



## ELASTİK BİR TABAKADA NONLİNEER SH DALGALARININ ETKİLEŞİMİ

Esra Akman<sup>1</sup>  
İTÜ, İstanbul

Semra Ahmetolan<sup>2</sup>  
İTÜ, İstanbul

### ÖZET

*Bu çalışmada, düzgün kalınlıklı hiperelastik malzemeden oluşan bir tabaka içerisinde aynı yönde ilerleyen SH dalgalarının etkileşimi problemi ele alınmıştır. Serbest yüzeyde gerilmelerin olmadığı kabul edilmiştir. Dalgaların etkileşimi problemi bir asimptotik pertürbasyon metodu olan çoklu ölçekler metodu kullanılarak incelenmiştir. Asimptotik analiz neticesinde aynı yönde ilerleyen ve birbirleri ile etkileşen dalgalara ait birinci mertebe yavaş değişen genlik fonksiyonlarının değişimini asimptotik olarak karakterize eden kuple nonlineer Schrödinger denklemleri (KNLS) elde edilmiştir. Sonrasında KNLS denklemlerinin çözümlerinin kararsızlıkları ve solitary dalga çözümlerinin varlığı incelenmiştir.*

### GİRİŞ

Tabakalı ortamlarda nonlineer SH dalgalarının yayılımının incelenmesi bir çok çalışmanın konusunu oluşturmuştur [2,3,5,7,8]. Düzgün kalınlıklı farklı homojen isotrop sıkışabilir hiperelastik malzemeden yapılmış bir tabaka ile kaplı yarı sonsuz uzayda zayıf nonlineer yüzey SH dalgalarının yayılması problemi [8]'de ele alınmıştır. Dalgaların nonlineer self modülasyonunun asimptotik olarak nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiş ve dalga yayılımına nonlineerliğin etkisi incelenmiştir. Daha sonra [7]'de, ince lineer elastik bir film ile kaplı elastik yarım uzayda nonlineer Love dalgalarının modülasyonu için bir NLS denklemi türetilmiştir. Dispersiyona neden olan tabaka ince bir film olarak gözönüne alındığından lineer dalgaların dispersiyon bağıntısına bir daldan ibarettir ve küçük dalga sayıları için Love dalgalarının dispersiyon bağıntısına ait ilk dal ile çakışmaktadır. Bu nedenle [7]'deki sonuçlar [8]'deki sonuçlar gibi bütün modları ve dalga sayısının bütün değerleri için geçerli değildirler. [3]'deki çalışmada ise farklı homojen , isotrop sıkışamaz elastik malzemelerden oluşan düzgün kalınlıklı iki tabaka ile kaplı elastik bir ortamda yüzey SH dalgalarının nonlineer self modülasyonunun asimptotik olarak NLS denklemi ile yönetildiği gösterilmiştir. Alt tabakanın kalınlığı sonsuza götürüldüğünde NLS denkleminin katsayılarının [8]'de elde edilen NLS denkleminin katsayılarına yaklaştığı gözlemlenmiştir.[2]'deki çalışmada ise homojen isotrop ve sıkışamaz elastik bir malzemeden yapılmış tek bir tabaka içerisinde SH dalgalarının yayılması incelenmiş ve ortamı oluşturan malzemenin nonlineerliğinin dalga yayılımı üzerindeki etkisi tartışılmıştır. Diğer taraftan, [8]'de verilen tabakalı model içerisinde aynı yönde ilerleyen iki SH dalgasının etkileşimi problemi [5]'de ele alınmış ve bu etkileşime nonlineerliğin etkisi asimptotik bir metod kullanılarak incelenmiştir. Grup hızları aynı olan dalgaların nonlineer etkileşimlerini karakterize eden KNLS denklemleri türetilmiştir.

Bu çalışmada ise, düzgün kalınlıklı hiperelastik malzemeden oluşan bir tabaka içerisinde aynı yönde ilerleyen SH dalgalarının etkileşimi problemi ele alınacaktır. Serbest yüzeylerde gerilmelerin olmadığı kabul edilerek dalgaların etkileşimi problemi bir asimptotik pertürbasyon

<sup>1</sup> Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Müh.Programı, E-posta: esraakman@yahoo.com

<sup>2</sup> Yrd. Doç.Dr. Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, E-posta: ahmetola@itu.edu.tr

metodu olan çoklu ölçekler metodu kullanılarak incelenecektir [9]. Asimptotik analiz neticesinde, aynı yönde ilerleyen ve birbirleri ile etkileşen SH dalgalarına ait birinci mertebe yavaş değişen genlik fonksiyonlarının uzay zaman değişimini asimptotik olarak karakterize eden denklem sistemi türetilenektir. Bilindiği gibi tek bir tabakada yayılan SH dalgalarının orta yüzeye göre simetrik ve antisimetrik modları mevcuttur. Bu yüzden de etkileşen dalgaların simetrik- simetrik, antisimetrik-antisimetrik ve antisimetrik-simetrik dalgalar oldukları kabulü altında KNLS denklem sisteminin solitare dalga çözümlerinin varlığı nümerik olarak incelenecektir.

### PROBLEMİN TANIMI VE ASİMPOTİK ANALİZ

Başlangıç konumunda  $h > 0$  olmak üzere

$$P = \{(X, Y, Z) \mid -h \leq Y \leq h, -\infty < (X, Z) < \infty\} \quad (1)$$

bölgesini dolduran elastik malzemeden oluşan düzgün (uniform) kalınlıklı bir sürekli ortam gözönüne alalım.  $Y = \pm h$  serbest yüzeylerinde gerilmelerin sıfır olduğunu ve bu tabaka içerisinde dalgaların  $X$  eksenini boyunca yayıldıklarını ve yerdeğiştirmenin  $Z$  doğrultusunda olduğunu kabul edelim. Bu durumda dalga hareketi

$$x = X, \quad y = Y, \quad z = Z + u(X, Y, t) \quad (2)$$

formunda olacaktır.  $(X, Y, Z)$  ve  $(x, y, z)$  aynı dik kartezyen takımına göre sırasıyla maddesel ve uzaysal koordinatları göstermektedir. Ortamı oluşturan elastik malzemenin iç enerji fonksiyonu  $\Sigma = \Sigma(I)$  yapısında olsun. Burada  $I$  Green deformasyon tensörünün birinci invariantsını göstermektedir, yani ortamı oluşturan tabakanın neo-Hookean malzemeden meydana geldiğini kabul edelim. Bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalgaların yayılması problemi inceleneceği için yüksek mertebe terimler ihmal edilerek hareket denkleminin yaklaşık formunu kullanacağız. Tabakadaki yerdeğiştirme  $u$  ile gösterilirse probleme ait hareket denklemi ve sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P' de \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_T^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) = n_T \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial u}{\partial X} Q(u) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} Q(u) \right) \right\} \quad (3)$$

$$Y = \pm h' de \quad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad (4)$$

Burada  $c_T^2 = \frac{\mu}{\rho}$ ,  $P$  ortamında yayılan lineer dalgaların yayılma hızlarını;  $\mu = 2 \frac{d^2 \Sigma(3)}{dt^2}$  ortamın kayma modülünü,  $\rho$  ise ortamı oluşturan malzemenin yoğunluğunu göstermektedir. Ayrıca

$$Q(u) = \left( \frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2$$

dır.  $n_T$  sabiti ise ortamın nonlineer özellikleri ile ilgili sabittir ve  $n_T = \frac{2}{\rho} \frac{d^2 \Sigma(3)}{dt^2}$  şeklindedir.

$n_T > 0$  ise malzeme kaymada sertleşen,  $n_T < 0$  ise kaymada yumuşayan özelliğe sahiptir.

Düzgün kalınlıklı bir tabakadan oluşan ortamda aynı yönde ilerleyen SH tipi nonlineer elastik dalgalarının etkileşimi problemi incelenecektir. Bu dalgaların genliklerinin uzay-zaman değişimlerini asimptotik olarak karakterize eden denklem sistemi türetilenektir. Bu amaçla bir asimptotik pertürbasyon yöntemi olan çoklu ölçekler metodu kullanılarak  $X, Y$  ve  $t$  değişkenleri yerine

$$x_i = \varepsilon^i X, \quad t_i = \varepsilon^i t, \quad y = Y, \quad i = 0, 1, 2 \quad (5)$$

bağıntıları ile yeni değişkenler tanımlanmaktadır [9]. Ayrıca  $u$  fonksiyonunun bu yeni değişkenlerin fonksiyonu olduğu kabul edilmektedir.  $\varepsilon$  nonlineerliğin mertebesini belirten küçük pozitif bir parametre,  $\{x_1, x_2, t_1, t_2\}$  yayılma olayında yavaş değişimi karakterize eden değişkenler ve  $\{x_0, t_0, y\}$  ise hızlı değişimi karakterize eden değişkenlerdir.  $u$  fonksiyonunu  $\varepsilon$  asimptotik dizisine göre

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad (6)$$

formunda düzgün (uniform) geçerli asimptotik açılıma sahip olduğunu varsayıyoruz. Ayrıca eski ve yeni değişkenler arasında

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \quad (7)$$

bağıntıları geçerlidir. (3) hareket denklemi ve (4) sınır koşullarında (7) dikkate alınarak (5) dönüşümleri uygulanır ve sonra (6) asimptotik açılımı kullanılırsa  $\varepsilon$ 'un aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek  $u_n$ 'lerin ardışık olarak hesaplanabileceği bir problemler hiyerarşisi elde edilir. İlk üç pertürbasyon problemi aşağıda verilmektedir:

$$\mathcal{O}(\varepsilon): \quad P'de \quad \mathcal{L}_0 u_1 = 0 \quad (8)$$

$$y = \pm h'de \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon^2): \quad P'de \quad \mathcal{L}_0 u_2 = \mathcal{L}_1 u_1 \quad (10)$$

$$y = \pm h'de \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon^3): \quad P'de \quad \mathcal{L}_0 u_3 = \mathcal{L}_1 u_2 + \mathcal{L}_2 u_1 + n_T \mathcal{N}_0 u_1 \quad (12)$$

$$y = \pm h'de \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

Burada lineer diferansiyel operatörler  $\mathcal{L}_0$ ,  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  ve nonlineer diferansiyel operatör  $\mathcal{N}_0$  aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır;

$$\mathcal{L}_0(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0^2} - c_T^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \quad \mathcal{L}_1(\psi) = -2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_1} + 2c_T^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_1}$$

$$\mathcal{L}_2(\psi) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_2} + c_T^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_2} \right) \quad (14)$$

$$\mathcal{N}_0(\psi) = \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_0} Q(\psi) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} Q(\psi) \right) \right], \quad Q(\psi) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2$$

Bilindiği gibi, bu tip asimptotik analizde her bir mertebeye pertürbasyon problemi lineer olmaktadır. Ayrıca birinci mertebeye problem klasik lineer problem ile eş yapıdadır. Sadece lineer problemde  $u$  fonksiyonu  $u = u(X, Y, t)$  yapısında fonksiyon iken yukarıda tanımlanan  $\varepsilon$  mertebesindeki problemde  $u_1 = u_1(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2)$  yapısında fonksiyondur ve  $\varepsilon$  mertebesindeki problem çözülerek  $u_1$ 'in  $\{x_0, y, t_0\}$  hızlı değişkenlere bağıllığı açık olarak hesaplanabilecektir. Diğer taraftan tabakada SH dalgalarının yayılabilmesi için dalgaların faz hızı  $c$ 'nin

$$c_T < c \quad (15)$$

eşitsizliğini sağlaması gerekir.

Aynı yönde ilerleyen iki dalganın etkileşimi problemi ile ilgilenildiği için birinci mertebeye problemin çözümünü aşağıdaki formda alabiliriz;

$$u_1 = \sum_{l=1}^{\infty} (A_{1a}^{(l)} e^{ik_a p_a y} + B_{1a}^{(l)} e^{-ik_a p_a y}) e^{il\phi_a} + (A_{1b}^{(l)} e^{ik_b p_b y} + B_{1b}^{(l)} e^{-ik_b p_b y}) e^{il\phi_b} + k.e. \quad (16)$$

Burada  $a$  ve  $b$  indisleri sırasıyla  $k_a$  ve  $k_b$  dalga sayıları civarında merkezlenmiş ve frekansları  $\omega_a$  ve  $\omega_b$  olan yarı monokromatik dalgaları göstermektedir.  $A_{1j}^{(l)}$  ve  $B_{1j}^{(l)}$ ,  $j = a, b$ , birinci mertebeye  $\{x_1, x_2, t_1, t_2\}$  yavaş değişkenlere bağlı dalga genliği fonksiyonlarıdır. Ayrıca,  $j = a, b$ , için

$$\phi_j = (k_j x_0 - \omega_j t_0) \text{ ve } p_j = \left(\frac{c_j^2}{c_T^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanmaktadır.  $k.e.$  ise önceki terimlerin kompleks eşleniğini göstermektedir. (16) ile verilen  $u_1$  çözümü (9)'da verilen sınır koşullarında kullanılırsa

$$W_a^{(l)} U_{1a}^{(l)} = 0 \text{ ve } W_b^{(l)} U_{1b}^{(l)} = 0 \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

homojen denklem sistemi elde edilir. Burada  $W_j^{(l)}$ ,  $j = a, b$  dispersiyon matrisi

$$W_j^{(l)} = \begin{pmatrix} ilk_j p_j e^{ilk_j p_j} & -ilk_j p_j e^{-ilk_j p_j} \\ ilk_j p_j e^{-ilk_j p_j} & -ilk_j p_j e^{ilk_j p_j} \end{pmatrix} \quad (18)$$

ve  $U_{1j}^{(l)}$  birinci mertebeye genlik vektörü ise

$$U_{1j}^{(l)} = [A_{1j}^{(l)} \quad B_{1j}^{(l)}]^T \quad (19)$$

olarak tanımlanmaktadır.  $l = 1$  için  $\det W_a^{(l)} = 0$  ve  $\det W_b^{(l)} = 0$  sırası ile frekansları ve dalga sayıları  $(\omega_a, k_a)$  ve  $(\omega_b, k_b)$  olan lineer dalgalara ait dispersiyon bağıntılarını verirler:

$$\sin(2k_j h p_j) = 0 \quad \text{veya} \quad \sin(k_j h p_j) \cos(k_j h p_j) = 0 \quad , \quad j = a, b. \quad (20)$$

Burada

$$2k_j h p_j = m \pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

yani,

$$\frac{c_j^2}{c_T^2} = 1 + \left(\frac{m\pi}{2k_j h}\right)^2 \text{ veya } \omega_j^2 = k_j^2 c_T^2 \left[1 + \left(\frac{m\pi}{2k_j h}\right)^2\right] \quad (22)$$

elde edilir.  $m$ , lineer dispersiyon bağıntısı  $\omega_j = \omega(k_j; m)$ 'nin dallarını göstermektedir.  $m = 0$  veya çift tamsayı ise frekans denklemi (20),  $\sin(k_j h p_j) = 0$  olacağı için sağlanacaktır, bu modlara simetrik mod adı verilir. Yani dalga hareketi  $y = 0$  orta yüzeye göre simetrik. Benzer şekilde eğer frekans denklemi (20)  $\cos(k_j h p_j) = 0$  tarafından sağlanıyorsa, yani  $m$  tek tamsayı ise, bu modlara da antisimetrik mod adı verilir ve dalga hareketi  $y = 0$  orta yüzeyine göre antisimetrik olur. Ayrıca  $m = 0$  için (22) nolu denklemden  $c_j = c_T$  veya  $\omega_j = k_j c_T$  olduğu görülür. Bu yüzden ilk mod diğer modların aksine dispersif değildir [7].

Bu çalışmada başta da belirtildiği gibi  $k_a$  ve  $k_b$  dalga sayıları civarında ve bu dalga sayılarına karşı gelen  $\omega_a$  ve  $\omega_b$  açısal frekanslar civarında merkezlenmiş ve aynı yönde ilerleyen iki dalganın etkileşimi incelendiğinden bu iki dalganın birbirlerinin harmonikleri olmadıklarını kabul ederek incelemeye devam edeceğiz. Yani  $k_a < k_b$  ve  $\omega_a < \omega_b$  olmak üzere  $M \in \{3, 5, 7, \dots\}$  için  $k_b \neq M k_a$  ve  $\omega_b \neq M \omega_a$  bağıntılarının geçerli olduklarını kabul edelim. Bu durumda  $l \geq 2$  ve  $j = a, b$  için  $\det W_j^{(l)} \neq 0$  olur. Bu koşul altında (17) denkleminin çözümleri,  $R_j$  'ler

$$W_j^{(l)} R_j = 0 \quad j = a, b \quad (23)$$

denklemini sağlayan sütun vektörler olmak üzere

$$l = 1 \text{ için } U_{1j}^{(1)} \equiv \mathcal{A}_{1j}(x_1, x_2, t_1, t_2) R_j \quad (24)$$

ve

$$l \geq 2 \text{ için } U_{1j}^{(l)} \equiv 0 \quad (25)$$

olarak elde edilirler. (23) denkleminin bir çözümü  $R_j$

$$R_j = \{R_{1j}, R_{2j}\} = \{e^{-2ik_j p_j h}, 1\} \quad (26)$$

olarak tanımlanmaktadır.  $R_j$  vektörünün bileşenleri arasında  $|R_{1j}| = |R_{2j}|$  bağıntısı geçerlidir. Böylece (24) ve (25) kullanılarak birinci merteye pertürbasyon probleminin çözümü aşağıdaki formda elde edilir:

$$u_1 = \mathcal{A}_{1a}(x_1, x_2, t_1, t_2)(e^{ik_a p_a(y-2h)} + e^{-ik_a p_a y})e^{i(k_a x_0 - \omega_a t_0)} + \mathcal{A}_{1b}(x_1, x_2, t_1, t_2)(e^{ik_b p_b(y-2h)} + e^{-ik_b p_b y})e^{i(k_b x_0 - \omega_b t_0)} + k.e. \quad (27)$$

Burada dikkat edilirse, birinci merteye yavaş değişen kompleks genlik fonksiyonları  $\mathcal{A}_{1a}$  ve  $\mathcal{A}_{1b}$ 'nin açık olarak hesaplanması yeterli olacaktır. Bunun için ikinci ve üçüncü merteye problemlerin incelenmesi gerekmektedir.  $u_1$  çözümü ikinci merteye pertürbasyon probleminde kullanılırsa,  $u_2$  için homojen olmayan sınır değer problemi elde edilir. İkinci merteye problemin çözümünü

$$u_2 = \bar{u}_2 + \tilde{u}_2 \quad (28)$$

olarak iki parçaya ayırılım, öyleki  $\bar{u}_2$  homojen olmayan denklemin özel çözümü,  $\tilde{u}_2$  ise

$$\mathcal{L}_0(\tilde{u}_2) = 0 \quad (29)$$

homojen denklemin ve aşağıda verilen homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümü olsun:

$$y = \pm h' de \quad \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} = - \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} \quad (30)$$

İlk olarak belirsiz katsayılar metodu kullanılarak özel çözüm

$$\bar{u}_2 = (\mathcal{F}_{1a} e^{ik_a p_a y} + \mathcal{F}_{2a} e^{-ik_a p_a y}) y e^{i\phi_a} + (\mathcal{F}_{1b} e^{ik_b p_b y} + \mathcal{F}_{2b} e^{-ik_b p_b y}) y e^{i\phi_b} + k.e. \quad (31)$$

olarak bulunur. Burada

$$\mathcal{F}_{1j} = - \frac{R_{1j}}{c_j^2 k_j p_j} \mathcal{M}_{11j}, \quad \mathcal{F}_{2j} = \frac{R_{2j}}{c_j^2 k_j p_j} \mathcal{M}_{11j}$$

ve

$$\mathcal{M}_{11j} = \omega_j \frac{\partial \mathcal{A}_{1j}}{\partial t_1} + k_j c_j^2 \frac{\partial \mathcal{A}_{1j}}{\partial x_1}$$

olarak tanımlanmaktadır. Diğer taraftan (29) homojen denklemin  $\bar{u}_2$  çözümü de birinci merteye problemdeki gibi yazılabilir:

$$\tilde{u}_2 = \sum_{l=1}^{\infty} (A_{2a}^{(l)} e^{ik_a p_a y} + B_{2a}^{(l)} e^{-ik_a p_a y}) e^{il\phi_a} + (A_{2b}^{(l)} e^{ik_b p_b y} + B_{2b}^{(l)} e^{-ik_b p_b y}) e^{il\phi_b} + k.e. \quad (32)$$

Burada  $A_{2j}^{(l)}$  ve  $B_{2j}^{(l)}$  fonksiyonları  $\{x_1, x_2, t_1, t_2\}$  yavaş değişkenlere bağlı ikinci merteye dalga genliği fonksiyonlarıdır ve (30) sınır koşulları kullanılarak hesaplanacaklardır. (31) ile verilen çözümler (30) sınır koşullarında kullanılırsa

$$\mathbf{U}_{2j}^{(l)} = [A_{2j}^{(l)} \quad B_{2j}^{(l)}]^T \quad (33)$$

için

$$\mathbf{W}_j^{(l)} \mathbf{U}_{2j}^{(l)} = \mathbf{b}_{2j}^{(l)} \quad (34)$$

elde edilir. Burada

$$l = 1 \text{ için} \quad \mathbf{b}_{2j}^{(1)} = -i \left( \frac{\partial \mathcal{A}_{1j}}{\partial t_1} \frac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j} - \frac{\partial \mathcal{A}_{1j}}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial k_j} \right) \mathbf{R}_j \quad (35)$$

ve

$$l \neq 1 \text{ için} \quad \mathbf{b}_{2j}^{(l)} \equiv \mathbf{0} \quad (36)$$

şekindedir. Diğer taraftan  $l = 1$  için  $\det \mathbf{W}_j^{(1)} = 0$  ve  $\mathbf{b}_{2j}^{(1)} \neq 0$  olduğundan (34) homojen olmayan cebrik denklem sisteminin  $l = 1$  için çözüme sahip olabilmesi için  $\mathbf{L}_j$ ,

$$\mathbf{L}_j \mathbf{W}_j^{(1)} = \mathbf{0} \quad (37)$$

denklemini ile tanımlanan bir satır vektör olmak üzere

$$\mathbf{L}_j \mathbf{b}_{2j}^{(1)} = 0 \quad (38)$$

olması gerekir. Gerekli ara işlemlerden sonra  $\mathbf{L}_j$  vektörü

$$L_j = (-e^{-2ik_j p_j h}, 1) \quad (39)$$

olarak hesaplanabilir. Diğer taraftan (38) uygunluk koşulundan

$$\frac{\partial \mathcal{A}_{1j}}{\partial t_1} + V_{gj} \frac{\partial \mathcal{A}_{1j}}{\partial x_1} = 0 \quad (40)$$

denklemini elde edilir. Bu da bize  $\mathcal{A}_{1a}$  genlik fonksiyonunun  $V_{ga}$  grup hızı;  $\mathcal{A}_{1b}$  genlik fonksiyonunun da  $V_{gb}$  grup hızı ile ilerleyen bir referans çerçevesinde sabit kaldıklarını gösterir. Yani

$$\mathcal{A}_{1j} = \mathcal{A}_{1j}(x_1 - V_{gj}t_1, x_2, t_2) \quad j = a, b \quad (41)$$

yapısında fonksiyonlardır. Böylece (34) denkleminin  $l = 1$  için çözümü

$$U_{2j}^{(1)} = \mathcal{A}_{2j} R_j - i \frac{\partial \mathcal{A}_{1j}}{\partial x_1} \left( \frac{\partial R_j}{\partial k_j} + V_{gj} \frac{\partial R_j}{\partial \omega_j} \right) \quad (42)$$

olarak elde edilir. Burada  $\mathcal{A}_{2j}$ ,  $j = a, b$ , fonksiyonları aynı yönde ilerleyen dalgaların ikinci mertebe yavaş değişen genliğini temsil eden fonksiyonlardır ve gerektiğinde daha üst mertebe pertürbasyon problemlerinin çözümlerinden elde edilebilir. Fakat biz bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalga yayılımı ile ilgilendiğimiz için yalnızca birinci mertebe uniform geçerli çözüm inşa edilmeye çalışılmaktadır. Bunun içinde  $\mathcal{A}_{1a}$  ve  $\mathcal{A}_{1b}$  genlik fonksiyonlarının belirlenmesi yeterli olacaktır. Birinci ve ikinci mertebe çözümler üçüncü mertebe problemde kullanılırsa ikinci mertebe problemde olduğu gibi homojen olmayan bir sınırdeğer problemi elde edilir. Bu problemin çözümü de ikinci mertebe pertürbasyon probleminde olduğu gibi  $u_3 = \bar{u}_3 + \tilde{u}_3$  şeklinde iki parçaya ayrılabilir.  $\bar{u}_3$  fonksiyonu homojen olmayan denklemin özel çözümü,  $\tilde{u}_3$  ise bu denkleme karşı gelen homojen denklem ve  $\bar{u}_3$  çözümünün sınır koşullarında kullanılmasıyla elde edilen homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözüm olsun. Uzun hesaplamalar neticesinde üçüncü mertebe genlik vektörü  $U_{3j}^{(l)}$  için aşağıdaki uygunluk koşulu elde edilir:

$$W_j^{(l)} U_{3j}^{(l)} = b_{3j}^{(l)}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad j = a, b \quad (43)$$

ve

$$W_j^{(L)} U_{3j}^{(L)} = b_{3j}^{(L)}. \quad (44)$$

Burada  $W_j^{(L)}$  matrisi (18) ile tanımlanan  $W_j^{(l)}$  matrisinde  $lk_j = 2k_j \pm k_n$  ve  $l\omega_j = 2\omega_j \pm \omega_n$ ,  $j, n = a, b, j \neq n$ , yazılarak elde edilen matristir.

$$l \neq 1, 3 \text{ için } b_{3j}^{(l)} \equiv \mathbf{0} \quad \text{ve} \quad l = 1, 3 \text{ için } b_{3j}^{(l)} \neq \mathbf{0} \quad (45)$$

$$l \neq 1 \text{ için } \det W_j^{(l)} \neq 0 \Rightarrow l = 3 \text{ için } U_{3j}^{(3)} = W_j^{(3)-1} b_{3j}^{(3)}$$

dir. Bu nedenle  $l \neq 1$  için  $\det W_j^{(l)} \neq 0$  varsayımı hatırlanırsa

$$l \neq 1, 3 \text{ için } U_{3j}^{(l)} \equiv \mathbf{0} \quad \text{ve} \quad l = 3 \text{ için } U_{3j}^{(3)} = W_j^{(3)-1} b_{3j}^{(3)} \quad (46)$$

olarak bulunur. Benzer olarak  $b_{3j}^{(L)} \neq \mathbf{0}$  ve  $\det W_j^{(L)} \neq 0$  olduğundan

$$U_{3j}^{(L)} = W_j^{(L)-1} b_{3j}^{(L)} \quad (47)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan  $l = 1$  için  $\det W_j^{(1)} = 0$  ve  $b_{3j}^{(1)} \neq \mathbf{0}$  olduğundan, bu durumda (37) sisteminin bir çözüme sahip olabilmesi için  $L_j$  (39) ile tanımlanan bir satır vektör olmak üzere

$$L_a b_{3a}^{(1)} = \mathbf{0} \quad \text{ve} \quad L_b b_{3b}^{(1)} = \mathbf{0} \quad (48)$$

uygunluk koşullarını sağlaması gerekir. Bu incelemede sadece  $b_{3j}^{(1)}$   $j = a, b$ , vektörlerinin açık yapısı gerekli olacağından uzun ara işlemlerden sonra  $b_{3a}^{(1)}$  ve  $b_{3b}^{(1)}$  vektörleri aşağıdaki formda yazılabilir:

$$b_{3a}^{(1)} = B_{3a} + F_{aa} |\mathcal{A}_{1a}|^2 \mathcal{A}_{1a} + F_{ba} |\mathcal{A}_{1b}|^2 \mathcal{A}_{1a}$$

$$\mathbf{b}_{3b}^{(1)} = \mathbf{B}_{3b} + \mathbf{F}_{bb} |\mathcal{A}_{1b}|^2 \mathcal{A}_{1b} + \mathbf{F}_{ab} |\mathcal{A}_{1a}|^2 \mathcal{A}_{1b}. \quad (49)$$

Burada  $\mathbf{B}_{3a}$  ve  $\mathbf{B}_{3b}$  ortama ait lineer malzeme özelliklerine sahip,  $\mathbf{F}_{aa}$ ,  $\mathbf{F}_{bb}$ ,  $\mathbf{F}_{ba}$  ve  $\mathbf{F}_{ab}$  vektörleri ise hem lineer hem de lineer olmayan malzeme özelliklerine sahip sütun vektörlerdir ve açık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{3j} = & -i \left( \frac{\partial \mathcal{A}_{2j}}{\partial t_1} \frac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j} - \frac{\partial \mathcal{A}_{2j}}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial k_j} \right) \mathbf{R}_j - i \left( \frac{\partial \mathcal{A}_{1j}}{\partial t_2} \frac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j} - \frac{\partial \mathcal{A}_{1j}}{\partial x_2} \frac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial k_j} \right) \mathbf{R}_j \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_{1j}}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j \partial k_j} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_{1j}}{\partial x_1 \partial t_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial k_j^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_{1j}}{\partial x_1^2} \right) \mathbf{R}_j \\ & + \left( \frac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial k_j} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_{1j}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_{1j}}{\partial x_1 \partial t_1} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial k_j} + V_{gj} \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \omega_j} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

$j=a,b$  için ve  $n \neq m$ , olmak üzere  $n, m = a, b$  için

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{jj} = & \left( -\frac{e^{-ihk_j p_j} h k_j^4 n_T (9 + 2p_j^2 + 9p_j^4)}{c_T^2}, \frac{h k_j^4 n_T e^{-ihk_j p_j} \cos(2hk_j p_j) (9 + 2p_j^2 + 9p_j^4)}{c_T^2} \right)_T \\ \mathbf{F}_{nm} = & \left( -\frac{4e^{-ihk_m p_m} h k_n^2 k_m^2 n_T (3 + p_m^2 + p_n^2 (1 + 3p_m^2))}{c_T^2}, \frac{4e^{-ihk_m p_m} h \cos(2hk_m p_m) k_n^2 k_m^2 n_T (3 + p_m^2 + p_n^2 (1 + 3p_m^2))}{c_T^2} \right)_T \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_{2j}$  genlik fonksiyonlarının,  $\mathcal{A}_{1j}$  genlik fonksiyonları gibi  $\{x_1, t_1\}$  değişkenlerine bağlılığının (41) de olduğu gibi  $\mathcal{A}_{2j} = \mathcal{A}_{2j}(x_1 - V_{gj}t_1, x_2, t_2)$  formunda olduğunu kabul edersek ve yeni boyutsuz değişkenler ve sabitleri de

$$\tau = \omega_a t_2, \quad \xi = k_a (x_1 - V_{ga} t_1), \quad \mathcal{A}_j = k_a \mathcal{A}_{1j},$$

$$\Gamma_j = k_a^2 \tilde{\Gamma}_j / \omega_a, \quad \Delta_{nj} = \tilde{\Delta}_{nj} / \omega_a k_a^2, \quad \Lambda = k_a (V_{gb} - V_{ga}) / \varepsilon \omega_a \quad (51)$$

$$\tilde{\Gamma}_j = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial k_j^2}, \quad \tilde{\Delta}_{nj} = -L_j \cdot \mathbf{F}_j / \left( L_j \frac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j} \mathbf{R}_j \right)$$

olarak tanımlarsak, (46)'da verilen uygunluk koşulları, genlik fonksiyonları  $\mathcal{A}_a$  ve  $\mathcal{A}_b$  için aşağıdaki genel kuple nonlineer Schrödinger denklemi (KNLS) olarak da bilinen lineer olmayan denklem sistemine dönüşür:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \mathcal{A}_a}{\partial \tau} + \Gamma_a \frac{\partial^2 \mathcal{A}_a}{\partial \xi^2} + \Delta_{aa} |\mathcal{A}_a|^2 \mathcal{A}_a + \Delta_{ba} |\mathcal{A}_b|^2 \mathcal{A}_a &= 0 \\ i \frac{\partial \mathcal{A}_b}{\partial \tau} + i\Lambda \frac{\partial \mathcal{A}_b}{\partial \xi} + \Gamma_b \frac{\partial^2 \mathcal{A}_b}{\partial \xi^2} + \Delta_{bb} |\mathcal{A}_b|^2 \mathcal{A}_b + \Delta_{ab} |\mathcal{A}_a|^2 \mathcal{A}_b &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Burada  $\Gamma_a$  ve  $\Gamma_b$  katsayıları lineer dispersiyon katsayıları,  $\Delta_{aa}$  ve  $\Delta_{bb}$  katsayıları, dalga paketlerinin self modülasyonlarını tanımlayan hem lineer hem de nonlineer malzeme sabitlerini içeren nonlineer katsayılarıdır.  $\Delta_{ab}$  ve  $\Delta_{ba}$  katsayıları ise iki dalga paketinin birbirleri ile etkileşen modülasyon terimlerini gösteren hem lineer hem de nonlineer malzeme sabitlerini içeren katsayılarıdır. KNLS denkleminin analitik ve nümerik çözümleri üzerine birçok çalışma bulunmaktadır [1,4,6,10]. Dikkat edilirse (52)'de yer alan denklemlerinin verilen  $\mathcal{A}_a(\xi, 0) = \mathcal{A}_{a0}$  ve  $\mathcal{A}_b(\xi, 0) = \mathcal{A}_{b0}$  başlangıç koşulları için çözümleri bulunursa birinci mertebe çözümleri (27)'deki çözüm formları kullanılarak elde edilirler. Buradaki  $\mathcal{A}_{a0}$  ve  $\mathcal{A}_{b0}$  başlangıç değerleri tabakadaki yer değiştirmelerin başlangıç değerlerine bağlıdır.

Eğer grup hızları eşit olan iki dalga paketinin etkileşimi problemi incelenirse, yani yukarıdaki denklemlerde  $V_{gb} = V_{ga}$  seçilirse  $\Lambda = 0$  olur ve böylece (52) denklemleri aşağıdaki KNLS denklemlerine indirgenir:

$$i \frac{\partial \mathcal{A}_a}{\partial \tau} + \Gamma_a \frac{\partial^2 \mathcal{A}_a}{\partial \xi^2} + \Delta_{aa} |\mathcal{A}_a|^2 \mathcal{A}_a + \Delta_{ba} |\mathcal{A}_b|^2 \mathcal{A}_a = 0$$

$$i \frac{\partial \mathcal{A}_b}{\partial \tau} + \Gamma_b \frac{\partial^2 \mathcal{A}_b}{\partial \xi^2} + \Delta_{bb} |\mathcal{A}_b|^2 \mathcal{A}_b + \Delta_{ab} |\mathcal{A}_a|^2 \mathcal{A}_b = 0. \quad (53)$$

Değişik uygulama alanlarında, dalga etkileşimi problemlerinin çözümlerinin incelenmesinde KNLS denklemleri ile karşılaşılmaktadır. KNLS denklem sisteminin analitik ve nümerik çözümlerinin incelenmesi üzerine literatürde de bir çok çalışma mevcuttur, daha ayrıntılı bilgi için [1,4,5,6] numaralı kaynaklara ve bu kaynaklarda adı geçen çalışmalara da bakılabilir.

$\mathcal{A}_b = 0$  kabulü yapılırsa (53) denklem sistemi, tabakada yayılan ve  $\mathcal{A}_a$  genliğine sahip tek bir SH dalgasının modülasyonunu karakterize eden bir NLS denklemine indirgenmiş olur [2]:

$$i \frac{\partial \mathcal{A}_a}{\partial \tau} + \Gamma_a \frac{\partial^2 \mathcal{A}_a}{\partial \xi^2} + \Delta_{aa} |\mathcal{A}_a|^2 \mathcal{A}_a = 0 \quad (54)$$

Bilindiği gibi NLS denkleminin çözümlerinin varlığı da denklemin dispersiyon terimi,  $\Gamma_a$ , ile nonlineer terimi,  $\Delta_{aa}$ ,'nın çarpımının işaretine bağlıdır.  $|\xi| \rightarrow \infty$  da sifıra giden bir başlangıç uyarısı eğer  $\Gamma_a \Delta_{aa} > 0$  ise  $\mathcal{A}_a = a e^{i\gamma \tau} \text{sech}(\delta \xi)$  formunda bir dizi solitona fakat  $\Gamma_a \Delta_{aa} < 0$  ise sönen titreşimlere dönüşür. Bu nedenle soliton tipinden çözümlerin mevcut olup olamayacağına karar verebilmek için  $\Gamma_a \Delta_{aa}$  teriminin işaretinin dalga sayısına ve ortamın mekaniksel özelliklerine göre ne şekilde değiştiğini bilmek gerekir.

Diğer taraftan KNLS denklemlerinin düzlem dalga çözümleri için bir lineer kararlılık (stabilite) analizi [10]'da yapılmıştır. Eğer

$$A = \Gamma_a \Gamma_b (\Delta_{aa} \Delta_{bb} - \Delta_{ab} \Delta_{ba}) < 0 \quad (55)$$

ise düzlem dalga çözümleri kararsız (unstable) olmaktadır. Diğer taraftan (55) sağlanıyorsa iken,

$$B = (\Gamma_a \Delta_{bb} - \Gamma_b \Delta_{ba}) \frac{A}{\Gamma_a \Gamma_b} > 0 \text{ ve } C = (\Gamma_b \Delta_{aa} - \Gamma_a \Delta_{ab}) \frac{A}{\Gamma_a \Gamma_b} > 0 \quad (56)$$

ise solitary zarf çözümleri

$$\mathcal{A}_a = \alpha_1 e^{i \theta_1 \tau} \text{sech}(\delta \xi), \quad \mathcal{A}_b = \alpha_2 e^{i \theta_2 \tau} \text{sech}(\delta \xi) \quad (57)$$

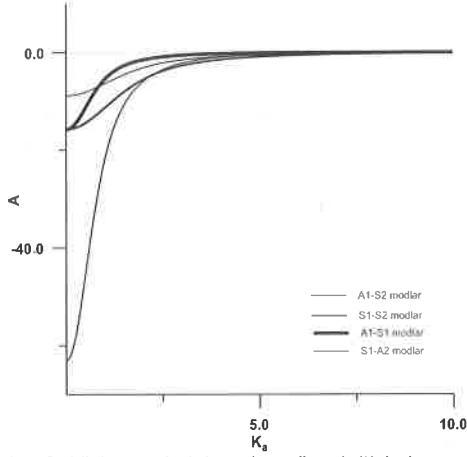
formunda elde edilebilirler. Solitary zarf çözümlerinin varlığı KNLS denklemlerinin lineer ve nonlineer katsayılarını içeren  $A, B$  ve  $C$  ifadelerinin işaretine bağlıdır. Bu nedenle bu çalışmada ortamı oluşturan malzemenin nonlineerliğinin aynı yönde ilerleyen ve grup hızları eşit olan dalgaların yayılımı (etkileşimi) üzerindeki etkisi incelenecektir. Daha önceden de belirtildiği gibi tabakada yayılan SH dalgalarına ait dispersiyon bağıntısının simetrik ve antisimetrik modları mevcuttur. Birinci dalgaya ait  $(k_a, c_a)$  ve ikinci dalgaya ait  $(k_b, c_b)$  için aşağıdaki seçimler yapılmıştır:

1. S1-S2 modları: Dispersiyon bağıntısının simetrik birinci dalı üzerinde  $(k_a, c_a)$  ve simetrik ikinci dalı üzerinde  $(k_b, c_b)$ , bu durumda  $k_b / k_a = 2 = r$  olmaktadır
2. A1-S1 modları: Dispersiyon bağıntısının antisimetrik birinci dalı üzerinde  $(k_a, c_a)$  ve simetrik birinci dalı üzerinde  $(k_b, c_b)$ , bu durumda  $k_b / k_a = 2 = r$  olmaktadır
3. S1-A2 modları: Dispersiyon bağıntısının simetrik birinci dalı üzerinde  $(k_a, c_a)$  ve antisimetrik ikinci dalı üzerinde  $(k_b, c_b)$ , bu durumda  $k_b / k_a = 1,5 = r$  olmaktadır.
4. A1-S2 modları: Dispersiyon bağıntısının antisimetrik birinci dalı üzerinde  $(k_a, c_a)$  ve simetrik ikinci dalı üzerinde  $(k_b, c_b)$ , bu durumda  $k_b / k_a = 4 = r$  olmaktadır.

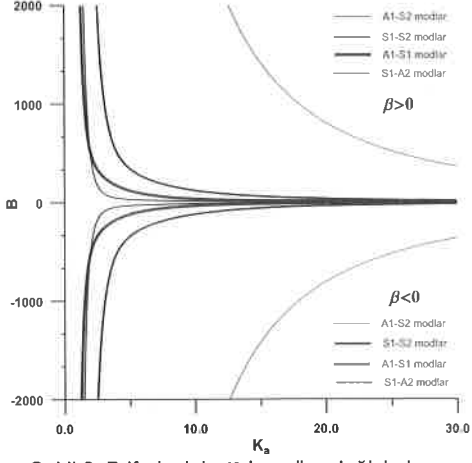
Burada bir noktaya açıklık getirmek gerekmektedir: İncelemenin başında  $k_a$  ve  $k_b$  dalga sayıları civarında ve bu dalga sayılarına karşılık gelen  $\omega_a$  ve  $\omega_b$  açısal frekanslar civarında merkezlenmiş ve aynı yönde ilerleyen iki dalganın etkileşimi incelendiğinden bu iki dalganın birbirlerinin harmonikleri olmadıklarını ve bu yüzden de  $k_a < k_b$  ve  $\omega_a < \omega_b$  olmak üzere  $k_b \neq M k_a$ ,  $\omega_b \neq M \omega_a$  ve  $M \in \{3, 5, 7, \dots\}$  olduğunu kabul ettiğimizi belirtmiştik. Fakat  $(k_a, \omega_a)$



dispersiyon bağıntısının birinci antisimetrik modu,  $(k_b, \omega_b)$  ise ikinci antisimetrik modu üzerinde seçildiğinde dalga sayıları arasında  $k_b = 3k_a$  eşitliği ve buna bağlı olarak açılal frekanslar arasında  $\omega_b = 3\omega_a$  eşitliği gerçekleşmektedir, yani harmonik rezonans oluşmaktadır. Bu yüzden bu tip bir seçim incelemeye dahil edilmemiştir.



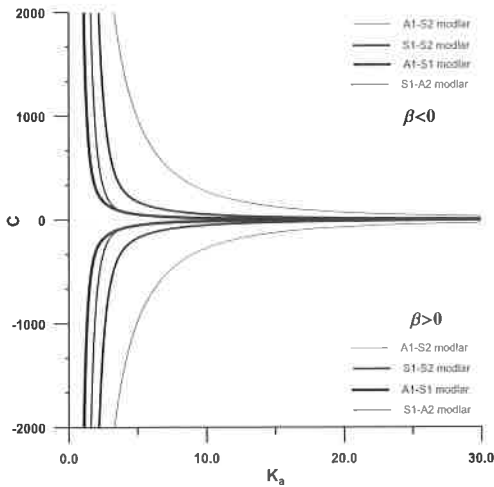
1. Şekil 1: A teriminin  $K_a$ 'ya göre değişimi



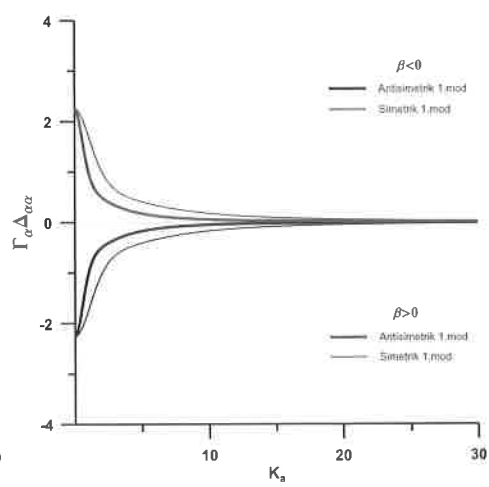
Şekil 2: B ifadesinin  $K_a$ 'ya göre değişimi

Nonlinear malzeme parametresi  $\beta = \frac{n_T}{c_T^2}$  için ve sırasıyla pozitif,  $\beta > 0$ , ve negatif,  $\beta < 0$ , değerleri seçilerek A, B ve C terimlerin yukarıda verilen dört farklı durum için boyutsuz dalga sayısı  $K_a$ 'ya göre değişimi ve işaret incelemesi Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3 'de yer almaktadır.

Dikkat edilirse  $\beta > 0$  için  $A < 0$ ,  $B > 0$ ,  $C < 0$  ve  $\beta < 0$  için  $A < 0$ ,  $B < 0$ ,  $C > 0$  olmaktadır. Yani, (53)'de yeralan KNLS denklem sisteminin (57) formunda zarf soliton çözümleri mevcut değildir. Ama Şekil 4'de de görüleceği üzere  $\beta < 0$  için (54)'de verilen NLS denkleminin zarf soliton çözümleri mevcuttur, ama  $\beta > 0$  için ise bu çözümler oluşmamaktadır [2].



Şekil 3: C ifadesinin  $K_a$ 'ya göre değişimi



Şekil 4:  $\Gamma_a \Delta_{aa}$  ifadesinin  $K_a$ 'ya göre değişimi

**Kaynaklar**

- [1] Liu,P., Li,Z. Ve Lou,S., *A Class of Coupled Nonlinear Schrödinger Equations: Painleve Property, Exact Solutions, and Application to Atmospheric Gravity Waves*, Appl. Math. Mech., Cilt.31, s.1383-1404, 2010
- [2] Ahmetolan, S ve Teymur, M., *Nonlinear Modulation of SH Waves in an Incompressible Hyperelastic plate*. ZAMP, 58(3), 457-474, 2007.
- [3] Ahmetolan, S. ve Teymur, M., *Nonlinear Modulation of SH Waves in a Two Layered Plate and Formation of Surface SH Waves*. Int. J. Non-Linear Mechs., 38, 1237-1250, 2003.
- [4] Tan, B. ve Boyd, J.P., *Stability and Long Time Evolution of the Periodic Solutions to the Two Coupled Nonlinear Schrödinger Equations*. Chaos, Solitons & Fractals, 12, 721-734, 2001.
- [5] Teymur, M., *Nonlinear Interaction of Two Co-;Directional Surface SH Waves in a Layered Elastic Half-Space*, 16<sup>th</sup> International Symposium on Nonlinear Acoustics, Moscow,Vol:1 , 69-72, 2002.
- [6] Porupov, A.V. ve Parker, D.F., *Some General Periodic Solutions to Coupled Nonlinear Schrödinger Equations*. Wave Motion, 29, 97-109, 1999.
- [7] Maugin, G.A. ve Hadouaj, H., *Solitary Surface Transverse Waves on an Elastic Substrate Coated with a Thin Film*. Phy.Rev. B, 44(3),1266-1280, 1991.
- [8] Teymur, M., *Nonlinear Modulation of Love Waves in a Compressible Hyperelastic Layered Half Space*. Int. J. Engng. Sci., 26(9), 907-927, 1988.
- [9] Jeffrey, A. and Kawahara, T., *Asymptotic Methods in Non-linear Wave Theory*. Pitman Advanced Publishing, Boston, 1982.
- [10] Roskes, G.J., *Some Nonlinear Multiphase Interactions*. Stud. Appl. Math. , 55, 231-238, 1976.
- [11] Graff, K.F., *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover Publications, New York, 1975.