Global Attractor For A Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation

Mustafa Polat

Yeditepe Üniversitesi Matematik Bölümü
Kayisdagi Caddesi, Kayisdagi, Istanbul, Turkey
email:mpolat@metu.edu.tr

Özet

Bu çalışmada

$$u_t - a\Delta u_t - b\Delta u + \bigtriangledown \cdot \overrightarrow{F}(u) = h(x), \qquad x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}^+ \tag{0.4}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{0.5}$$

$$\partial^j u(x + L_i e_i, t) = \partial^j u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0,\ L_i > 0,\ i = 1, n\ j = 0, 1. \tag{0.6}$$

genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemi için başlangıç-sınır değer probleminin global çekicisinin varlığı araştırılmıştır.

Abstract

In this presentation the existence of a global attractor for generalized Benjamin-Bona-Mahony equation of the form

$$u_t - a\Delta u_t - b\Delta u + \bigtriangledown \cdot \overrightarrow{F}(u) = h(x), \qquad x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}^+ \tag{0.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{0.2}$$

where Ω open connected domain in $\mathbb{R}^n$, periodic boundary conditions

$$\partial^j u(x+L_i e_i, t) = \partial^j u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0,\ L_i > 0,\ i = 1, n\ j = 0, 1. \tag{0.3}$$

will be proven.

1 Problem ve Denklemin Tanıtımı

Genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemini periodik sınır koşulları altında inceleyeceğiz. Problemimiz, aşağıdaki çekilde tanımlanacak.

$$u_t - a\Delta u_t - b\Delta u + \nabla \cdot \overrightarrow{F}(u) = h(x), \qquad x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$\partial^j u(x + L_i e_i, t) = \partial^j u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0,\ L_i > 0,\ i = 1, n\ j = 0, 1. \tag{1.3}$$

Burada a , b keyfi sabit sayılar , $u_0(x)$ verilen bir fonksiyon olacak. $\overrightarrow{F}(u) = (F_1(u), ..., F_n(u))$ Vektör alanının aşağıdaki koşulları sağladığı varsayılacak.
i. $F_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, ...n;$
ii. $F_k \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), k = 1, 2..n;$
iii. $f_k(u) = \frac{d}{du}F_k(u), k = 1, 2..n$ fonksiyonlari $|f_k(u)| \leq C(1 + |u|^m), k = 1, 2..n$ artma koşullarını sağlayacaklar. Burada eğer $n = 2$ ise $0 \leq m < \infty$, eğer $n = 3$ $0 \leq m < 2$, ve eğer $n \geq 4$ ise $m = 0$ alınacaklar.
Bu çalışma aşağıdaki başlıkları içerecektir:
(a) Çözümün varlık ve tekliği;
(b) Çözümün disipatifliği;
(c) Global çekicinin varlığı ;
Benjamin-Bona-Mahony denklemi (BBM)

$$u_t + au_{txx} - bu_{xx} + u_x + uu_x = 0 \tag{1.4}$$

doğrusal olmayan yayılım ve disipatif terimlerini içeren Benjamin, Bona ve Mahony [3]. Bu modelle ilgi bir çok çalışma yapılmıştır. Bunların bazılarına referans veriyoruz. ([4],[5],[1],[2],[7],[8],[9])

2 Temel Tanımlar

Bu problemin araştırılmasında kulanılacak bir takım matematiksel gerecin kısa bir listesi şudur:
Cauchy eşitsizliği: $|ab| \leq \frac{\epsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\epsilon}|b|^2$.

Young eşitsizliği: $|ab| \leq \frac{1}{p}|\epsilon a|^p + \frac{p-1}{p}|\frac{b}{\epsilon}|^{\frac{p}{p-1}}, \quad for \quad all \quad p > 1.$
Hölder **eşitsizliği:**$p > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ için $|\int_\Omega uvdx| \leq (\int_\Omega |u|^p dx)^{\frac{1}{p}}(\int_\Omega |v|^q dx)^{\frac{1}{q}}$.

Teorem 2.1. ***Sobolev gömme teoremi:*** *$1 < p_1 \leq p_2 < \infty$ ve $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_+$ olsun. $\frac{l_1}{n_1} - \frac{1}{p_1} \geq \frac{l_2}{n} - \frac{1}{n}$. ise $W_{p_1}^{l_1}(\Omega) \subset W_{p_2}^{l_2}(\Omega)$*

Eğer yukarıdaki eşitsizlik kesin ise gömülme kompakt olur.

Tanım 2.2. $S(t) : X \to X$, $t \geq 0$ operatörler ailesine X uzayina etki eden operatörler yarı grubu diyecegiz eğer $S(t)S(s) = S(t+s), \quad s,t \geq 0$ ve $S(0) = I$, $I : X \to X$ birim operatör koşulları sağlaniyorsa.

Tanım 2.3. $\mathbf{B} \subset X$ kümesine $S(t)$ yarı grubu altında pozitif degişmez diyoruz eğer $S(t)$ için $S(t)B \subset B, \forall t \geq 0$ sağlanırsa.

Tanım 2.4. $x \in X$ için $\gamma^+(x) = \{y \in X : y = S(t)(x), t \geq 0\}$ kümesine x in pozitif yörüngesi diyoruz.

Tanım 2.5. $B \subset X$ olsun. $w(B) = \cap_{s\geq 0}\overline{\cup_{t\geq s} S(t)B}$ kümesine B nin $W-$ *limit* kümesi diyoruz.

Tanım 2.6. $B \subset X$ altkümesine $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarıgrubunun yutan kümesi diyoruz eğer B X in herhangi bir sınırlı alt kümesini yutuyorsa.

Tanım 2.7. X Banach uzayına etki eden $S(t), t \geq 0$ yarıgrubuna asimptotik kompakt diyoruz eğer her sınırlı $\mathfrak{B} \subset B$ altkümesi için $\gamma^+(\mathfrak{B}) \in B$ koşulu sağlaniyorsa ve, $\{S(t_k)(x_k)\}$,her $x_k \in \mathfrak{B}$ dizisi için $t_k \to \infty$, prekompakt ise.

Tanım 2.8. The **global Çekici** $S(t), t \geq 0$ nin global çekicisi X uzayinin her sınırlı alt kümesini çeken kompakt invariant $\mathfrak{M} \subset X$ dir.

Tanım 2.9. X uzayıne etki eden $S(t)$ operatörlerine noktasal disipatif denir eğer bir $\mathbf{B}$ sınırlı kümesi var ve bu küme X in her noktasını çekiyorsa

3 Varlık-Teklik

Tanım 3.1. $u(x,t), u_t(x,t) \in L^2(0,T; \dot{H}^1_{per}(\Omega))$ sınıfından u fonksiyonu eğer

$$(u_t, v) + a(\bigtriangledown u, \bigtriangledown v) + b(\bigtriangledown u, \bigtriangledown v) + (\bigtriangledown . F(u), v) = (h, v), \quad \forall v \in \dot{H}^1_{per}(\Omega). \tag{3.1}$$

koşulunu da sağlıyorsa (1.1-1.3) probleminin zayıf çözümü denir.

Varlık-Teklik teoremimiz aşağıdaki gibi olacaktır:

Teorem 3.2. *$h \in \dot{L}^2_{per}(\Omega)$ ve $u_0 \in \dot{H}^1_{per}(\Omega)$ ise problem 1.1-1.3 un*

$$u \in L^\infty(0,T;\dot{H}^1_{per}(\Omega)) \cap L^2(0,T;\dot{H}^1_{per}(\Omega))$$

olacak şekilde bir tek çözümü vardır.

Proof. **Step1: Yaklaşık Çözümün İnşaası**
$w_1, w_2, ...w_m, ...$ fonsiyonları

$$-\triangle u = \lambda u$$

$$u(x+L_ie_i) = u(x), u_{x_i}(x+L_ie_i) = u_{x_i}, \quad i = 1,..,n$$

özdeğer probleminin özdeğerleri olsunlar. u_{0m} $u_0 \in \dot{H}^1_{per}(\Omega)$ m $u_{0m} \to u_0$, $m \to \infty \quad in \quad \dot{H}^1_{per}(\Omega)$ iken m boyutlu ortonormal uzaya projeksiyonu olsun . Yaklaşık çözümünü

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{n} g_{im}(t) w_i(x) \tag{3.2}$$

$$(\dot{u_m}, w_j) + a(\triangledown \dot{u_m}, w_j) + b(\triangledown u_m, w_j) + (\triangledown \overrightarrow{F}(u_m), w_j) = (h, w_j), \quad j = 1,2,...m \tag{3.3}$$

$$u_m(0) = u_{0m} \tag{3.4}$$

$$\acute{g}_{im}(t) + b\sum_{j=1}^{m} a_{ij} g_{jm}(t) + b_{ij}(\overrightarrow{F}(u_m), w_j) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij}(h, w_j), \quad 1 \le j \le m. \tag{3.5}$$

ve başlangıç koşulları ile tanımlayalım. Burada a ve b sabit sayılardir. Bu adi diferensiyel denlemler sistemi için

$$u_m \in L^2(0,T;\dot{H}^1_{per}(\Omega)), \quad \acute{u}_m \in L^2(0,T;\dot{L}^2_{per}(\Omega)) \tag{3.6}$$

Step2: A priori estimates
(3.3) yi $g_{jm}(t)$ ile çarpıp $j = 1$ den $j = m$ toplayarak

$$\begin{aligned}(\partial_t u_m, u_m) + a(\triangledown\partial_t u_m, \triangledown u_m) + b(\triangledown u_m, \triangledown u_m) +\\ (\triangledown . F(u_m), u_m) = (h, u_m), \quad \forall v \in \dot{H}^1_{per}(\Omega)\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde ederiz. Schwartz veCauchy eşitsizliklerini ve Poincare eşitsizliğini de kulanarak

$$\frac{d}{dt}(||u_m||^2_{L^2(\Omega)} + a{\lambda_1}^{-1}||\bigtriangledown u_m||^2_{L^2(\Omega)}) + (b\lambda_1 - \frac{b\epsilon}{2})||u_m||^2_{L^2(\Omega)} + b||\bigtriangledown u_m||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2\epsilon}||h||_{L^2(\Omega)} \qquad (3.8)$$

elde ederiz. $\epsilon > 0$, $(b\lambda_1 - \frac{b\epsilon}{2}) \geq 0$ sağlayacak şekilde seçerek ve $\alpha = min\{\frac{b}{a}, (b\lambda_1 - \frac{b\epsilon}{2})\} \geq 0$, alırak 3.8 çözümünü

$$(||u_m||^2_{L^2(\Omega)} + a{\lambda_1}^{-1}||\bigtriangledown u_m||^2_{L^2(\Omega)}) \leq (||u_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} + a{\lambda_1}^{-1}||\bigtriangledown u_{0m}||^2_{L^2(\Omega)})e^{-\alpha t} + \frac{1}{2\epsilon}||h||_{L^2(\Omega)} \qquad (3.9)$$

Böylece

$$u_m \in L^\infty(0,T;\dot{H}^1_{per}(\Omega) \cap L^\infty(0,T;\dot{L}^2_{per}(\Omega)) \qquad (3.10)$$

olur. Yine 3.8 dan t ye göre integral alarak

$$(||u_m||^2_{L^2(\Omega)} + a||\bigtriangledown u_m||^2_{L^2(\Omega)}) + a\alpha\int_0^T ||\bigtriangledown u_m||^2_{L^2(\Omega)} \leq (||u_0||^2_{L^2(\Omega)} + a{\lambda_1}^{-1}||\bigtriangledown u_0||^2_{L^2(\Omega)}) + \frac{1}{2\epsilon}||h||_{L^2(\Omega)} \qquad (3.11)$$

elde ederiz. Bu ise $\int_0^T ||\bigtriangledown u_m||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1$ ve $u_m \in L^2(0,T;\dot{H}^1_{per}(\Omega))$ oldugunu gösterir. Böylece

$$u_m \in L^2(0,T;\dot{H}^1_{per}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;\dot{H}^1_{per}(\Omega)) \qquad (3.12)$$

elde etmiş oluruz.

Step3: Limite geçiş

(3.12), bir $u \in L^\infty(0,T;\dot{H}^1_{per}(\Omega))$ ve bu uzayın zayıf-yıldız topolojisinde buna $\acute{m} \to \infty$ yakınsayan bir $u_{\acute{m}}$ altdizisi olduğunu gösteriyor. Bu da her $v \in L^1(0,T;\dot{H}^{-1}_{per}(\Omega))$ için

$$\int_0^T < u_{\acute{m}}(t) - u(t), v(t) > dt \to 0, \quad as \quad \acute{m} \to \infty \qquad (3.13)$$

sağlanıyor demektir. (3.2)-(3.3) de limite geçmek için C_0^∞ uzayında bir $\psi(T) = 0$ koşulunu sağlayan bir $\psi(t)$ fonksiyonu ile carpıp t ye göre integral alıp kısmı integrasyon kulanırsak dağılım manasında her $\forall v \in \dot{H}^1_{per}(\Omega))$

in $(0,T)$ de

$$\frac{d}{dt}\{(u,v)+a(\bigtriangledown u,\bigtriangledown v)\}+(\bigtriangledown\cdot\overrightarrow{F(u)},v(t))=(h,v) \tag{3.14}$$

sağlandığını görürüz. □

Lema 3.3. *(Strauss) V,H Hilbert uzaylar $\acute{V}$ uzayı V nin dual uzayı olsun ve*

$$V\subset H\subset \acute{V}$$

her küme diğerinde yoğun olma koşulu ile sağlansın. Eğer $u\in L^2(0,T;V)$ ve $u_t\in L^2(0,T;\acute{V})$ ise u; $[0,T]\to H$ hemen hemen her yerde sürekli bir fonsiyona eşittir. Ve de dağılım manasında aşağıdaki denklik sağlanır.

$$\frac{d}{dt}(u,u)=\frac{d}{dt}||u||^2_{\dot{L}^2(\Omega)}=2<\acute{u},u>$$

Teorem 3.4. *Teorem3.2 nın aksiyomları altında bir $u\in C(0,T;\dot{H}^1_{per}(\Omega))$ çözümü vardır.*

Proof. 1.1 denklemini u_t ile $L^2(\Omega)$ manasında çarparsak $u\in L^2(0,T;\dot{H}^1_{per}(\Omega))$ ve $u_t\in L^2(0,T;\dot{H}^1_{per}(\Omega))$ olduğunu kolayca görürüz. Sonuç Strauss lemasından kolayca çıkar. □

4 Yutan Kümenin ve Global Çekicinin Varlığı:

1.1 denklemini u ile $L^2(\Omega)$ manasında çarparsak ve kısmi integrasyonu, periodik sınır koşullarını ve Poincare-Friedrichs, Cauchy, Young eşitsizliklerini kulanırsak ve $K_0=min(\frac{b\lambda_1}{2},\frac{b}{2a})$ seçersek

$$\frac{d}{dt}[||u(t)||^2_{\dot{L}^2(\Omega)}+a||\bigtriangledown u(t)||^2_{\dot{L}^2(\Omega)}]+K_0[||u(t)||^2_{\dot{L}^2(\Omega)}+a||\bigtriangledown u(t)||^2_{\dot{L}^2(\Omega)}]\leq\frac{1}{b\lambda_1}||h||^2_{\dot{L}^2(\Omega)} \tag{4.1}$$

elde ederiz. Buradan da

$$||\bigtriangledown u(t)||^2_{\dot{L}^2(\Omega)}\leq\frac{1}{a}\{||u_0||^2_{\dot{L}^2(\Omega)}+a||\bigtriangledown u_0||^2_{\dot{L}^2(\Omega)}\}e^{-K_0t}+\frac{1}{abK_0\lambda_1}||h||^2_{\dot{L}^2(\Omega)} \tag{4.2}$$

kolayca elde edilir. Dolayisiyla $S(t)$ nin $\dot{H}^1_{per}(\Omega)$ da

$$\mathbf{B_1}:=\{u\in\dot{H}^1_{per}(\Omega):||u||_{\dot{H}^1_{per}(\Omega)}\leq\frac{1}{aK_0\lambda_1}||h||^2_{\dot{L}^2(\Omega)}\} \tag{4.3}$$

yutan kümesi olduğu kolayca görülür. Global çekicinin varlığını göstermek için Ladyzhenskaya[12] nın aşağıdaki iki teoremini kulananağız.

Teorem 4.1. *$S(t), t \in \mathbb{R}^+$ bir X Banach uzayına etki eden bir yarıgrup olsun ve , $S(t) = W(t) + Z(t)$ toplamı olarak ifade edilebilsin. $W(t), t \in \mathbb{R}^+$ aşağıdaki koşulu sağlasın*

$$||W(t)(\mathbf{B})||_X \leq m_1(t)m_2(||\mathbf{B}||_X)$$

burada $m_1(t)$ ve $m_2(t)$, $\mathbb{R}^+$ da sürekli fonksiyonlar olsun ve $m_(t) \to 0$, $t \to \infty$, $||\mathbb{B}||_X = sup_{v\in\mathbb{B}}||v|_X$, sağlansın ve $Z(t)$ sınırlı kümeleri kompakt kümelere götürsün. Bu taktirde $S(t)$ asimptotik kompakt yarıgruptur

Teorem 4.2. *$S(t) : X \to X, t \in \mathbb{R}^+$, sürekli sınırlı noktasal disipatif ve asimptotik kompakt olsun. Bu yarırıgrubun boş olmayan bir $\mathfrak{M}$ minimal global çekicisi vardir. Bu küme kompakt, invariant ve bağlantılıdır.*

$S(t)$ yarı grubunun asimptotik düzgün olduğunu göstereceğiz. Bunu yapmak için Teorem4.1i kulanacagız. Burada $u(x,t)$ çözümünü $u(x,t) = w(x,t) + z(x,t)$ şeklinde yazacağız. $w(x,t)$ ve de $z(x,t)$ de aşağıdaki problemlerin çözümü olsunlar.

$$w_t - a \triangle w_t - b \triangle w = 0 \tag{4.4}$$

$$w(x,0) = u_0(x) \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \partial^j w(x + L_i e_i, t) = \partial^j w(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ t > 0,\ L_i > 0,\ i = 1, n\ j = 0, 1. \end{aligned} \tag{4.6}$$

ve

$$z_t - a\Delta z_t - b\Delta z + \bigtriangledown \cdot \overrightarrow{F}(w + z) = h(x), \qquad x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}^+ \tag{4.7}$$

$$u(0,x) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \partial^j z(x + L_i e_i, t) = \partial^j z(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ t > 0,\ L_i > 0,\ i = 1, n\ j = 0, 1. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Böylece $S(t)$ yarıgrubunun $S(t) = W(t) + Z(t)$ şeklinde bir gösterimi olur. (4.4-(4.6) denklemlerinden

$$\frac{d}{dt}[||w(t)||^2_{\dot{L}^2(\Omega)} + a|| \bigtriangledown w(t)||^2_{\dot{L}^2(\Omega)}] + K_1[||w(t)||^2_{\dot{L}^2(\Omega)} + a|| \bigtriangledown w(t)||^2_{\dot{L}^2(\Omega)}] \leq 0 \tag{4.10}$$

eşitsizligini elde ederiz. Bunu integre edersek de

$$[||w(t)||^2_{\dot{L}^2(\Omega)}+a||\bigtriangledown w(t)||^2_{\dot{L}^2(\Omega)}] \leq [||w(0)||^2_{\dot{L}^2(\Omega)}+a||\bigtriangledown w(0)||^2_{\dot{L}^2(\Omega)}]e^{-K_1 t} \tag{4.11}$$

elde ederiz. Şimdi Poincare-Friederich eşitsizligini bir kez daha kulanırsak

$$|| \bigtriangledown w(t)||^2_{\dot{L}^2(\Omega)} \leq (1 + \frac{1}{a\lambda_1})|| \bigtriangledown w(0)||^2_{\dot{L}^2(\Omega)} e^{-K_1 t} \tag{4.12}$$

elde ederiz. Böylece $W(t)$ parçası $m_1(t) = e^{-K_1 t}(1 + \frac{1}{a\lambda_1})$ and $m_2(t) = t$ için Teorem 4.1. nın aksiyomlarini saglamış olur.

Şimdi sıra $Z(t) : \dot{H}^1_{per}(\Omega) \to \dot{H}^1_{per}(\Omega)$ nın $t > 0$ için prekompakt olduğunu göstermeye geldi. 4.7 denklemini aşağıdaki gibi yazarak işe başlayacagız.

$$z_t - a\Delta z_t - b\Delta z = h(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(u)u_{x_i} = g(x,t), \qquad x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}^+ \tag{4.13}$$

f üzerindeki koşulları, Hölder eşitsizligini ve, Sobolev gömme teoremini kulanırsak

$$\int_\Omega |f_i(u)u_{x_i}|^p dx \leq C_3(1 + \int_\Omega | \bigtriangledown u|^2 dx) + C_4(1 + \int_\Omega | \bigtriangledown u|^2 dx)^{\frac{3(2-p)}{2}} \tag{4.14}$$

elde ederiz.
$S(t) : \dot{H}^1_{per}(\Omega) \to \dot{H}^1_{per}(\Omega)$ sınırlı disipatif olduğundan, $\max_{t\in\mathbb{R}^+} ||\bigtriangledown u||_{L^2(\Omega)} \leq C_5$, ve $h \in L^2(\Omega)$, $g \in C(\mathbb{R}^+; L_p(\Omega))$ olur. Sobolev gömme teoremi $\sigma = 1 - \frac{m}{2}$ için $L_p(\Omega) \subset \dot{H}^{-1+\sigma}_{per}(\Omega)$,,$g \in L^2(0,T; \dot{H}^{-1+\sigma}_{per}(\Omega))$, verir.$Z(t)$ nın prekompaktlığı aşağıdaki önermeden çıkar.

Önerme 4.3. *Eğer* $g \in L^2(0,T; \dot{H}^s_{per}(\Omega)$ *ve* $v_0 \in \dot{H}^{s+2}_{per}(\Omega)$ *ise*

$$v_t - a\Delta v_t - b\Delta v = g(x,t), \qquad x \in \Omega,\ t \in (0,T) \tag{4.15}$$

$$v(x,t) = v_0 \tag{4.16}$$

başlangıç sınır değer problemi $s \in \mathbb{R}$ *olmak üzere bir* $v(x,t) \in C(0,T; \dot{H}^{s+2}_{per}(\Omega))$ *, bir çözüme sahiptir.*

Proof. Bu önermenin ispatı standard Fourier seri metodu ile kolayca yapılır.

References

[1] Albert, J., On the decay of solutions generalized Benjamin-Bona-Mahony equation; J. Math. Anal. Appl. 141 (1989), 527-537

[2] Amick, C.J., Bona, J.L., Schonbek, M.E.; Decay of solutions of some nonlinear wave equations, J. Differential Equations, 81(1989), 1-49.

[3] Benjamin, T.B., Bona, J.L. Mahony, J.J. Phil. Trans. Roy.Soc.London 272(1972) 47-78

[4] Bixiang, Wang; On the strong attractor for the Benjamin-Bona-Mahony equation, Appl. Math. Lett. 10(2)(1997),23-28.

[5] Bixiang, Wang; Attractors and Appr. Inertial Manifolds for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation, Appl. Sci. Vol.20(1997),199-203.

[6] Bixian, Wang, Yang, Wanli; Finite Dimensional behaviuor for the Benjam,n-Nona-Mahony equation, J. Phys. A. 30(1997),13,4877-4885.

[7] Bonaş J. L., Bryant, P.J. A mathematical model for long wave generated by wave numbers in nonlinear dispersive systems, Proc. Cambridge Philos. Soc., 73,391-405(1977).

[8] Bona, J.L., Douglsh, V.A., An initial boundary value problem for a model equation for propagaiton og long waves, J. Math. Anal. Appl. 75 (1980), 503-522.

[9] Bona. J.L., Smith, The initial value problem for the KdV equation . Philos. Trans. Roy.Soc.London. Ser. A 278(1975), no.1287, 555-601.

[10] A.V. Babin and M.I. Vishik, Attractors of Evolution Equations, *North–Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992.*

[11] A. V. Babin and M. I. Vishik, Attractors of Evolution Equations *Elsevier Science Publishers.*

[12] O. A. Ladyzhenskaya, On the Determination of minimal global attractors for the Navier-Stokes and other partial differential equations, *Russian Math. Surveys 42, No. 6 (1987), 27-73.*