikle sürekli fonksiyonlar $\mathcal{L}_B^{\infty}$'da yoğun bir alt uzay oluşturmaz.

$f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1$ hemen hemen her yerde aynı ve $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}^{\infty}$ yerel hemen hemen heryerde aynı ise $f_1\varphi_1, f_2\varphi_2 \in \mathcal{L}^1$ ve hemen hemen heryerde aynıdır.

6.4.7. Tanım: $f \in L^1(X,\mu)$ ve $\varphi \in L^{\infty}(X,\mu)$ ise

$$<f,\varphi> = \int f(x)\overline{\varphi(x)}\,d\mu(x) \qquad \textbf{(6.41)}$$

olarak tanımlanır.

6.4.8. Teorem: $L^1(X,\mu)$ Banach uzayının dual uzayı $L^{\infty}(X,\mu)$'ye izomorfiktir. $L^1(X,\mu)$ üzerindeki her sürekli lineer fonksiyonel

$$f \to <f,\varphi> \qquad f \in L^1(X,\mu) \qquad \textbf{(6.42)}$$

formunda yazılabilir. Burada $\varphi \in L^{\infty}(X,\mu)$ ve fonksiyonelin normu $\|\varphi\|_{\infty}$ dır.

6.5. Haar Ölçüsü

6.5.1. Tanım: G bir yerel kompakt grup olsun. *Sol dönüşüm operatörü* L_a, $a \in G$ olmak üzere,

$$L_a f(x) = f\left(a^{-1}x\right) \qquad x \in G \ , f \in \mathcal{K}(G) \tag{6.43}$$

olarak tanımlanır. Keyfi $f \in \mathcal{K}(G)$ ve $a \in G$ için

$$\mu(L_a f) = \mu(f) \tag{6.44}$$

eşitliğini sağlayan *G* üzerinde μ ölçüsüne *sol değişmez* denir.

6.5.2. Teorem: Yerel kompakt gruplar üzerinde, sıfıra denk olmayan ve bir sabit çarpanla tek türlü belirlenen bir sol değişmez pozitif ölçü vardır.

Yukarıdaki teoremde adı geçen ölçüye *sol Haar ölçüsü* ya da kısaca *Haar ölçüsü* denir. Haar ölçüsü, klasik notasyona benzer olarak dx ile gösterilir ve $\int_G f(x)\,dx$,

$$\int f(x)dx \text{ veya} \int f \tag{6.45}$$

ile de yazarız. Sol değişmezlik

$$\int f\left(a^{-1}x\right)dx = \int f(x)dx \text{ veya } d(ax) = dx,\ a \in G \tag{6.46}$$

ile ifade edilir.

6.5.3. Teorem: $f \in \mathcal{K}_+(G)$ ve *f*, sıfıra denk değilse $\int f(x)dx$ integrali pozitiftir. Bu yüzden Haar ölçüsünün desteği *G*'nin kendisidir ve e'nin herhangi bir kompakt komşuluğu bir pozitif Haar ölçüsüne sahiptir.

6.5.4. Teorem: *G*'nin Haar ölçüsü sonlu ise G kompakttır. (Terside doğrudur.)

Kanıt: $f \in \mathcal{K}(G)$, $f \neq 0$, $0 \leq f \leq 1$ alalım. $C = \mathrm{supp} f$ bir kompakt kümedir. Eğer *G* kompakt değilse, $a_n C$, $n \geq 1$ için ayrı ayrı arakesitleri boş küme olacak şekilde *G*'de (a_n) $n \geq 1$ dizisi vardır. $\left(\bigcup_{1 \leq m \leq n} a_m C\right) C^{-1}$ dışında bir a_{n+1} alalım. Böyle bir dizi için $N \geq 1$ olmak üzere,

$$\int \sum_{n=1}^{N} L_{a_n} f = N \int f \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{N} L_{a_n} f \leq 1 \tag{6.47}$$

dır. Bu Haar ölçüsünün sınırsız olduğunu gerektirir. Tersi açıktır. *G* kompakt ise $\varphi_G \in \mathcal{K}(G)$ dir.

Haar ölçüsü için aşağıdakiler sağlanır:

Bir sürekli fonksiyon yerel hemen hemen heryerde sıfır ise her yerde sıfırdır. Daha genel olarak φ sürekli fonksiyon ise

$$ess\sup_{x\in G}\left|\varphi(x)\right|=\sup_{x\in G}\left|\varphi(x)\right| \tag{6.48}$$

dir. Benzer olarak $F\in\mathcal{I}_+(G)$ ve $\int^{\times}F(x)dx=0$ ise $\forall x\in G$ için $F(x)=0$ dır.

Bir integrallenebilir $A\subset G$ kümesinin Haar ölçüsü $m_G(A)$ veya $m(A)$ ile gösterilir.

6.5.5. Tanım: *G* üzerinde sıfıra eşit olmayan μ kompleks ölçüsüne, keyfi $f\in\mathcal{K}(G)$ için

$$\int f\left(a^{-1}x\right)d\mu(x)=D_\mu(a)\int f(x)\,d\mu(x)\ ,\ \left(a\in G\right) \tag{6.49}$$

veya

$$d\mu(ax)=D_\mu(a)d\mu(x) \tag{6.50}$$

şartını sağlayacak *G* üzerinde bir D_μ fonksiyonu varsa, *bağıl değişmez (relatively invariant)* denir.

D_μ ölçüsünün $D_\mu(e)=1$ ve

$$D_\mu(ab)=D_\mu(a)\ D_\mu(b)\quad a,b\in G \tag{6.51}$$

şartlarını sağladığı açıktır. $\forall a\in G$ için $D_\mu(a)\neq 0$ ve μ pozitif ise $D_\mu>0$ dır. (6.49) denkleminin sol tarafı $a\in G$ üzerinde sürekliliğe bağlı olduğunda D_μ süreklidir. Bu şekilde tanımlanan D_μ'ye *bağıl sol değişmez* denir, benzer şekilde bağıl sağ değişmez tanımlanır.

G üzerinde bağıl sol değişmez ölçü μ'yü biliyorsak Haar ölçüsünü kolayca elde edebiliriz. Gerçekten,

$$f\to\int f(x)\frac{1}{D_\mu(x)}d\mu(x)\quad f\in\mathcal{K}(G) \tag{6.52}$$

bir sol değişmez ölçüdür ve bir Haar ölçüsüne bir sabitle bağlanır.

dx , G üzerinde bir Haar ölçüsü olsun. Her $a\in G$ için

$$f\to\int f\left(xa^{-1}\right)dx \qquad f\in\mathcal{K}(G) \tag{6.53}$$

ölçü sol değişmez olduğundan

$$\int f\left(xa^{-1}\right)dx=\Delta(a)\int f(x)dx \qquad f\in\mathcal{K}(G) \tag{6.54}$$

şartını sağlayacak bir $\Delta(a)$ sayısı vardır.

Buna göre Haar ölçüsü bağıl sağ değişmezdir. Δ, G'den $\mathbb{R}_+^*$'a bir morfizmdir.

6.5.6. Tanım: (6.56) denklemi ile tanımlanan Δ sürekli fonksiyonuna G'nin *Haar modülü* denir. Eğer $\Delta=1$ ise G'ye *unimodüler grup* denir.

6.5.7. Örnekler:

6.5.7.1. Örnek: $n\geq 2$ için $GL(n,\mathbb{R})$ determinantı sıfırdan farklı bütün $n\times n$ matrislerin (çarpmaya göre) grubu topolojiksel olarak $\mathbb{R}^{n^2}$'de bir açık kümedir. $d_{\mathbb{R}^{n^2}}x$ Lebesgue ölçüsünün bu kümeye kısıtlanmışı bağıl sol ve sağ değişmezdir. Haar ölçüsü $\dfrac{1}{|det x|^n}d_{\mathbb{R}^{n^2}}x$ dir ve sol ve sağ değişmezdir. Yani $GL(n,\mathbb{R})$ bir unimodülerdir.

6.5.7.2. Örnek: $n\geq 2$ için $SL(n,\mathbb{R})$ determinantı 1 olan $n\times n$ matrislerin grubu, $GL(n,\mathbb{R})$'nin bir kapalı normal altgrubudur. Bu yüzden unimodülerdir. Haar ölçüsünü elde etmek için e'nin bir açık komşuluğunu $\mathbb{R}^{n^2-1}$'e daldırmalıyız. $n=2$, $x=\left(x_{ij}\right)$ ise birim matrisin bir komşuluğunu $u=x_{11}$, $v=x_{12}$, $w=x_{21}$ parametrelerini alabiliriz. Bu komşuluk $\mathbb{R}^3$'ün $u>0$ yarı-uzayına topolojiksel daldırılır (kısıtlanırsa) Haar ölçüsü $u^{-1}du\,dv\,dw$ olur.

6.5.8. Gruplar Üzerinde L^1-Uzayları

G yerel kompakt uzay olsun G üzerinde Haar ölçüsüne göre integrallenebilen kompleks değerli fonksiyonların uzayı $\mathsf{L}^1(G)$ ile gösterilir. İlgili bölüm uzayı da

$L^1(G)$ ile gösterilir. Eğer G diskırit ise $L^1(G)$ yerine $l^1(G)$ yazılır. $k\in\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)=\mathcal{K}(G)$ için $k\to\int|k(x)|dx$ $\mathcal{K}(G)$ üzerinde yalnızca bir yarı norm değil aynı zamanda bir normdur. Bu yüzden $L^1(G)$ bu norma göre $\mathcal{K}(G)$'nin tamamlanmışı olarak düşünülebilir. Benzer şekilde $1<p<\infty$ için $\mathsf{L}^p(G)$ ve $L^p(G)$ tanımlanır. $\mathcal{K}(G)$ normlu uzayı, konvolüsyon ile tanımlanan çarpma işlemine göre bir Banach cebridir. $f,g\in\mathcal{K}(G)$ için $f*g$ çarpımı

$$f*g(x)=\int f(y)g(y^{-1}x)dy \tag{6.55}$$

ile verilir. $f*g\in\mathcal{K}(G)$,

$$\operatorname{supp} f*g(x)\subset\operatorname{supp}(f)\operatorname{supp}(g)\ ,\quad f,g\in\mathcal{K}(G) \tag{6.56}$$

ve

$$\|f*g\|\leq\|f\|_1\cdot\|g\|_1 \tag{6.57}$$

oldukları kolayca görülür.

6.5.8.1. Teorem: *G* yerel kompakt grup ve $f,g\in\mathsf{L}^1(G)$ olsun. Bu durumda

i) $y\to f(y)g(y^{-1}x)$ fonksiyonu *G*'nin bir önemsiz alt kümesi dışındaki bütün $x\in G$ için $\mathsf{L}^1(G)$ dedir.

ii) *G* üzerinde hemen hemen heryerde tanımlı $x\to\int f(y)g(y^{-1}x)dy$ fonksiyonu integrallenebilir.

iii) $f*g$, hemen hemen heryerde ii'deki fonksiyonla çakışan $\mathsf{L}^1(G)$'de herhangi bir fonksiyon ise

$$\int|f*g(x)|dx\leq\int|f(x)|dx\cdot\int|g(x)|dx \tag{6.58}$$

dir.

6.6. Beurling Cebri

6.6.1. Tanım: G yerel bir kompakt grup olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan G üzerinde reel değerli w fonksiyonuna bir *ağırlık fonksiyonu* denir.

i) $w(x)\geq 1$, $x\in G$

ii) $w(xy)\leq w(x)w(y)$ $\quad x,y\in G$

iii) w ölçülebilir ve yerel sınırlıdır.

$f\,w\in L^1(G)$ şartını sağlayan f fonksiyonları $L^1(G)$'nin bir altcebrini oluşturur. Eğer f'in normu

$$\|f\|_{1,w}=\int|f(x)|w(x)dx \tag{6.59}$$

şeklinde tanımlanırsa bu cebir bir Banach cebridir.

6.6.2. Tanım: w, bir yerel kompakt grup G üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun. $f\,w\in L^1(G)$ olacak şekilde bütün $f\in L^1(G)$ fonksiyonlarının Banach cebrine G üzerinde bir *Beurling cebri* denir ve $L^1_w(G)$ ile gösterilir.

w yerel sınırlı olduğu için, her Beurling cebri $L^1_w(G)$, $K(G)$'yi içerir. Daha da önemlisi $K(G)$, $L^1_w(G)$'de yoğundur.

6.6.3. Teorem: Bir yerel kompakt G grubu üzerinde her ağırlık fonksiyonu w_1 için denk normlara sahip, $L^1(G)$'nin aynı alt cebrini tanımlayan bir sürekli ağırlık fonksiyonu w vardır. $K(G)$'de

$$f^*(x)=\overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1}) \tag{6.60}$$

şeklinde tanımlanan $f\to f^*$ involüsyonu vardır.

$$f^{**}=f \tag{6.61}$$

$$(\alpha f+\beta g)^*=\overline{\alpha}f^*+\overline{\beta}g^* \qquad f,g\in\mathbb{C} \tag{6.62}$$

$$(f*g)^*=g^**f^* \tag{6.63}$$

dır. İnvolüsyon,

$$\left\| f^{*} \right\|_{1} = \left\| f \right\|_{1} \tag{6.64}$$

olduğundan izometriktir. Dolayısıyla süreklidir. Bu involüsyon süreklilik ile $L^1(G)$'ye genişletilebilir.

$L_w^1(G)$ ve $L^1(G)$ arasındaki en önemli fark; G abelyen olsa bile izometrik involüsyon $L_w^1(G)$'ye genelde uygulunamaz. Gerçekten eğer w simetrik değilse her $f \in L_w^1(G)$ için f^{*}, $L_w^1(G)$'de değildir.

7. AMENABLE YARI GRUPLAR

Soyut harmonik analiz, yerel kompakt gruplar ve bu gruplara bağlı cebirler ile ilgilenir. Bu bölümde yerel kompakt gruplarda amenable kavramı ve ilgili teoremler verilmiştir. Her grup diskırit topoloji ile yerel kompakttır. Reel sayılar kümesi toplama ve doğal topoloji altında yerel kompakt gruptur. Kompleks düzlemde birim çember, çarpım işlemi altında yerel kompakttır.Sonsuz boyutlu B Banach uzayı toplama altında değişmeli topolojik gruptur, fakat yerel kompakt değildir.

7.1. Amenable Yarı Gruplar

7.1.1. Tanım: Bir S kümesi üzerinde tanımlanan $\circ$ cebirsel işlemine göre aşağıdaki özellikleri sağlayan S kümesine *yarıgrup* denir.

a) $\forall s_1, s_2 \in S \quad , \quad s_1 \circ s_2 \in S$

b) $\forall s_1, s_2, s_3 \in S \ , \ s_1 \circ (s_2 \circ s_3) = (s_1 \circ s_2) \circ s_3$ **(7.1)**

7.1.2.Örnekler:

1) Tamsayılar kümesi ve pozitif tamsayılar kümesi adi toplama işlemine göre yarı gruptur.

2) nxn türünden matrisler, matris çarpımına göre yarıgruptur.

3)Herhangi bir B Banach cebri üzerindeki $L(B)$ operatör cebri çarpımsal yarıgruptur.

4)Herhangi bir S kümesi üzerinde tanımlı,

$s_1 s_2 = s_2 \quad , \quad \forall s_1, s_2 \in S$

işlemine göre S kümesi bir yarıgruptur.

S bir yarı grup veya grup olsun.

S üzerinde tanımlı bütün reel değerli θ fonksiyonlarının kümesi üzerinde

$$\| \theta \| = \sum_{s \in S} |\theta(s)| \qquad \textbf{(7.2)}$$

şeklinde tanımlı norma göre, normlu uzay $\ell^1(S)$ ile gösterilir. Kısaca,

$$\ell^1(S)=\left\{\theta:\ \theta:S\to\mathbb{R}\quad,\quad \|\theta\|=\sum_{s\in S}|\theta(s)|<\infty\right\}\ . \tag{7.3}$$

S üzerinde tanımlı bütün sınırlı reel değerli x fonksiyonlarının kümesi üzerinde

$$\|x\|=\sup_{s\in S}|x(s)| \tag{7.4}$$

şeklinde tanımlı norma göre, normlu uzay $\ell^\infty(S)$ ile gösterilir. Kısaca,

$$\ell^\infty(S)=\left\{x:\ x:S\to\mathbb{R}\ \text{,sınırlı}\ ,\|\theta\|=\sup_{s\in S}|x(s)|\right\}. \tag{7.5}$$

$\ell^1(S)$ ve $\ell^\infty(S)$ tam uzay olduklarından Banach uzaylarıdır. Her *B* Banach uzayı , *B* üzerindeki lineer , reel değerli β fonksiyonlarından oluşan B' dual uzayı,

$$\|\beta\|=\sup_{\|b\|\le 1}|\beta(b)| \tag{7.6}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Yakınsak diziler uzayının duali, sürekli fonksiyonlar uzayına izomorftur. Yani,

$$\ell^1(S)'\approx\ell^\infty(S) \tag{7.7}$$

7.1.3. Tanım: $\ell^\infty(S)$ sınırlı diziler kümesi üzerinde *mean* μ ,

$$\inf_{s\in S}x(s)\le\mu(x)\le\sup_{s\in S}x(s)\quad,\quad\forall\, x\in\ell^\infty(S) \tag{7.8}$$

koşulunu sağlayan $\ell^\infty(S)'$ ’ ın bir elemanıdır.

A) $\ell^\infty(S)$ üzerindeki her mean μ aşağıdaki özellikleri sağlar:

a) μ , $\ell^\infty(S)'$ daki birim küre içindedir.

$$\|\mu\|=\sup_{x\neq 0}\frac{|\mu(x)|}{\|x\|}\le\sup_{x\neq 0}\frac{\sup|x(s)|}{\|x\|}=1 \tag{7.9}$$

O halde $\|\mu\|\le 1$, yani $\mu\in B_1\left(\ell^\infty(S)'\right)$ dır.

b) Eğer *e*, S'nin her noktasındaki değeri 1 olan bir fonksiyon ise o halde $\mu(e)=1$ dir.

Burada $e: S \to \mathbb{R}$, $e(s)=1$, $\forall s \in S$

$\mu(e)=1$ ve a) şıkkından,

$1 \leq \mu(e) \leq 1$ buradan $\mu(e)=1$ bulunur.

c) $x(s) \geq 0$, $\forall s \in S$ ise o halde $\mu(x) \geq 0$ dır.

d) $\|\mu\|=1$

$$\|\mu\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\mu(x)|}{\|x\|} \geq \frac{\|\mu(x_0)\|}{\|x_0\|} \tag{7.10}$$

x_0 , b) şıkkındaki *e* olarak seçilirse, yani $x_0 = e$ alınırsa,

$\frac{\|\mu(e)\|}{\|e\|} = 1$ olduğundan $\|\mu\|=1$ bulunur.

B) Eğer $\ell^\infty(S)'$ ın bir elemanı, a) ve b) koşullarını sağlıyorsa veya b) , c) , ve d) koşullarından herhangi ikisini sağlıyorsa μ elemanı, $\ell^\infty(S)$ üzerinde bir mean'dir.

C) $\ell^\infty(S)$ üzerindeki mean'lerin kümesi boşküme değildir, konveks ve w*-kompakttır.

7.1.4. Tanım: $\ell^1(S)$ nın bir θ elemanı, her $s \in S$ için $\theta(s) \geq 0$ oluyorsa ve $\sum_{s \in S} \theta(s) = 1$ ise θ'ya *sayılabilir mean* denir. Bunlara ek olarak, $\{ s \mid \varphi(s) > 0 \}$ kümesi sonlu bir küme ise φ sayılabilir mean'e S üzerinde bir *sonlu mean* denir.

Eğer S yarıgrup ise $\ell^\infty(S)$ de birçok yeni işlem tanımlamak mümkündür. Örneğin, S homomorfik olarak aşağıdaki teknik ile $L(\ell^\infty(S))$ içine gömülebilir.

$\forall s \in S$ ve her $x \in \ell^\infty(S)$ için, r_s , $L(\ell^\infty(S))$ nın bir elemanı olsun ve şu şekilde tanımlansın;

$(r_s x)(s') = x(s's)$, $\forall s' \in S$

Benzer şekilde l_s'yı tanımlarsak,

$(l_s x)(s') = x(s s')$, $\forall s' \in S$

Burada r_s'ya *sağ dönüşüm operatörü (right translation operator)*, l_s'ya *sol dönüşüm operatörü (left translation operator)* denir.

r_s , S'dan $L\left(\ell^\infty(S)\right)$'ya bir homomorfizmdir yani $r_{ss'} = r_s r_{s'}$

l_s , S'dan $L\left(\ell^\infty(S)\right)$ 'ya bir antihomomorfizmdir yani $l_{ss'} = l_{s'} l_s$

Bununla birlikte $\|r_s x\| \le \|x\|$ ve $r_s e = e$ olduğundan, her s için $\|r_s\| = 1$ bulunur. Benzer şekilde her s için $\|l_s\| = 1$ dir.

7.1.5. Tanım: $\ell^\infty(S)'$ ın bir elemanı μ ,

$$\mu(l_s x) = \mu(x) \quad , \quad \forall x \in \ell^\infty(S) \quad , \quad \forall s \in S \qquad \textbf{(7.11)}$$

eşitliğini sağlıyorsa *sol invaryant (left invariant)* olarak adlandırılır. Benzer şekilde μ elemanı,

$$\mu(r_s x) = \mu(x) \quad , \quad \forall x \in \ell^\infty(S) \quad , \quad \forall s \in S \qquad \textbf{(7.12)}$$

eşitliğini sağlıyorsa *sağ invaryant (right invariant)* olarak adlandırılır.

Bunu, $L\left(\ell^\infty(S)'\right)$ cebrinde eşlenik operatörlerle başka şekilde de ifade edebiliriz.

$$\mu \text{ left invaryanttır} \Leftrightarrow \quad l_s^* \mu = \mu \quad , \quad \forall s \in S \qquad \textbf{(7.13)}$$

$$\mu \text{ right invaryanttır} \Leftrightarrow \quad r_s^* \mu = \mu \quad , \quad \forall s \in S \qquad \textbf{(7.14)}$$

7.1.6. Tanım: Bir S yarıgrubu için, $\ell^\infty(S)$ üzerinde hem sol hem de sağ invaryant bir mean μ varsa S'ye *amenable* denir. Eğer sadece sol invaryant mean mevcutsa S'ye *l-amenable*, sadece sağ invaryant mean mevcutsa S'ye *r-amenable* denir.

İnvaryant mean'lerin bazı özellikleri şunlardır:

A) Eğer S hem *l*-amenable hem de *r*-amenable ise , S amenable'dır.

B) Bir $l-[r-]$ amenable grup aynı zamanda $r-[l-]$ amenable'dır.

Bundan dolayı amenable'dır.

C) f, S'den S''ye bir homomorfizm olmak üzere,

S amenable ise S' amenable , S *l*-amenable ise S' *l*-amenable, S *r*-amenable ise S' right amenable'dır.

D) Eğer G bir $l-[r-]$ amenable grup ise, G'nin her alt grubu da $l-[r-]$ amenable'dır.

E) H ve G/H amenable olacak şekilde, H, G'nin bir normal alt grubu ise G de amenable'dır.

F) Her değişmeli yarıgrup amenable'dır.

G) Her sonlu grup amenable'dır.

7.2. Amenable Kompakt Yarı Gruplar

Yarıgrup tanımını tekrar hatırlatalım. Bir S kümesi, üzerinde tanımlanan cebirsel işleme göre kapalılık ve birleşme özelliklerini sağlıyorsa yarıgrup olarak adlandırılır. Eğer S'nin bir S_1 alt kümesi için $S_1.S_1 \subseteq S_1$ oluyorsa S_1 kümesine *alt yarıgrup* denir. *S*'nin boş kümeden farklı bir L alt kümesi için $S.L \subseteq L$ oluyorsa *L*'ye *sol ideal* denir. *S*'nin boş kümeden farklı bir *R* alt kümesi için $R.S \subseteq R$ oluyorsa *R*'ye *sağ ideal* denir. Bir küme hem sağ hemde sol ideal ise *ideal* olarak adlandırlır. Bir $e \in S$ için $e^2 = e$ oluyorsa e elemanına *idempotent eleman* denir.

7.2.1. Tanım: Bir S kümesi hem yarıgrup hemde Haussdorff uzayı ve $S \times S$'den S'ye tanımlı $(s,t) \rightarrow st$ tasviri ile verilen topolojide sürekli ise S'ye *topolojik yarıgrup* denir.

S üzerindeki bir *m* ölçüsü, her A Borel kümesi ve $\forall u \in S$ için

$$Au^{-1} = \{ t \in S : tu \in A \} \quad \textbf{(7.15)}$$

olacak şekilde,

$$m(A) = m(Au^{-1}) \quad \textbf{(7.16)}$$

şartını sağlıyorsa *r*-invaryant* olarak adlandırılır.

7.2.2. Teorem: Bir S kompakt yarıgrubu üzerinde aşağıdaki koşullar birbirine denktir..

1. $\ell^{\infty}(S)'$ da bir sağ invaryant mean m vardır.

2. S'da bir r*-invaryant ölçü m vardır.

3. S, tam olarak bir tane minimal sol ideal içerir.

7.2.3. Sonuç: Bir S kompakt semigrubu üzerinde aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

1. $\ell^{\infty}(S)'$ da bir invaryant mean vardır.

2. S 'nın çekirdeği K bir gruptur.

7.2.4. Sonuç: Eğer S kompakt yarıgrubu tek bir sağ invaryant mean m'ye sahip ise o halde S 'nın çekirdeği K bir gruptur ve m iki taraflı invaryanttır.

7.3. Amenable Yerel Kompakt Gruplar

7.3.1. Tanım: Üzerinde tanımlandığı topoloji yerel kompakt ve Hausdorff uzay olan topolojik gruba *yerel kompakt grup* denir.

X herhangi bir küme ve $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ sonlu toplamsal, $\mu(X) < \infty$ şartını sağlayan bir küme fonksiyonu ise $m \in \ell^{\infty}(X)'$ için

$$<\phi, m> := \int_X \phi(x)\, d\mu(x) \quad , (\phi \in \ell^{\infty}(X)) \qquad \textbf{(7.17)}$$

ile tanımlıdır.

7.3.2. Tanım: G bir yerel kompakt gurup ve E , $L^{\infty}(G)$ 'nin sabit fonksiyonları içeren bir alt uzayı olsun. E üzerinde bir *mean*

$$<1, m> = \|m\| = 1$$

şartını sağlayan E' 'ın elemanı bir fonksiyoneldir.

7.3.3. Önerme: G bir yerel kompakt grup ve E , $L^{\infty}(G)$'nin sabit fonksiyonları içeren ve kompleks eşlenik altında kapalı bir alt uzayı olsun.

Bu durumda, $<1, m> = 1$ şartını sağlayan $m : E \to \mathbb{C}$ lineer fonksiyoneli için aşağıdakiler birbirine denktir.

i) m, E üzerinde bir meandir.

ii) m, pozitiftir. Diğer bir deyişle,

$$<\phi, m> \geq 0 \; (\phi \in E, \phi \geq 0) \; . \qquad \textbf{(7.18)}$$

7.3.4. Tanım: *G* bir yerel kompakt grup olsun. $M(G)$, *G* üzerindeki bütün (sonlu) kompleks regüler Borel ölçülerinin uzayını göstersin. Bir $g \in G$ için *g*'deki nokta kütle (*point mass*) $\delta_g \in M(G)$ şu şekilde tanımlanır :

$$< f, \delta_g > = f(g) \quad (f \in C_o(G)) \quad . \tag{7.19}$$

7.3.5. Tanım: G bir yerel kompakt grup ve $\mu, \nu \in M(G)$ olsun.

$\mu, \nu \in M(G)$ için $\mu * \nu \in M(G)$ *konvulüsyon çarpım* şu şekilde tanımlanır

$$< f, \mu * \nu > = \int_G \left(\int_G f(gh) d_\mu(g) \right) d\nu(h) \quad (f \in C_o(G)) \ . \tag{7.20}$$

7.3.6. Tanım: *G* bir yerel kompakt grup ve *E*, $L^\infty(G)$'nin sabit fonksiyonları içeren ve kompleks eşlenik altında kapalı bir altuzayı olsun.

i) Eğer her $\phi \in E$ ve $g \in G$ için $\delta_g * \phi \in E$ ise *E*'ye *sol invaryant* denir.

ii) Eğer *E* sol invaryant ise, o halde

$$< \delta_g * \phi, m > = < \phi, m > \quad (g \in G \ , \ \phi \in E) \tag{7.21}$$

oluyorsa *E* üzerindeki mean *m*'ye *sol invaryant* denir.

7.3.7. Tanım: Eğer $L^\infty(G)$ de bir sol invaryant mean var ise G yerel kompakt grubuna *amenable* denir.

7.3.8. Tanım: *G* bir yerel kompakt grubu olsun.

i) $P(G)$ şu şekilde tanımlansın,

$$P(G) = \left\{ f \in L^1(G) : f \geq 0 \ , \| f \|_1 = 1 \right\} \tag{7.22}$$

ii) *E* uzayı, $L^\infty(G)$, $C_b(G)$, $LUC(G)$, $RUC(G)$ veya $UC(G)$ uzaylarından biri olsun. Eğer

$$< f * \phi, m > = < \phi, m > \quad (\phi \in E, f \in P(G)) \tag{7.23}$$

ise bir mean $m \in E^*$ *topolojik sol invaryant* olarak adlandırılır.

7.3.9. Lemma: *G* bir yerel kompakt grup ve *E* uzayı, $L^{\infty}(G)$, $C_b(G)$, $LUC(G)$, $RUC(G)$ veya $UC(G)$ uzaylarından biri olsun. O halde *E* üzerindeki her topolojik sol invaryant mean, sol invaryanttır.

7.3.10. Teorem: Bir yerel kompakt grup *G* için aşağıdakiler denktir:

i) *G* amenable'dır.

ii) $C_b(G)$ 'de sol invaryant mean vardır.

iii) $LUC(G)$'de sol invaryant mean vardır.

iv) $RUC(G)$'de sol invaryant mean vardır.

v) $UC(G)$'de sol invaryant vardır.

7.3.11. Teorem: Bir yerel kompakt grup *G* için aşağıdakiler denktir.

i) *G* amenable'dır.

ii) $L^{\infty}(G)$'de sağ invaryant mean vardır.

iii) $L^{\infty}(G)$'de invaryant mean vardır.

7.3.12. Önerme: *G* amenable, yerel kompakt grup ve *H* bir başka yerel kompakt grup olsun. $\theta : G \to H$ yoğun görüntü kümesine sahip sürekli homomorfizm ise o halde *H* de amenable'dır.

7.3.13. Sonuç: *G* amenable, yerel kompakt grup ve *N, G*'nin kapalı alt grubu olsun. O halde *G/N* amenable'dır.

7.3.14. Teorem: *G* amenable, yerel kompakt grup ve *H*, *G*'nin kapalı alt grubu olsun. O halde *H* amenable'dır.

7.3.15. Teorem: *G* yerel kompakt grup, *N* ve *G/N* amenable olacak şekilde *N*, *G*'nin kapalı normal altgrubu olsun. O halde *G* amenable'dır.

7.3.16. Örnekler:

7.3.16.1. Örnek: $G = \mathbb{Z}$ alalım. Acaba Tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$'de invaryant mean var mıdır?

$P(G)$'nin tipik bir elemanı, $\sum_{-\infty}^{\infty} a_r \delta_r$ formunda sonsuz toplam olacaktır. Burada $\forall r$, $a_r \geq 0$ ve $\sum_{-\infty}^{\infty} a_r = 1$ dir. Zayıf* yığılma noktalarının (weak* cluster points) en az biri invaryant mean olacak şekilde $P(G)$'de bir $\{f_n\}$ dizisi oluşturmaya çalışalım. f_n 'i şu şekilde seçelim:

$$f_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{r=-n}^{n} \delta_r \quad \text{(Cesaro toplamı)} \tag{7.24}$$

Eğer $\varphi \in 1_{\infty}(\mathbb{Z})$ ve $s \geq 0$ $\quad (s \in \mathbb{Z})$ ise,

$$\left| \hat{f}(\phi s) - \hat{f}_n(\phi) \right| = \left| \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{r=-n}^{n} (\phi(r+s) - \phi(r)) \right) \right|$$

$$= \frac{1}{2n+1} \left| - \sum_{-n}^{-n+s-1} \phi(r) + \sum_{n+1}^{n+s} \phi(r) \right|$$

$$\leq \frac{2s \|\varphi\|}{2n+1} \to 0 \ , \ n \to \infty \tag{7.25}$$

elde edilir. Benzer bir sonuç $s < 0$ için elde edilirç $M(\mathbb{Z})$'deki $\left\{ \hat{f}_n \right\}$ dizisinin her zayıf* yığılma noktası bir sol invaryant meandir. Dolayısıyla, $\mathbb{Z}$ amenabledır.

7.3.16.2. Örnek: $G = \mathbb{R}$ alalım. Bir önceki örneği kullanalım ve $f_n = \dfrac{\mathsf{C}_{[-n,n]}}{2n}$ alalım. O halde $x \geq 0$ ve $\varphi \in L_{\infty}(\mathbb{R})$ için,

$$\left| \hat{f}_n(\phi x) - \hat{f}_n(\phi) \right| = \frac{1}{2n} \left| \int_{-n}^{n} \phi(x+t) - \phi(t) dt \right|$$

$$\leq \frac{2x \|\varphi\|}{2n} \to 0 \quad , \ n \to \infty \tag{7.26}$$

elde edilir. $\left\{ \hat{f}_n \right\}$ dizisinin her zayıf* yığılma noktası bir (sol) invaryant meandir. Dolayısıyla, $\mathbb{R}$ amenabledır.

7.4. Amenable Kavramının Alternatif Karakterizasyonları

7.4.1. İnvaryant Meanlar

İnvaryant meanin tanımına göre; G, ancak ve ancak $L^{\infty}\left(G\right)$'de bir sol-dönüşüm invaryant mean var ise amenabledır. Amenable kavramı, $L^{\infty}\left(G\right)$'de sağ-dönüşüm invaryant mean'in, iki taraflı dönüşüm invaryant mean'in ve topolojik olarak invaryant mean'lerin varlığına denktir.

Kompakt grupların karakteristik özelliği Haar ölçülerinin sonlu olmasıdır ve tüm grupların Haar ölçüleri genellikle normalize edildiğinde 1'e eşittir. Haar ölçüsüne göre integrasyon, sınırlı fonksiyonlar uzayında bir invaryant mean'dir. G kompakt değil ise, sınırlı fonksiyonlar genellikle integre edilemez.

(Çünkü $L^{\infty}\left(G,m\right)\not\subset L^{1}\left(G,m\right)$) Bu sebepten $L^{\infty}\left(G,m\right)$ deki dönüşüm-invaryant meanlerin varlığı araştırılırken kompakt grupların bazı özellikleri amenable, yerel kompakt gruplara genişler.

Haar ölçüsü tek olmasına rağmen invaryant meanler tek değildir. Rudin, 1972'de kompakt abelian grup T'nın Haar ölçüsünden başka invaryant meanleri olduğunu gösterdi. Daha sonra, genel yerel kompakt bir gruptaki invaryant meanlerin sayısı tam olarak bulundu. [2]

7.4.2. Paradoksal Ayrışım (Paradoxical Decomposition)

Bir G grubunun paradoksal ayrışımı, aşağıdaki şartı sağlayan G'nin sonlu

$$G=A_1\cup\ldots\cup A_k\cup B_1\cup\ldots\cup B_l \qquad \textbf{(7.27)}$$

ayrışımıdır. $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_l\in G$ ve $A_1\ldots A_k,B_1\ldots B_l$ ölçülebilir alt kümeler olmak üzere,

$$G=x_1A_1\cup\ldots\cup x_kA_k \quad \text{ve} \quad G=y_1B_1\cup\ldots\cup y_lB_l \qquad \textbf{(7.28)}$$

de G'nin ayrışımlarıdır.

G'nin ancak ve ancak paradoksal ayrıştırması yoksa amenable olacağı 1938 yılında Tarski tarafından gösterildi. Amenable kavramı ilk olarak paradoksal ayrıştırması ile bağlantılı olarak ortaya çıktı.

7.4.2.1.Örnek:

İki üreteçli F_2 serbest grubunun amenable olmadığını iki yöntemle gösterelim:

a ve b F_2'nin iki üreteci olsun. A_1 kümesi a ile başlayan bütün kelimelerin, B_1 kümesi b ile başlayan bütün kelimelerin, A_2 kümesi a^{-1} ile başlayan bütün kelimelerin ve B_2 kümesi b^{-1} ile başlayan bütün kelimelerin kümesi olsun. A_1, B_1, A_2, B_2 arakesitleri boş ve $F_2 \setminus \{e\} = A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2$ dir. Herhangi $k \in F_2 \setminus A_1$ için $a^{-1}k \in A_2$ dir. $k = a(a^{-1}k) \in aA_2$ olduğundan $F_2 = A_1 \cup aA_2$ dir. Benzer şekilde $F_2 = B_1 \cup bB_2$ dir. Yani F_2 paradoksal ayrışımdır.Dolayısıyla F_2 amenable değildir.

Veya $m \in L^{\infty}(F_2)$ olduğunu kabul edelim.Bu durumda,

$$m(\{e\}) + m(A_1) + m(A_2) + m(B_1) + m(B_2) = m(G),$$

$$m(G) = m(A_1) + m(aA_2) \quad , \quad m(G) = m(B_1) + m(bB_2) \qquad \textbf{(7.29)}$$

ve $m(G)=1$ olması gerektiğinden *m*'nin invaryant olması ile çelişir yani böyle bir *m* invaryant ölçü bulunamaz, dolayısıyla F_2 amenable değildir.

7.4.3. Folner Koşulu

Bu koşula göre, amenable gruplar dönüşümler altında neredeyse invaryant kompakt altkümelere sahiptir. Örneğin, *G* kompakt ise grubun kendisi dönüşüm altında invaryanttır.

7.4.3.1. Tanım: Eğer her $\varepsilon > 0$ ve *G*'nin her kompakt alt kümesi *C* için,

$$m\left(\left(xK \setminus K \right) \cup \left(K \setminus xK \right) \right) / m(K) < \varepsilon \quad \left(x \in C \right) \qquad \textbf{(7.30)}$$

olacak şekilde *G*'nin bir K kompakt altkümesi var ise, *G* yerel kompakt gurubu Folner koşulunu sağlar denir.

Bir *G* yerel kompakt grubu ancak ve ancak Folner koşulunu sağlarsa amenable'dır.

7.4.3.2. Sonuç: *G* bir amenable olmayan grup olsun. O halde $L^2(G)$ de sıfır olmayan dönüşüm-invaryant fonksiyonel yoktur.

7.4.4. Sabit Nokta Özelliği (The Fixed Point Property)

Bir yerel konveks topolojik lineer uzayın bir *C* kompakt, konveks altkümesinde G'nin her sürekli ve afin aksiyonu bir sabit noktaya sahiptir.

7.4.4.1. Önerme: *G* yerel kompakt grubu ancak ve ancak sabit nokta özelliğine sahip ise amenable'dır.

7.4.4.2. Teorem: *G* bir yerel kompakt grup olsun. *G* ancak ve ancak her Banach $L^1(G)$-bimodül x için

$$\mathcal{H}^1\left(L^1(G), X'\right)=\{0\} \quad \textbf{(7.31)}$$

oluyorsa amenable'dır.

7.4.4.3. Sonuç: *G* bir amenable grup ve $D: L^1(G) \to L^1(G)$ bir sürekli türev olsun.

O halde,

$$D(f)=f*\mu-\mu*f \quad \left(f\in L^1(G)\right) \quad \textbf{(7.32)}$$

olacak şekilde $\mu\in M(G)$ vardır.

7.4.5. Yaklaşık Birim

Bir *G* grubunun amenable olması, $L^1(G)$ nin ideallerinde yaklaşık birimin varlığına denktir. Eşboyutu 1 olan

$$L_0^1(G) := \{ f \in L^1(G) : \int_G f\,dm = 0 \}$$

alt uzayı $L^1(G)$'nin bir kapalı idealidir. Bu konuda 1968 yılında Reiter ilk sonucu vermiştir.

7.4.5.1.Teorem: G yerel kompakt grubunun amenable olması için gerek ve yeter şart $L_0^1(G)$'nin bir sol sınırlı yaklaşık birime sahip olmasıdır.

8. AMENABLE RADİKAL BANACH CEBİRLERİ

Bu bölümde değişmeli ve değişmeli olmayan amenable radikal Banach cebirleri incelenmiştir. Runde [26] makalesinde değişmeli olmayan amenable radikal Banach cebrine zayıf Wiener özelliğini kullanarak bir örnek vermiştir. Read, [21] makalesinde değişmeli amenable radikal Banach cebrine, yaklaşık köşegen karakterizasyonunu kullanarak bir örnek vermiştir.

8.1. Amenable Banach Cebirleri

A bir birimli cebir ve

$$\pi\left(a\otimes b\right)=ab\ \left(a,b\in A\right) \tag{8.1}$$

olacak şekilde $\pi : A\otimes A\to A$ bir lineer tasvir olsun. $\pi\left(u\right)=e_A$ ve

$$a\cdot u=u\cdot a \quad \left(a\in A\right) \tag{8.2}$$

olacak şekilde $u\in A\otimes A$ elemanına A için bir *köşegen* (*diogonal*) denir.

8.1.1. Teorem: A bir cebir olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:

i) Her A-bimodül E için $H^1\left(A,E\right)=\left\{0\right\}$ dır.

ii) A birimlidir ve A'nın $A\otimes A$'da bir köşegeni vardır.

iii) A yarı-basittir ve sonlu boyutludur.

8.1.2. Tanım: A bir Banach cebri olsun. Her Banach A-bimodül E için

$$\mathcal{H}^1\left(A,E'\right)=\left\{0\right\} \tag{8.3}$$

ise A *amenable*'dır.

Bundan dolayı, A'dan dual modül E''ye giden her sürekli türev iç (inner) ise A amenabledır. A bir birimli cebir olsun. A'nın amenable olduğunu göstermek için, her birimli Banach A-bimodül E için $\mathcal{H}^1\left(A,E'\right)=\left\{0\right\}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

E ve F Banach uzayları ve $T \in B(E,F)$ olsun. *T'nin duali* $T' \in B(F',E')$ elemanlarından oluşur ve

$$<x, T'\lambda> = <Tx, \lambda> \quad (x \in F\ ,\ \lambda \in F') \tag{8.4}$$

şeklinde belirlenir. E' ve F' kendi *zayıf* $*$ topolojilerine sahip olduğunda bu tasvir süreklidir. $B(E'',F'')$ de T'nin ikinci duali $T'' = (T')'$ dır.

8.1.3. Tanım: A bir birimli Banach cebri olsun.

$$\pi''(M) = e_A \quad \text{ve} \quad a \cdot M = M \cdot a \ (a \in A) \tag{8.5}$$

olacak şekilde $\left(A \hat{\otimes} A\right)''$ deki bir M elemanına A için bir *sanal köşegen* (*virtual diagonal*) denir.

8.1.4. Teorem: A bir birimli Banach cebri olsun. Bu durumda, A ancak ve ancak A'nın bir virtual diagonali varsa amenabledır.

G bir grup ve $A = \ell^1(G)$ olsun. Verilen $f, g \in A$ için $G \otimes G$ de $f \otimes g$ şu şekilde tanımlanır:

$$(f \otimes g)(s,t) = f(s)g(t) \quad (s,t \in G) \tag{8.6}$$

$A \hat{\otimes} A \to \ell^1(G \times G)$ bir izometrik izomorfizm vardır. Bu $A \otimes A$ da $f \otimes g$ yi yukarıdaki gibi tanımlar.

$\ell^1(G)$ nin dual uzayı $\ell^\infty(G)$'dir. $f \in \ell^\infty(G)$ üzerinde $\delta_S \in \ell^1(G)$ nin aksiyonları (actions) şu şekilde verilir:

$$(\delta_S \cdot f) = (t) = f(ts) \ ,\ (f \cdot \delta_S)(t) = f(st) \quad (t \in G) \tag{8.7}$$

$\ell^1(G \times G)$ nin duali,

$$\left(A \hat{\otimes} A\right)' = \ell^\infty(G \times G) \tag{8.8}$$

dir ve bu bir Banach A-bimodüldür. Modül işlemleri $\bullet$ aşağıdaki denklemleri sağlar:

$s \in G$ ve $F \in \ell^\infty(G \times G)$ olmak üzere,

$$(\delta_S \cdot F)(u,v)=F(u,vs) \ , \ (F\cdot\delta_s)(u,v)=(su,v) \ \ (u,v\in G) \tag{8.9}$$

$\pi : A\hat{\otimes} A \to A$ üretilmiş çarpım tasvirinin (the induced product map) duali $\pi' : \ell^\infty(G) \to \ell^\infty(G\times G)$ dir ve

$$\pi'(f)(u,v)=f(uv) \ , \ (u,v\in G \ , \ f\in\ell^\infty(G)) \tag{8.10}$$

Bundan dolayı, bir virtual diagonal

$$< F\cdot\delta_s , M >=<\delta_s\cdot F , M > \quad (s\in G \ , \ F\in\ell^\infty(G\,\mathrm{x}\,G)) \tag{8.11}$$

ve

$$<\pi'(f), M>=<f(e_G) \quad (f\in\ell^\infty(G)) \tag{8.12}$$

olacak şekilde $\ell^\infty(G\times G)$ de bir sürekli lineer *M* fonksiyonelidir.

8.1.5. Tanım: *G* bir grup olsun. $\ell^\infty(G)$ de bir *mean*

$$\Lambda(1)=\|\Lambda\|=1 \tag{8.13}$$

olacak şekilde $(\ell^\infty(G), |\cdot|_G)$ de bir sürekli lineer Λ fonksiyonelidir.

$$< f,\Lambda >=< f\cdot\delta_x ,\Lambda > \ \ (s\in G, \ f\in\ell^\infty(G)) \tag{8.14}$$

ise mean Λ *sol invaryanttır*.

G'de bir sol invaryant mean varsa *G* grubu *amenabledır.*

8.1.6. Teorem: (Johnson)

G bir grup olsun. O halde, $\ell^1(G)$ Banach cebri, ancak ve ancak *G* grubu amenable ise amenabledır.

8.1.7. Önerme: *A* ve *B* Banach cebirleri ve $\overline{\theta(A)}=B$ olacak şekilde $\theta : A\to B$ bir sürekli homomorfizm olsun. Varsayalım ki *A* amenabledır. O halde *B* amenabledır.

8.1.8. Teorem: Her kompakt uzay Ω için, $C(\Omega)$ Banach cebri amenabledır.

8.2. Değişmeli Olmayan Amenable Radikal Banach Cebirleri

A bir Banach cebri ve *Prim(A)* primitif ideallerin uzayını göstersin. $I \subset A$ ve $J \subset Prim(A)$ için

$hull(I) := \{P \in Prim(A) : I \subset P\}$, $ker(J) = \bigcap\{P : P \in J\}$

ve $J^{-} = hull(ker(J))$ olarak tanımlanır. $I \subset A$ ve $J = hull(I)$ ise $J^{-} = J$ dir.

Prim(A)'nın kapalı alt kümesi *F,* $F = hull(I)$ olacak şekilde *A*'nın kapalı ideali *I* yalnız *ker(F)* ise *A* için bir *sentez kümesi denir.* Diğer durumda F'ye A için *sentez olmayan* bir küme denir.

8.2.1. Tanım: *A* için sentez kümesi boş küme olan bir Banach cebrine *zayıf Wiener (weakly* W*iener)* denir.

Bir yerel kompakt *G* grubunun zayıf Wiener olması, $L^1(G)$'nin zayıf Wiener olması olarak tanımlanır.

8.2.2. Yardımcı Teorem: *A* bir zayıf Wiener olan bir Banach cebri olsun. Bu durumda *A*'nın her bölümü zayıf Wienerdir.

A bir Banach cebri *S* ve *T*, *A*'dan *A*'ya giden $x.Ty = Sx.y \quad \forall x, y \in A$ şartını sağlayan sınırlı lineer operatörler ise (S,T) ikilisine *çift merkezleyici* denir. Bu ikililerin oluşturduğu $M(A)$ kümesi

$(S_1,T_1)(S_2,T_2)=(S_1S_2,T_1T_2)$

çarpımı altında bir cebir oluşturur. Bu cebire *çift merkezleştirilmiş cebir* denir.

8.2.3. Yardımcı Teorem: *A* bir zayıf Wiener olan bir Banach cebri ve ApA , A'da yoğun olacak şekilde $p \in M(A)$ bir eşgüçlü (idempotent) olsun. Bu durumda pAp zayıf Wienerdir.

Kanıt: $J \subset pAp$, $J \neq pAp$ bir kapalı ideal olsun. I, J ile üretilen *A*'nın kapalı bir ideali olsun.

$$I_0 = J + AJ + JA + AJA \quad , \qquad I_0^{-} = hull\left(ker I_0\right) \qquad \textbf{(8.15)}$$

$I=I_0^-$ ve $p\,I\,p\subset I$ dur. Bunun anlamı $I\subset A$ ve $I\neq A$ dır. A zayıf Wiener olduğundan $I\subset P$ olacak şekilde bir pirimitif ideal vardır. $Q=pAp\cap p$ alalım. $Q:=pAp$ olduğunu düşünürsek, $\left(ApA\right)^2\subset P$ ve primitif olduğundan $ApA\subset P$ olur. A'da ApA'nın yoğun olmasından A=P elde edilir. Bu ise çelişkidir. π, bir E lineer uzayı üzerinde A'nın bir indirgenemez temsili (represantation) olsun. A, M(A)'da bir ideal olduğundan, π'yi E üzeinde M(A)'nın bir indirgeme tersine kanonik olarak genişletebiliriz, bunu yine π ile gösterelim. $pAp\not\subset p$ olmadığından $\pi(p)\neq 0$ dır.

$x\in\pi(p)E/\{0\}$ alalım, bu durumda

$$\pi(pAp)x\equiv\pi(pA)x=\pi(p)\,\pi(A)x=\pi(p)E \tag{8.16}$$

ve sonuçta $(\pi|_{pAp},\pi(p)E)$, pAp'nin bir indirgenemez temsilidir ve Q

primitifdir. □

G yerel kompakt grup olsun. G, A üzerinde izometrik *-otomorfizm grubu olarak hareket etmek üzere A, izometrik involüsyonlu bir Banach*-cebri olsun. $x\in G$ ile belirlenen otomorfizmi $A\ni a\to a^x$ olarak yazalım. $L^1(G,A)$ Banach uzayı

$$(f*g)(x):=\int_G f(xy)^{y^{-1}}\,g\left(y^{-1}\right)dy \tag{8.17}$$

ve

$$f^*(x):=\Delta_G(x)^{-1}\left(f\left(x^{-1}\right)^x\right)^* \qquad f,g\in L^1(G,A),\ x\in G \tag{8.18}$$

ile izometrik involüsyonlu bir Banach*-cebri oluşturur. Burada dx Haar ölçüsü ve Δ_G, G üzerinde modüler fonksiyondur.

G ve H yerel kompakt gruplar olsun. G, H üzerinde sürekli ve otomorfisel olarak hareket etsin. Yani, öyle bir sürekli $G\times H\to H$, $(g,x)\to xg$ tasviri vardır ki

$$(xy)^g=x^g y^g\ ,\ \left(x^g\right)^h=x^{gh} \tag{8.19}$$

ve $x^{-1}=x$ dir. Her $g\in G$, için dx^g bir Haar ölçüsüdür. Bu yüzden

$$dx^g=\Delta_{G,H}(g)dx \qquad \textbf{(8.20)}$$

olacak şekilde bir $\Delta_{G,H}(g)$ pozitif reel sayısı vardır. $f\in C_0(H)$ ve $h\in H$ için f_h ve f^h aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f^h(x):=f(hx) \text{ ve } f_h=f(xh) \quad x\in H \qquad \textbf{(8.21)}$$

Şimdi $C_0(H)$'ın aşağıdaki özellikleri sağlayan Q alt cebrini alalım.

i) Q, $\|q\|_\infty\le|q|=|q^*|$ olacak şekilde $|\cdot|$ normu ile bir Banach cebri olmak üzere $C_0(H)$'in bir *-altcebridir.

ii) $q\in Q$ ve h için, $q^h\in Q$ ve $|q^h|=|q|$ dir.

iii) $q\in Q$ için, $H\ni h\to q^h$ tasviri süreklidir.

iv) Q'da kompakt destekli fonksiyonlar bir Q_0 yoğun alt cebir oluşturur.

v) I_H'ın her U komşuluğu için

a) $u\not\equiv 0$ ve $\text{supp}(u)\subset U$

b) $\forall h\in H$ için $U_n\in Q$

c) $H\ni h\to U_n$ tasvir süreklidir.

şartlarını sağlıyan bir $u\in Q$ Örneğin;

$C_0(H)$ bu şartları sağlar. Eğer H abelyen ise Q'yu

$$Q=A(H)\cong L^1(A) \qquad \textbf{(8.22)}$$

olarak seçebiliriz.Yukarıda tanımlanan Q'da, $u\in Q$ ve $g\in G$ için

$$(U\circ g)(x):=u\left(x^{g^{-1}}\right) \quad , \quad x\in H \qquad \textbf{(8.23)}$$

tanımlayalım. Ayrıca

vi) Her $g\in G$ için $Q\ni q\to q\circ g$ tasviri, Q'nun izometrik izomorfizmi olsun.

vii) Her $g \in G$ için $G \ni g \to q \circ g$ tasviri süreklidir.

şartlarını ele alalım. Bu durumda $L^1(H, Q)$ dan söz edebilir.

$f \in L^1(H, Q)$ ve $g \in G$ için

$$f^g(x) := \Delta_{G,H}(g)^{-1} f\left(x^{g^{-1}}\right) \circ g \qquad x \in H \tag{8.24}$$

olsun. Buna göre her $g \in G$ için $L^1(H, Q) \ni f \to f^g$ bir izometrik *-izomorfizmdir ve $L^1(G, L^1(H, Q))$ söz edilir.

8.2.4. Teorem: *G,H* ve *Q* yukarıdaki şekilde verilsin. $A := L^1(H, Q)$ ve $\Delta_{G,H} \neq 1$ olsun. Bu durumda $L^1(G, A)$ zayıf Wiener değildir.

$$G_{4,9}(0) := \left\{ \begin{bmatrix} e^t & x & e^t z \\ 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad t, x, y\, z \in \mathbb{R} \right\} \tag{8.25}$$

olarak tanımlansın. $G_{4,9}(0)$ grubunu tanımlamanın diğer bir yolu aşağıdaki gibidir. Heisenberg grubu,

$$H_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x, y\, z \in \mathbb{R} \right\} \tag{8.26}$$

şeklinde tanımlanır. H_1'in grup otomorfizmlerini $U(H_1)$ ile gösterelim ve $\phi : \mathbb{R} \to U(H_1)$ tasvirini

$$a(t)\left(\begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) := \left(\begin{bmatrix} 1 & e_x^{-t} & z \\ 0 & 1 & e^t y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \tag{8.27}$$

olarak tanımlayalım. $G_{4,9}(0)$, $H_1 \times_\phi \mathbb{R}$ yarı çarpımı olarak tanımlayabiliriz. Özel olarak $G_{4,9}(0)$, H_1 nilpotent grubunun bir abelyen genişlemesidir. Bu yüzden çözülebilirdir (solvable) ve bundan dolayıda amenabledır.

durumda $L^1(G, A)$ zayıf Wiener değildir.

8.2.5. Sonuç: $G_{4,9}(0)$ zayıf Wiener değildir.

Kanıt: $L^1(G_{4,9}(0))$ ve $L^1(\mathbb{R}_1 L^1(H_1))$ tanılayalım. $f \in L^1(H_1)$ için

$$\overset{\bullet}{f}(x,\varsigma) := \int f(x,y,z) e^{-i(\varsigma y+z)} dydz \tag{8.28}$$

olarak tanımlayalım. $Q := A(\mathbb{R})$ ve $A := L^1(\mathbb{R},Q)$ tanımlanırsa $f \to \overset{\bullet}{f}$ tasviri $L^1(G_{4,9}(0))$dan $L^1(\mathbb{R},A)$ üzerine bir epimorfizm üretir. Eğer $L^1(G_{4,9}(0))$ zayıf Wiener ise yardımcı teoreme göre $L^1(\mathbb{R},A)$da zayıf Wienerdir. Burada $\mathbb{R}$ üzerine $\mathbb{R}$'nin hareketi $(t,x) \to e^{-t}x$ olarak verilir. Sonuçta $\Delta_{\mathbb{R},\mathbb{R}}(t) = e^{-1} \not\equiv 1$. Yukarıdaki teoremden $L^1(\mathbb{R},A)$ zayıf Wiener değildir. Yani $G_{4,9}(0)$ zayıf Wiener değildir. □

8.2.6. Teorem: Zayıf Wiener olmayan, amenable yerel kompakt bir grup varsa amenable, radikal Banach cebirdir.

Kanıt: *G* amenable, zayıf Wiener olmayan bir yerel kompakt grup olsun. *G*, zayıf Wiener olmadığından $L^1(G)$'nin $PrimL^1(G)$'de hull'u boş olan bir kapalı öz ideali J vardır. Bu yüzden $R := L^1(G)/J$ bir radikal Banach cebridir. Bu amenable Banach cebrin bölümü olduğundan da amenabledır.

Buna göre $L^1(\mathbb{R},A)$ bir amenable, radikal Banach cebirdir.

8.3. Değişmeli Amenable Radikal Banach Cebirleri

Şimdi abelyen amenable, radikal Banach cebire bir örnek verelim. Bu cebri inşa etmek, tekniği zor olsa bile fikri o kadar zor değildir.

Her Banach *A*-bimodül *X*'ler için

$$H^1(A,X^*) = \{0\} \tag{8.29}$$

ise *A* Banach cebrine amenable denir. Yani *A*'dan bir dual Banach *A*-bimodül X^*'e her sürekli türev inner ise *A*'ya amenable denir. Amenable bir karakterizasyonuna göre *A*'nın yaklaşık köşegen (approximate diagonal) olması amenable olmasını gerektiriyor. Yani her $a \in A$ için komütatör $[a, \Delta_n] \to 0$ olacak şekilde projektif tensör çarpımında bir sınırlı net (Δ_n) ve $\pi : A \hat{\otimes} A \to A$ çarpım tasviri ise $\pi(A_n) a \to a$ dır.

Bu bölümde Banach cebirlerinde amenable kavramına denk olan bu tanımı kullanılacaktır.

Değişmeli amenable radikal Banach cebri (DARB) inşası için normu en fazla 1 olan Δ_n köşegen elemanları kullanılacaktır. *A*, elemanlarının normları 1 ile sınırlı bir yaklaşık köşegene sahip ise A , bir metrik yaklaşık köşegene sahiptir denir. Her elementi nilpotent olan sonlu boyutlu değişmeli Banach cebri kısaca "Sonlu Boyutlu, Nilpotent Değişmeli" "*SBND*" ile ifade edilecektir. SBND cebrinde öyle bir δ vardır ki her $x \in A$ için $x^d = 0$ dır. Bu özelliği sağlayan en küçük *d* sayısına *A*'nın derecesi denir.

8.3.1. Tanım: *B* bir Banach cebri ve $A \subset B$ bir alt cebir olsun. *A* için, δ sabiti ile bir *metrik yaklaşık birimi*, her $a \in A$ için

$$\|u\| \leq 1 \text{ ve } \|ua - a\| \leq \delta \|a\| \qquad \textbf{(8.30)}$$

şartlarını sağlayan bir $a \in B$ elemanına denir.

8.3.2. Yardımcı Teorem: Her SBND cebri *A* ve her $\delta > 0$ için δ sabiti ile *A* için bir metrik yaklaşık birimi içeren , ayrıca SBND cebri olan $B \supset A$ genişlemesi vardır.

Kanıt: Loy, Read, Runde ve Willis'in [19] makalesinde yardımcı teorem 2.2 ve yardımcı tensör 2.4 den elde edilir.

8.3.3. Tanım: *A* bir SBND cebri ve $\|u\| \leq 1$ olmak üzere $u, a \in A$ olsun. Eğer, $\pi : A \hat{\otimes} A \to A$ doğal çarpım tasviri olmak üzere,

$$\pi(\Delta) = u \;,\; \|\Delta\| \leq 1 \text{ ve } \|[a, \Delta]\| \leq \varsigma \|a\| \quad (\varsigma \text{ sabit}) \qquad \textbf{(8.31)}$$

ise *A*'da a için $\Delta \in A \hat{\otimes} A$ elemanına bir *kuvvetli metrik yaklaşık komütant (commutant)* denir.

8.3.4. Tanım: Eğer η bağımlı olarak büyük ve $\varsigma>0$ yeterince küçük ve $\pi(\Delta)=u$ $\|\Delta\|\leq 1$ ve bir $a\in A$ için

$$\|y-a\|\leq \eta\|a\| \quad \text{ve} \quad \|[y,\Delta]\|\leq \varsigma\ \|a\| \qquad \textbf{(8.32)}$$

olacak şekilde bir $y\in A$ bulabiliyorsak Δ'ya u görüntüsü ve η,ς sabitleri ile birlikte a için bir *zayıf metrik yaklaşık komütant* denir.

8.3.5. Yardımcı Teorem: A bir SBND cebri ve $u\in A$, $\|u\|\leq 1$ olsun. Bu durumda herhangi $a\in A$, $\varsigma>0$ *ve* $\eta\in\left[\frac{9}{10},1\right]$ için $B\widehat{\otimes}B$, u görüntüsü η,ς sabitleri ile birlikte a için bir zayıf metrik yaklaşık komütant Δ'yı içerecek şekilde A'yı içeren bir SBND cebri B vardır.

Kanıt: Verilen A cebrinin boyutu n veya A'nın derecesi d'den büyük N alalım. A'ya N tane $(y_i)_{i=1}^{N}$ üreteç ekleyerek $A_1[y_1\ldots,y_N]$ genişletilmiş cebrini düşünelim. Sabit katsayılar A'da olacak şekilde katsayıları A_1'de olan y sembollü polinomları içeren $A[y]$ cebrini ele alalım.

$$<y^N>=\{y^N q(y): q\in A_1[y]\} \qquad \textbf{(8.33)}$$

ideali olmak üzere,

$$B=A[y]/<y^N> \qquad \textbf{(8.34)}$$

uygun bölümünü alarak istediğimiz Δ'yi elde edeceğiz.

$\prod_{j=1}^{N} y_i^{r_i}$ genel çarpımını y^r ve $\sum_{i=1}^{N} r_i$ toplamını $|r|$ ile gösterelim. Yeterince büyük $|r|$'ler için $y^r=0$ olacak şekilde bölümü seçeceğiz. Gerçekten,

$$|r|\geq N^2 d \qquad \textbf{(8.35)}$$

için bu doğrudur. Görüntü vektörü $u\in A$ için (öyleki $\pi(\Delta)=u$ olmalı)

$$\prod_{i=1}^{N} y_i^N=u \qquad \textbf{(8.36)}$$

yani 1, $(1,1\ ,\ldots,1)\in(Z^+)^N$ vektörünü gösteriyorsa $y^{N1}=u$ dir.

I_1 , $y^{N1}-u$ tarafından üretilen ideal ve I_0, $\left\{y^r : \left|r\right| \geq N^2 d\right\}$ tarafından üretilen ideal ve $I = I_0 + I$ olmak üzere $B_1 = A_1\left[y\right]/I$ bölüm uzayını düşünelim. *B* cebri ise *q*'nun sabit katsayıları *A*'da olacak şekilde $q\left(y\right)+I$ polinomlarının ideali olacaktır.

$A_1\left[y\right]$ üzerinde başlangıç normu

$$\left\|\left\|\sum_r a_r y^r\right\|\right\| = \sum \left\|a_r\right\|_{A_1} \quad \textbf{(8.37)}$$

şartını sağlayan $\left\|\left\|\cdot\right\|\right\|$ normdur.

Verilen $\eta \in \left[\frac{9}{10}, 1\right]$ ve $a \in A$ için B_1 üzerinde $\left\|\cdot\right\|$ normunu aşağıdaki özellikleri sağlayan $A_1\left[y\right]/I$ bölüm cebrinde en geniş norm olacak şekilde tanımlayalım. Her $x \in A_1\left[y\right]$ için $\left\|x+I\right\| \leq \left\|\left\|x\right\|\right\|$ ve

$$\left\|\left(\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N} y_i\right) - a + I\right\| \leq \eta \quad \textbf{(8.38)}$$

şartları sağlasın. Yeterince büyük *N*'ler için *A*'nın izometrik olarak $\left(B, \left\|\cdot\right\|\right)$ içine gömüleceğini ve B'nin SBND cebri olduğunu gösterelim.

$\left\|y-a\right\| \leq \eta$ olacak şekilde $y = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N} y_i$ ve Δ

$$\left(N-1\right)^{-N} \sum_{1 \leq r \leq (N-1)1} y^r \otimes y^{N1-r} \in B \widehat{\otimes} B \quad \textbf{(8.39)}$$

elemanı olsun.

$$\Delta_i = \left(N-1\right)^{-N} \sum_{j=1}^{N-1} y_i^j \otimes y_i^{N-j} \quad \textbf{(8.40)}$$

olmak üzere $\Delta = \prod_{i=1}^{N} \Delta_i$ dir. Bu yüzden $\left\|y_i\right\| \leq 1$ olduğundan $\left\|\Delta_i\right\| \leq 1$ ve $\left\|\Delta\right\| \leq 1$ dir. Böylece,

$$\left\|\left[y, \Delta\right]\right\| \leq \frac{1}{N-1} \quad \textbf{(8.41)}$$

olduğu görülür. Bu verilen $\varsigma > 0$ sabitinden daha küçüktür, *N*'yi $N > 1 + \frac{1}{\varsigma}$ olarak seçelim. Bu durumda Δ verilen $a \in A$ için bir zayıf metrik komütanttır. Görüntüsü

$$\pi\left(\Delta\right) = y^{N1} = u \pmod{I} \quad \textbf{(8.42)}$$

$x \in A$ için $\|x\|_B \leq \|x\|_A$ bilindiğinden herhangi 1 normlu $a^* \in A^*$ lineer fonksiyoneli normu 1 olan bir genişlemesini $\left(B, \|\cdot\|_B\right)$ ye yapabiliriz. Önce a^*, $a^*(1)=0$ tanımlayarak A_1'e genişletelim. Genişlemeyi $\overline{a}^*: B_1 \rightarrow \mathbb{C}$ aşağıdaki özelliği sağlayacak şekilde tanımlayalım. Her $r \in \left(\mathbb{Z}^+\right)^N$ indis kümesi ve her $x \in A_1$ için

$$\overline{a}^*\left(y^r x\right) = \begin{cases} a^*\left(u^k a^l x\right) & , \quad r = kN1 + s, k \in [0,d) \ |s| = l \in [0,d) \\ 0 & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases} \quad \textbf{(8.43)}$$

$N^2 \geq d$ sağlandığından $\overline{a}^*$ sıfır değildir. Böylece $\overline{a}^*$, $A_1[y] \rightarrow \mathbb{C}$ iyi tanımlanmış bir tasvirdir. $N > d$ için $\overline{a}^*$ fonksiyoneldir. I_0 ve I idealinin sıfırlayıcısıdır. (annilates)

Şimdi verilen $\|a^*\| \leq 1$ için $\|\overline{a}^*\| \leq 1$ olduğunu gösterelim.

(8.38) denkleminden, B_1 üzerinde $\|\cdot\|$ normunun, $\|\cdot\| \leq \||\cdot\||$ ve

$$\left\| \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} y_i - a \right\| \leq \eta \quad \textbf{(8.44)}$$

şartlarını sağlayan bölüm cebri üzerinde en büyük norm olduğunu görebiliriz. (8.37) verilen $\||\cdot\||$ normuna göre

$$\|x\| = inf \left\{ \sum_{k,r} \|b_{k,r}\|_{A_1} : x = \sum_{k,r} \eta^{-k} \left(\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} y_i - a \right)^k y^r b_{k,r} \, mod \, I \right\}. \quad \textbf{(8.45)}$$

$k \geq N^2 d + d - 1$ değerleri için

$$\left(\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} y_j - a \right)^k = 0 \quad (mod\, I) \quad \textbf{(8.46)}$$

olduğundan her $x \in B_1$ için

$$\|x\| \geq \eta^{N^2 d + d - 1} \||x\|| \quad \text{dir.} \quad \textbf{(8.47)}$$

$\eta \geq \dfrac{9}{10}$ **ve** $k \geq \dfrac{d \log 4}{\log 6/5}$ için (8.50) dir.

$$k \leq \frac{d \log 4}{\log 6/5} \quad \text{ve} \quad r = Nt1 + r' \quad \textbf{(8.48)}$$

(burada $0 \le t < d$ ve $r' \ge z$, $|r'| < d$) ile $k \le \frac{d \log 4}{\log 6/5}$ ve

$$r = Nt1 + r^1 \left(0 \le t < d\,,\, r' \ge z_1 |r'| < d\,,\, r' \ge z\,,\, |r^1| < d \right) \qquad \textbf{(8.49)}$$

dışındaki r'ler için

$$\left| \bar{a}^* \left(\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} y_i - a \right)^k y^r\, b \right| \le \eta^k \qquad \textbf{(8.50)}$$

olduğundan $\| \bar{a}^* \| \le 1$ dir. (Runde s:78-79). Yani *A*, *B*'ye izometrik olarak gömülür. □

Aşağıdaki yardımcı teoremde kullanılacak bir özelliği gösterelim. Eğer $a \in A$ ve $\Delta_1, \Delta_2 \in A \widehat{\otimes} A$ ise

$$\left[a, \Delta_1 \Delta_2 \right] = \left[a, \Delta_1 \right] \Delta_2 = \left[a, \Delta_2 \right] \Delta_1 \qquad \textbf{(8.51)}$$

dir. Bu yönden Δ_1 ve Δ_2, görüntüsü u_1 ve u_2 ve η_1, η_2 , ς_1, ς_2 sabitleriyle birlikte a_1, a_2 için zayıf metrik yaklaşık komütanttır. Dolayısıyla $\Delta_1 \Delta_2$, görüntüsü $u_1 u_2$ ve $maks(\eta_1 \eta_2)$, $maks(\varsigma_1, \varsigma_2)$ sabitleriyle birlikte a_1 ve a_2 için zayıf metrik yaklaşık komütanttır.

8.3.6. Yardımcı Teorem: $n \in \mathbb{N}$, $\eta \in \left[\frac{9}{10}, 1 \right]$, her $\varsigma > 0$ ve $\|u\| = \|x\| = 1$ olmak üzere her $x, u \in A$, her SBND cebri için, görüntüsü u^n ve n^n ve $n\varsigma$ sabitleriyle *x* için bir zayıf metrik yaklaşık komütant Δ_n 'yi içeren bir $B_n \supset A$ SBND cebri vardır.

Kanıt: Kanıtı tümevarımla yapalım. *n*=1 için sonuç yukarıdaki yardımcı teoremdir. Tümevarım hipotezine göre koşulları sağlayan B_n genişlemesi var ve biz uygun bir metrik yaklaşık komütant Δ_{n+1}'i içeren, uygun $B_{n+1} \supset B_n$ genişlemesini bulmak istiyoruz. Hipoteze göre $\| [y, \Delta_n] \| \le n\varsigma$ olacak şekilde $\| x - y \| < \eta^n$ olmak üzere bir $y \in B_n$ vardır. $x' = \frac{x-y}{\eta^n}$ vektörünün normu en fazla 1 olduğundan yukarıdaki yardımcı teoreme göre $\|\Delta\|\leq 1$, $\pi(\Delta)=u$ ve $\|[z,\Delta]\|\leq\varsigma$ olacak şekilde bir metrik yaklaşık komütant Δ ve

$$\|z-(x-y)/\eta^{n}\|\leq\eta \tag{8.52}$$

olmak üzere bir z elemanını içeren bir $B_{\eta+1}\supset B_n$ genişlemesi vardır.

$$\Delta_{n+1}=\Delta\cdot\Delta_n\in B_{n+1}\widehat{\otimes}B_{n+1} \tag{8.53}$$

yazalım. Bu durumda,

$$\pi(\Delta_{n+1})=u^{n+1}\ ,\ \|\Delta_{n+1}\|\leq 1 \quad \text{ve} \quad \|[z,\Delta_{n+1}]\|\leq\varsigma \tag{8.54}$$

dir. $y'=y+\eta^{n}z$ alarak,

$$\|y'-x1\|=\|y-x-\eta^{n}z\|\leq\eta^{n+1} \tag{8.55}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\|[y',\Delta_{n+1}]\|=\|[y',\Delta\cdot\Delta_n]\|\leq\|\Delta\|\cdot\|[y,\Delta_n]\|+\|\Delta_n\|\cdot\|[\Delta,\eta^{n}z]\|\leq(n+1)\varsigma \tag{8.56}$$

olduğu görülür. Böylece Δ_{n+1}'ın gerekli olan bir metrik yaklaşık komütant olduğu gösterilmiş olur. □

8.3.7. Yardımcı Teorem: A bir SBND cebir ve $\delta>0$ ise δ sabitiyle a için bir kuvvetli metrik yaklaşık kommutant Δ olmak üzere her $a\in A$ için $\pi(\Delta)=u$ olacak şekilde bir $\Delta\in B\widehat{\otimes}B$ ve δ sabitiyle A için bir metrik yaklaşık u'yu içeren A'nın $B\supset A$ genişlemesi olan bir SBND cebri vardır.

Kanıt: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ A'nın bir bazı olsun. A'nın her x elemanını $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i$ yazdığımızda

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\leq K\|x\| \tag{8.57}$$

olacak şekilde bulabileceğimiz bir K sabitini alalım. Herhangi $\eta\in\left[\frac{9}{10},1\right)$ için

$$2\eta^{n}K<\frac{\delta}{2} \tag{8.58}$$

olacak şekilde n'yi seçelim. ς 'yi de

$$n\varsigma K < \frac{\delta}{2} \quad \textbf{(8.59)}$$

olacak şekilde seçelim. Yardımcı teorem (1.2)'yi kullanarak $\delta' = \frac{\delta}{n^2}$ sabitiyle A için bir metrik yaklaşık birim u_0'ı içeren $B_0 \supset A$ genişlemesi bulabiliriz. Yukarıdaki yardımcı teoremden de $\eta^n, \eta\varsigma$ sabitleri ve u_0^n görüntüde a_1 için bir zayıf metrik yaklaşık kommutant Δ_1'e sahip $B_1 \supset B_0$ genişlemesini bulabiliriz.

Benzer şekilde $\eta^n, \eta\varsigma$ sabitleri ve u_0^n görüntüsüyle a_2 için bir zayıf metrik yaklaşık komütant A_2'ye sahip $B_2 \supset B_1$ genişlemesini bulabiliriz. Böyle devam ederek $\eta^n, \eta\varsigma$ sabitleri ve u_0^n görüntüsüyle her a_i , $i = 1,\ldots,n$ için zayıf metrik yaklaşık komütantlar Δ_i'lara sahip $B_n \supset B_1$ genişlemesini bulalım.

$\Delta = \prod_{i=1}^{n} \Delta_i$ çarpımı için $\|\Delta\| \le 1$ ve $\pi(\Delta) u_0^{n^2} = u$ olduğunu görebiliriz. Burada u_0, $\delta' = \frac{\delta}{n^2}$ sabitiyle A için bir metrik yaklaşık birimdir. u'da δ olmayan A için bir metrik yaklaşık birimdir. Her $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in A$ için

$$[x, \Delta] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_i, \Delta_i] \prod_{j \ne i} \Delta_j \quad \textbf{(8.60)}$$

olduğundan

$$\|[x, \Delta]\| \le \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, maks \|[a_i, \Delta_1]\| \le K \|x\| \, maks \|[a_i, \Delta_i]\| \quad \textbf{(8.61)}$$

dir. Her i için $\|[y_i, \Delta_i]\| \le \eta\varsigma$ ve $\|a_i - y_i\| < \eta^n$ olacak şekilde bir $y_i \in B$ vardır. Açıktır ki

$$\|[a_i - y_i, \Delta_i]\| \le 2\|a_i - y_i\| \cdot \|\Delta_i\| \le 2\eta^n \quad \textbf{(8.62)}$$

ve böylece

$$maks \|[a_i, \Delta_i]\| \le 2\eta^n + n\varsigma \quad \textbf{(8.63)}$$

(8.58) ve (8.59)'dan

$$\|[x, \Delta]\| \le K \|x\| \left(2\eta^n + n\varsigma\right) \le \delta \|x\| \quad \textbf{(8.64)}$$

Bu yüzden Δ, δ, δ sabitleri ve u görüntüsü ile her $x \in A$ için A'ya göre bir kuvvetli metrik köşegen elemandır. Böylece kanıt tamamlanır. □

8.3.8. Teorem: $\left(A_i\right)_{i=1}^{\infty}$, δ_i sabitiyle her i için A_i'nin köşegen genişlemesi A_{i+1} olacak şekilde SBND cebirlerinin bir dizisi ve $\delta_i \to 0$ olsun. Burada $A_i \subset A_{i+1}$ şartını sağlıyor. A , $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ birleşiminin tamlaştırılmışı olsun. Bu durumda A bir değişmeli amenable radikal Banach cebridir.

Kanıt: $\Delta_{n+1} \in A_{n+1} \widehat{\otimes} A_{n+1}$, δ_n, δ_n sabitleriyle bütün $x \in A_n$ için A'ya göre bir kuvvetli metrik köşegen eleman olsun. $x \in A_m$ ise $\left[x, \Delta_n\right] \to 0$ ve $\pi\left(\Delta_n\right)x \to x$ olduğundan ve böyle elemanlar A'da yoğun olduğundan Δ_n dizisi düzgün sınırlıdır, dolayısıyla $\Delta_n \in A \widehat{\otimes} A$, A için bir yaklaşık köşegendir. Dolayısıyla A amenabledir.

A, nilpotent elemanların bir yoğun kümesine sahip ve değişmeli olduğundan radikaldir. Sonuç olarak A değişmeli, amenable, radikal Banach cebridir.

KAYNAKLAR

[1] **Anantharaman-Delaroche, C., Renault, J.,** 2000. *Amenable Groupoids*, Geneve, L'Enseignement Mathematique.

[2] **Chou, C.,**1976 :The exact cardinality of the set of invariant means on a group, *Proc. Amer. Math. Soc.*55 103/106

[3] **Curtis, P.C., Jr., Loy, R.J.,**1989: The Structure of Amenable Banach Algebras, *J. London Mth. Soc.* 2, 40 , 89-104.

[4] **Dales, H. G. , Aiena P., Eschmeıer, J., Laursen K.& Wıllıs G.,**2003. *Introduction to Banach Algebras, Operators and Harmonic Analysis,* London Mathematical Society.

[5] **Dales, H. G.**, 2001. *Banach Algebras and Automatic Continuity*, Oxford University Press.

[6] **Day, M. M.** 1957: Amenable Semigroups, *Illionis J. Math.*, Vol.**1** ,509-544.

[7] **Day, M. M.,** 1949: Means on Semigroups and Groups, *Dull. Amer. Math. Soc.* 55, 1054-1055.

[8] **Day, M. M.,** 1950: Means for the Bounded Functions and Ergodicity of the Bounded Representations of Semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. **69** 276-291.

[9] **Day, M. M.,**1950: Amenable Groups, Abstract 40, *Dull. Amer. Math.. Soc.*46.

[10] **Day, M. M.,** 1957: Amenable Semigroups, *Illinois J. Math.*, Vol.**1** ,509-544.

[11] **Day, M. M.,**1964:Convolutions,Means and Spectra, *Illionis J.Math.*, 8,100-111

[12] **Folland, G. B.**,1995.*A course in Abstract Harmonic Analysis*,CRC Press LLC.

[13] **Folner, E.,**1955: On Groups with Full Banach Mean Values*, Math. Scund.* Vol **3**, 243-254.

[14] **Gronberk, N.,**1951: Amenability and weak amenability of tensor algebras and algebras of nuclear operators, *J. Austral. Math. Soc.* 51, 483-488.

[15] **Haagerup, U.,** 1983:All Nuclear C^*-algebras are Amenable, *Inventions Math.*, Springer Verlag ,74,305-19.

[16] **Helemskii, A.,**1989. *The Homology of Banach and Topolocical Algebras.* Dordrecht, Kluwer.

[17] **Johnson, B. E.,**1972. *Cohomology in Banach Algebras*, Memoirs of the American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, Volume **127**, ISSN 0065-9266.

[18] **Lin, Huaxin**,1956. *An Introduction to Classification of Amenable C^*-algebras*, Singapore, River Edge, NJ, World Scientific C2001.

[19] **Loy, R. J., Read C. J., Runde, V., Willis, G. A.,**2000: Amenable and Weakly Amenable Banach Algebras With Compact Multiplication, *J. Funct. Anal.* 171, no **1**, 78-114.

[20] **Paterson,A. L. T.,**1988. *Amenability*, Mathematical Surveys and Monographs Volume **29**, American Mathematical Society.

[21] **Read, C. J.**, 2000: Commutative , radical amenable Banach algebras, *Studia Mathematica* 140 (3).

[22] **Reither, H., Stegeman, J.D.,** 2000. *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups.* Oxford Science Publications.

[23] **Rickart, C. E.** ,1960. *General Theory of Banach Algebras*, The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Company, Inc.

[24] **Rosen,W.G.,**1956:On Invariant Means Over Compact Semigroups, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol **7**, No. 6, pp.1076-1082.

[25] **Runde, V.,** 2002. *Lectures on Amenability*, Springer Verlag.

[26] **Runde, V.,**1998: The structure of contractible and amenable Banach algebras, *in E. Albrecht and M. Mathiev (eds.), Banach Algebras, Gruyter, Berlin,* 415-430.

[27] **Ryan, R. A.,** 2002. *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Monographs in Mathematics, Springer Verlag, London, New York.

[28] **Silverren, R. J.,**1956: Means on Semigroups and the Hahn-Banach Extension Property, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol **83,** 222-237.

[29] **Von Neumann, J.,**1929: Zur Allegemeinon Theorie des *Masses Fund. Math.* 13, 73-116.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad:	**Didem EROĞLU**
Doğum Yeri ve Tarihi:	**Manisa 19/05/1977**
Adres:	**Gülbahar Mah. Biberiye Sok. No: 46 D:7**
	Mecidiyeköy - İSTANBUL
Lisans Üniversite:	**İstanbul Teknik Üniversitesi**
	Matematik Mühendisliği