

SABİT DERİNLİKLİ BASEN ÜZERİNDE SONLU UZUNLUKTAKİ TSUNAMİ YAYILIMININ ANALİTİK MODELLENMESİ

Baran Aydın ve Utku Kânoğlu

Mühendislik Bilimleri Bölümü
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
06531 Ankara

Öz

Sonlu uzunluktaki iki uzaysal boyuta sahip uzun dalganın (tsunaminin) sabit derinlikli bir basen üzerinde yayılımı analitik olarak modellenmiştir. Analitik model, kesiti Gauss dalgası olan sonlu uzunluktaki dalgaya uygulanarak bu dalganın yayılım paterni elde edilmiştir. Geliştirilen analitik model literatürde var olan analitik modele göre daha genel bir çözüm olup, yaklaşım içermemektedir.

Abstract

Propagation of two-dimensional finite-crested long waves (tsunamis) over a constant depth basin is modeled analytically. Radiation of an initial wave having Gaussian cross section is analyzed with the proposed model. Unlike the analytical model exists in the literature, the analytical model proposed here is more general and does not involve approximation.

Giriş

26 Aralık 2004 tarihinde Hint Okyanusu'nda meydana gelen ve başta Endonezya olmak üzere Hint Okyanusu'na kıyısı olan bütün ülkeleri etkileyen tsunami felaketinde birçok insan hayatını kaybetmiş veya yerleşim yerlerini değiştirmek zorunda kalmıştır. Hint Okyanusu tsunamisi, sık meydana gelmemelerine karşın, tsunamilerin en tehlikeli doğal afetlerden biri olduğunu bir kere daha göstermiştir. Yaşanabilecek olası can kayıplarını ve ortaya çıkabilecek maddi hasarları asgari düzeye indirmenin yolu, tsunamilerin oluşum ve yayılım mekanizmalarını iyi anlamaktan geçmektedir.

Her ne kadar oluşan tsunamilerin belirli kıyı bölgelerini daha fazla etkileyeceği varsayılsa da, tsunami sonrası yapılan arazi çalışmalarında, tsunamilerden daha az etkileneceği düşünülen bölgelerin de oluşan dalgalardan zarar gördüğü gözlemlenmiştir. Tsunami sonucu oluşan dalgaların tsunami kaynağından uzaysal ve zamana bağlı yayılımı tsunaminin *yönelme eğilimi* olarak tanımlanır. Bu eğilim ilk olarak [1] tarafından tespit edilmiş ve yönelme eğilimi fonksiyonu tsunaminin kaynağı olan fayın boyu ve kırılma hızı kullanılarak tanımlanmıştır. Daha sonra, hareketli bir kaynaktan üç boyutlu yayılım paterni [2] tarafından doğrusal teori kullanılarak hesaplanmıştır. [2], ilaveten, tsunami enerjisinin temel olarak kırılan faya dik bir biçimde yayıldığını göstermiştir. Bu durumun bir örneği [3]'de sunulmuştur. Depremlerin oluşturduğu tsunamiler ile deniz tabanında meydana gelen toprak kaymaları sonucu oluşan tsunamilerin yönelme eğilimleri arasındaki farklar ise [4] tarafından ortaya konulmuştur.

Derinliği sabit bir basen üzerinde sonlu L uzunluğundaki bir kaynaktan yayılan tsunami dalgasının (Şekil 1) yönelme eğilimi [5] tarafından doğrusal sığ-su dalga denklemi kullanılarak analitik olarak modellenmiştir. Fakat, [5] tarafından geliştirilen çözümün eksikliği, çözüm yöntemi olarak önerilen Hankel integral dönüşümü nedeniyle problemin çözümünün eliptik integral ile ifade edilebilmesidir. Eliptik integraller tekil olduklarından, analitik çözüme ulaşabilmek için integralin Bessel fonksiyonları cinsinden yaklaşık bir fonksiyon ile ifade edilmesi zorunluluğu ortaya çıkmış, bu yaklaşık fonksiyon ise deneme-yenilme yöntemiyle bulunabilmiştir.

Aşağıda detayları sunulacak olan çalışmada sonlu uzunluktaki tsunami dalgasının sabit derinlikli basen üzerinde yayılması problemi doğrusal sığ-su dalga denklemi kullanılarak analitik olarak çözülmüştür. Önerilen çözüm yönteminin matematiksel olarak literatürde var olan analitik çözüme göre daha basit olduğu, yaklaşım içermediği ve genelleştirmeye uygun olduğu gösterilmiştir [6]. Bu yöntemle çok çeşitli ilk dalga profilleri için dalga yüksekliğini direkt integrasyonla elde etmek mümkündür. Özel olarak kesiti Gauss dalgası olan sonlu uzunluktaki ilk dalgalar sabit derinlikli basen üzerinde modellenmiş ve sonuçlar [5] ile karşılaştırılmıştır.

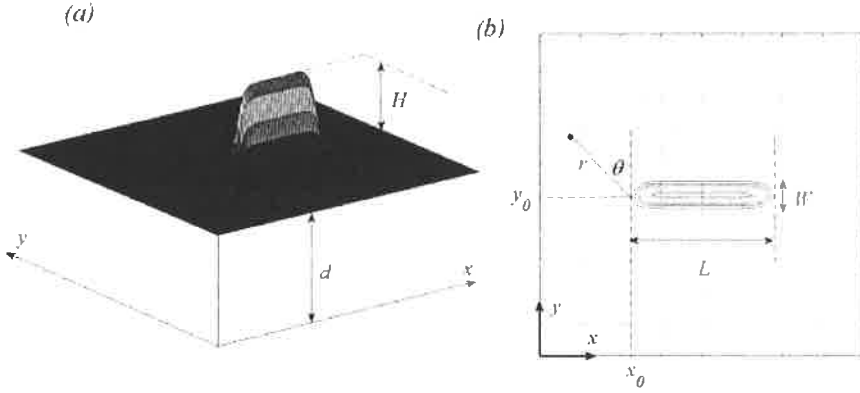
Matematiksel Analiz

Sabit derinlikli basen üzerindeki uzun dalga yayılımı problemi için iki boyutlu doğrusal sığ-su dalga denklemi aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\tilde{\eta}_{tt} - gd(\tilde{\eta}_{xx} + \tilde{\eta}_{yy}) = 0. \quad (1)$$

Denklemden $\tilde{\eta}$ dalga yüksekliğini, g yerçekimi ivmesini, d basen derinliğini, (\tilde{x}, \tilde{y}) uzay koordinatlarını ve \tilde{t} zamanı göstermektedir (Şekil 1). Değişkenleri boyutsuzlaştırmak için basen derinliği (d) kullanıldığında, boyutsuz değişkenler

$$(x, y, \eta) = \frac{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\eta})}{d}, \quad t = \tilde{t} \sqrt{\frac{g}{d}}, \quad (2)$$



Şekil 1. Sonlu uzunluktaki ilk dalganın (a) iki boyutta ve (b) üstten görünümü.

olarak verilir ve boyutsuz doğrusal sığ-su dalga denklemi

$$\eta_{tt} - (\eta_{xx} + \eta_{yy}) = 0, \quad (3)$$

şeklini alır. Sonlu uzunlukta ilk hızsız dalga profili (3) denkleminin çözümü için başlangıç koşulları olarak kabul edilebilir:

$$\eta(x, y, t = 0) = \eta_0(x, y), \quad \eta_t(x, y, t = 0) = 0. \quad (4)$$

Dolayısıyla, (3)-(4) problemi bir başlangıç-değer problemi olarak çözülecektir. Çözüm yöntemi olarak uzay değişkenleri üzerinde Fourier integral dönüşümü kullanılacaktır. Fourier dönüşüm çifti

$$\bar{\eta}(k, l, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x, y, t) e^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad \eta(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\eta}(k, l, t) e^{i(kx+ly)} dk dl, \quad (5a, b)$$

olarak tanımlanırsa (3) denklemi (5a) dönüşümünün uygulanmasıyla

$$\bar{\eta}_{tt} - (k^2 + l^2)\bar{\eta} = 0, \quad (6)$$

halini alır. Yine (5a) dönüşümü altında (4) başlangıç koşulları

$$\bar{\eta}(k, l, 0) = \bar{\eta}_0(k, l), \quad \bar{\eta}_t(k, l, 0) = 0, \quad (7)$$

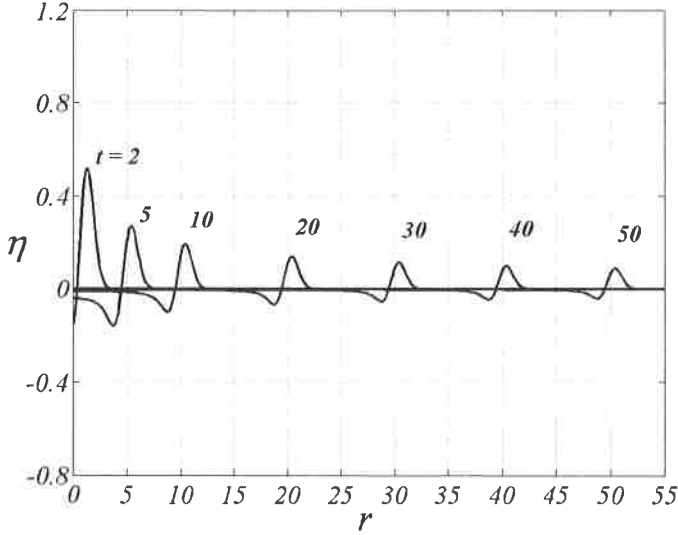
olarak ifade edilir. (6) denkleminin (7) başlangıç koşulları altındaki çözümü

$$\bar{\eta}(k, l, t) = \bar{\eta}_0(k, l) \cos t \sqrt{k^2 + l^2}, \quad (8)$$

olmaktadır. Bu çözüm ters Fourier dönüşümü (5b) kullanılarak fiziksel uzayda aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\eta}_0(k, l) \cos t \sqrt{k^2 + l^2} e^{i(kx+ly)} dk dl. \quad (9)$$

(9) eşitliğiyle verilen çözüm genel bir çözüm olup, (4) ile verilen ilk dalga profilinin Fourier dönüşümü elde edilebildiği sürece, çeşitli sonlu uzunluktaki ilk dalga profillerine uygulanabilir.



Şekil 2. $\eta_0(r, t=0) = 2e^{-r^2}$ ile tanımlanan Gauss dalgasının çeşitli t anlarındaki kesitleri. Bu eksenel-simetrik Gauss dalgasının özbenzeşlik özelliği $t > 5$ için görülebilmektedir.

Yukarıda formüle ettiğimiz başlangıç-değer problemi [5] tarafından farklı bir çözüm yöntemi ile çözülmüştür. [5], (1) denkleminde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ değişken değişimini uygulayarak eksenel-simetrik (“axisymmetric”) dalga problemi tanımlamıştır. Bu eksenel-simetrik dalga problemini çözmek için [5] tarafından önerilen çözüm yöntemi, daha önce [7] tarafından sığ-su dalgalarının sabit eğimli bir kumsala tırmanma hareketini modellemek için kullanılan

Hankel integral dönüşümüdür (Bu dönüşüm literatürde Fourier-Bessel dönüşümü adıyla da anılmaktadır). [5] bu yöntemi öncelikle eksenel-simetrik Gauss ilk dalgasına ($\eta_0(r, t=0) = 2e^{-r^2}$) uygulamış (Şekil 2), bu çözümden hareketle sonlu L uzunluğundaki ilk dalganın yayılımını modellemiştir. [5] tarafından geliştirilen çözümün detaylarını ilgili makaleye bırakarak, çözümün elde edilmesindeki zorluklara ve yukarıda geliştirdiğimiz çözümün bir alternatif olarak avantajlarına değinelim. Çözüm tekniği olarak Hankel dönüşümünün kullanılması, dalga yüksekliği $\eta(r, t)$ için elde edilen genel çözümün, [7]'de olduğu gibi, eliptik integralle elde edilmesine neden olmaktadır. Eliptik integrallerin tekil olmaları, analitik modelin tamamlanması için integranta daha *düzgün* bir başka fonksiyonla yaklaşılmasını gerektirmiştir. Bu yaklaşım ise eksenel-simetrik Gauss dalgası için yapılan çözümün özbenzeşlik ("*self-similarity*") özelliği kullanılarak deneme-yanılma yöntemiyle yapılmıştır. [5] tarafından verilen *analitik* çözümün deneme-yanılma yöntemi içermesi, bu yöntemin diğer ilk dalga profillerine uygulanması için bir engeldir. Buna karşılık, yukarıda geliştirilen çözümde ilk dalga profilinin Fourier dönüşümü elde edilebildiği sürece dalga yayılımını (9) denkleminin direkt integrasyonu ile elde etmek mümkündür. [6]'da bu çözüm yöntemiyle farklı kesitlere (örneğin, soliter veya N -dalga kesite) sahip ilk dalgaların yayılımı modellenmiştir.

Sonuçlar

Bu bölümde, [5]'de modellenen sonlu L uzunluğundaki ilk dalganın yayılımını yukarıda sunulan çözüm yöntemi ile elde edeceğiz. [5] tarafından ilk dalga profili Kartezyen koordinatlarda aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\eta_0(x, y) = [\text{erf}(x_0 + L - x) - \text{erf}(x_0 - x)]e^{-y^2}. \quad (10)$$

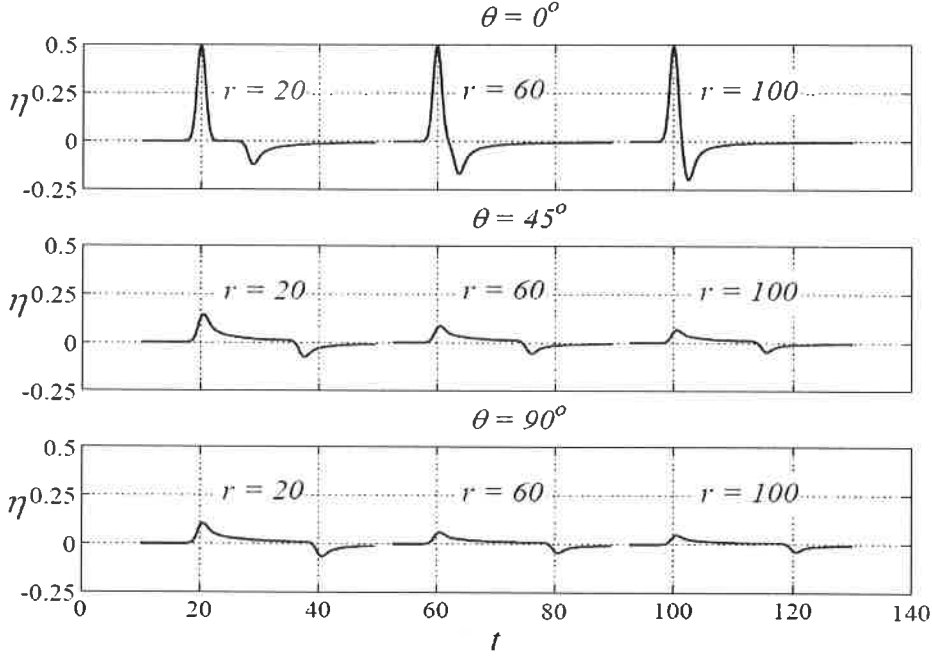
Bu tanımda, dalganın, ana yayılım eksenini olan y -ekseni kesiti Gauss dalgası, x -kesiti ise hata fonksiyonu (erf) olarak seçilmiştir (Referans koordinat sistemi için Şekil 1'e bakınız). (10) ilk dalgasının Fourier dönüşümü, x - ve y -kesitlerinin, $f(x) = \text{erf}(x_0 + L - x) - \text{erf}(x_0 - x)$ ve $g(y) = e^{-y^2}$, Fourier dönüşümleri kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\bar{\eta}(k, l) = i \frac{2\sqrt{\pi}}{k} e^{-(k^2 + l^2)/4} e^{-ikx_0} (e^{-ikL} - 1). \quad (11)$$

İlk dalga profilinin Fourier dönüşümü (9) denkleminde kullanılarak, istenen bir (x, y) noktasında ve/veya bir t zamanında dalga yüksekliği elde edilebilir.

(10) dalgasının çeşitli L dalga uzunlukları ve (r, θ) noktaları için zaman serileri Şekil 3 ve 4'te gösterilmiştir. Şekil 3'te $L = 20$ dalga uzunluğu için, dalganın uç noktasından ($x = x_0$), değişik θ açıları ve r uzaklıklarında dalga formları (zaman serileri) verilmiştir. Şekilde görüldüğü üzere, dalga yüksekliğinin en hızlı azaldığı yön $\theta = 90^\circ$, yani dalganın ana yayılım

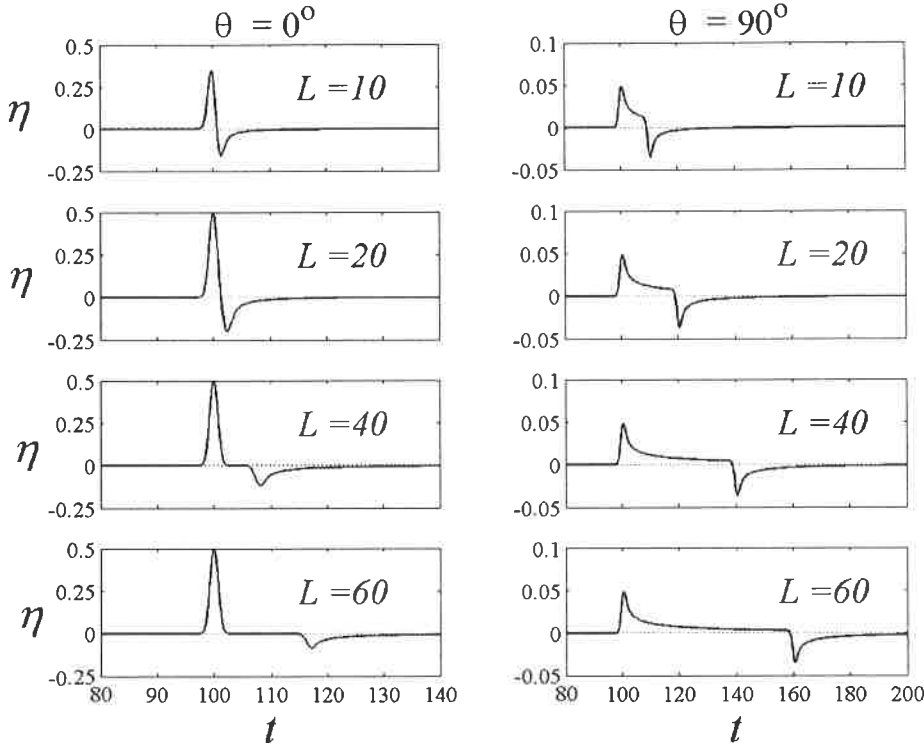
eksenine (y -eksenine) dik olan x -eksenidir. Diğer yandan, dalganın ana yayılım eksenini olan y -ekseni ($\theta = 0^\circ$) boyunca ise maksimum dalga yüksekliği değişmemektedir. Zaman serilerinde görülen pozitif ve negatif dalgalar arasındaki mesafe θ ile artmaktadır. $\theta = 90^\circ$ için bu mesafe yaklaşık L kadar olmaktadır (özbenzeşlik).



Şekil 3. (10) denkleminle verilen ilk dalganın $L = 20$ uzunluğu için çeşitli (r, θ) noktalarındaki zaman serileri ($x_0 = -L/2$).

Şekil 4'de ise dalga uzunluğu L 'nin maksimum dalga yüksekliğine etkisi gösterilmiştir. Bunun için (10) ilk dalgasının $r = 100$ noktasında, $\theta = 0^\circ$ ve $\theta = 90^\circ$ için, yani sırasıyla ilk dalgaya dik (y -ekseni) ve paralel (x -ekseni) yönlerdeki zaman serileri elde edilmiştir. İlk dalgaya paralel yönde ($\theta = 90^\circ$) maksimum dalga yüksekliği $L \geq 20$ için aynı kalmaktadır. $\theta = 0^\circ$ yönünde ise pozitif ve negatif dalga arasındaki mesafenin yaklaşık L kadar olduğu (özbenzeşlik) şekilden görülebilmektedir.

Her iki şekilde de (Şekil 3 ve 4) karşılaştırma yapabilmek amacıyla [5] makalesinde kullanılan parametreler seçilmiş ve sonuçların mükemmel uyum gösterdiği gözlenmiştir. Ayrıca, daha önce de belirtildiği üzere, bu çalışmada geliştirilen çözüm [5] makalesinde geliştirilen çözüme göre daha genel olup, değişik ilk dalga profillerine uygulanması mümkündür.



Şekil 4. (10) ilk dalgasının ($r=100, \theta=0^\circ$) ve ($r=100, \theta=90^\circ$) noktalarındaki zaman serilerinin L dalga uzunluğu ile değişimi ($x_0 = 0$).

Kaynakça

- [1] Ben-Menahem, A., "Radiation of seismic surface waves from finite moving sources" Bull. Seismol. Soc. Am. 51 401-435, 1961.
- [2] Ben-Menahem, A. and M. Rosenman, "Amplitude patterns of tsunami waves from submarine earthquakes" J. Geophys. Res. 77 3097-3128, 1972.
- [3] Synolakis, C. E. and E. N. Bernard, "Tsunami science before and beyond Boxing Day 2004" Phil. Trans. R. Soc. A 364 2231-2265, 2006.
- [4] Okal, E.A., "Normal mode energetics for far-field tsunamis generated by dislocations and landslides" Pure Appl. Geophys. 160 2189-2221, 2003.

- [5] Carrier, G. F. and H. Yeh, "Tsunami propagation from a finite source" *Comp. Mod. Eng. Sci.* 10(2) 113-121, 2005.
- [6] Kânoğlu U., V. V. Titov, B. Aydın, and C. E. Synolakis, "Analytical solution for long wave directivity" *Proceedings of the IUGG 24th General Assembly, Perugia, Italy, 2-13 July 2007.*
- [7] Carrier, G. F., T. T. Wu, and H. Yeh, "Tsunami run-up and draw-down on a plane beach" *J. Fluid Mech.* 475 79-99, 2003.