XVII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
5-9 Eylül 2011, Fırat Üniversitesi, Elazığ

MİKROİZOTROPİK MALZEMELERDE DALGA YAYILIMI VE TİTREŞİM ANALİZİ İLE MALZEME SABİTLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Ahmet Kırış*
İTÜ, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstanbul

Esin İnan†
Işık Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İstanbul

ÖZET

Bu çalışmada mikro yapılı malzemeler, mikroizotropi kavramı ile modellenerek dalga yayılımı ve titreşim analizi ile bilinmeyen malzeme sabitlerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Mikroizotropi kavramı, makro izotropide olduğu gibi, mikro ölçekte de mikro gerilme ve mikro şekildeğiştirme bileşenlerinin asal doğrultularının çakıştığı kabulüne dayanmaktadır. Mikroizotropik teori ile modellenen malzemelerde bilinmeyen ek malzeme sabiti sayısı sekizdir. Çalışmada bilinmeyen bu ek sabitlerin belirlenebilmesi amacıyla, farklı sınır koşullarına haiz mikroizotropik plağın titreşim analizi yapılmıştır. Ortaya çıkan frekans spektrumu incelendiğinde, klasik frekansların yanı sıra teoriden kaynaklanan ek frekansların varlığı ve dahası bu ek frekansların, klasik frekanslara göre mikro malzeme sabitlerine daha duyarlı olduğu gözlenmiştir. Farklı sınır koşulları için elde edilen bu frekans spektrumunun, klasik frekans aralığı ile karşılaştırılması ile ters bir optimizasyon problemi kurularak ortaya çıkan bu ek malzeme sabitlerinin belirlenebileceği öngörülmektedir.

GİRİŞ

Bilindiği gibi klasik elastisite teorisi çoğu kez mikro yapılı malzemelerin incelenmesinde yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle altmışlı yıllardan bu yana malzemenin mikro yapısındaki özellikler gözetilerek çeşitli teoriler üretilmiştir. Bunlardan biri malzemenin her parçacığının makro şekil değiştirmenin yanı sıra ondan bağımsız olarak mikro ölçekte de şekil değiştirme yapabildiği varsayımına dayanan ve Eringen, Şuhubi [1-2] tarafından geliştirilen mikromorfik teoridir.

Ancak mikro yapılı malzemeler için oldukça gerçekçi bir model olan mikromorfik teorinin, çok sayıda bilinmeyen malzeme özelliği içermesi nedeniyle uygulama alanında çok kullanışlı olduğu söylenemez. Bu nedenle zamanla, daha az sayıda malzeme sabiti içeren alt teoriler geliştirilmesi gereği duyulmuştur. Bunlar arasında mikro ölçekte parçacıkların yalnızca rijit dönme yapabildiğini varsayan "mikropolar teori"[3], rijit dönmenin yanı sıra hacimsel mikro genleşmelerin de olduğu varsayılan "mikrogermeli ortam teorisi"[4] veya yalnızca mikro uzamaların göz önüne alındığı "mikro uzamalı ortam" teorileri sayılabilir. Tüm bu ve benzeri teoriler farklı özellikleri nedeniyle farklı problemler için gerçeği daha iyi yansıtmaktadırlar. Örneğin mikropolar teori sıvı kristallerin modellenmesinde çok iyi sonuçlar verdiği halde hasar mekaniğinde yetersiz kalmakta onun yerine mikrogermeli ortamlar teorisi ile hasar modellemesi daha gerçekçi sonuçlar vermektedir. Ancak bu tür basitleştirmelerle de "bilinmeyen malzeme sabitleri" problemi tam olarak ortadan kalkmamakta, yalnızca sayıları azaltmış olmaktadır. Örneğin lineer mikromorfik teoride 16 [1-2] adet olan ek ve bilinmeyen malzeme sabiti sayısı mikropolar teoride 4, mikro germeli ortam teorisinde 7 ye düşmekte ama yine sorun bilinmeyen olarak teorideki yerini korumaktadır. Bu bilinmeyen malzeme sabitleri sorununa yanıt verebilmek amacıyla Kırış ve İnan [5] tarafından dikdörtgen plakların

* Yar. Doç. Dr. Matematik Böl. kiris@itu.edu.tr
† Prof. Dr. İnşaat Böl. inan@isikun.edu.tr

titreşim analizinden yararlanarak bir optimizasyon yöntemi geliştirilmiş ve mikrogermeli ortamlarda ortaya çıkan bilinmeyen malzeme sabitleri için üst sınırlar elde edilmiştir.

Yukarıda değinildiği gibi yapılan varsayımlarla bilinmeyen malzeme sabitlerinin sayısı azaltılmış olmakla beraber bu yaklaşımlarla mikromorfik teorinin uygulanabilirlik alanının daraltılmış olduğu açıktır. Bu daralmayı biraz daha açabilmek için zaman zaman faklı yaklaşımlar da aranmıştır. Ara teori olarak adlandırılabilecek bu varsayımlardan biri Koh [6,7] tarafından önerilen ve "mikroizotropik teori" olarak adlandırılan bir yaklaşım olup uygulama alanı mikropolar ve mikrogermeli alanlar kadar geniş değilse de hasar mekaniği başta olmak üzere bazı özel problemlerde uygulama alanı bulabilmektedir. Bu yaklaşımın dayandığı temel düşünce mikro ölçekte de karşılıklı mikro gerilme- mikro şekil değiştirme bileşenlerinin asal doğrultularının çakıştığı varsayımıdır. Bilindiği gibi cismin makro ölçekte bu özelliğe sahip olması yani gerilme ve şekil değiştirmenin asal doğrultuların çakışması benzer özelliğin mikro ölçekte de olmasını gerektirmez. Koh'un vermiş olduğu tanımla bu çakışma özelliği mikro boyuta da taşınmış olmaktadır. Bazı problemlerde gerçeği iyi yansıtabilecek olan bu teori ile klasik elastisite teorisindeki katsayılara ek olarak 8 malzeme sabiti ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışma mikroizotropik malzemenin mikro elastik sabitlerinin bulunması konusu üzerinde çalışılmıştır. Bu amaçla, mikro yapılı ve farklı sınır koşullarına sahip dikdörtgen bir plak mikroizotropik ortam teorisi ile modellenmiş ve serbest titreşimleri incelenmiştir.

Mikropolar ve mikrogermeli ortam teorilerinde olduğu gibi mikroizotropik ortam teorisinde de klasik elastisite teorisinde gözlenen dalgalara ek olarak yeni mikro dalgalar ortaya çıkmaktadır. Mikroizotropik plağın serbest titreşim problemini incelemek için, yerdeğiştirme ve mikro şekildeğiştirme bileşenlerinin genlik fonksiyonları Chebyshev polinomları ile ifade edilerek, plağın sınır koşullarına uygun sınır fonksiyonları ile çarpılarak seriye açılmış ve Ritz yöntemi mikroizotropik ortam teorisine genişletilmiştir [5]. Böylece, plağın toplam enerji fonksiyonunun ekstremum problemi, bir özdeğer problemine indirgenmiş ve bu özdeğer probleminin çözümü ile farklı sınır koşullarına sahip plağın frekansları elde edilmiştir.

Mikroizotropik ortam için elde edilen bu frekanslar, klasik teori ile elde edilen ve klasik frekanslar olarak isimlendirilecek olan frekans spektrumundan daha farklıdır. Başka bir deyişle mikroizotropik teori de klasik frekanslara ek olarak, bu frekansların arasında mikro frekanslar olarak tanımlanabilecek olan ek frekanslar gözlenmiştir. Bu durum, dalga analizinde gözlenen klasik yerdeğiştirme dalgalarına ek olarak ortaya çıkan dalgalar nedeniyle beklenen bir durumdur. Dahası bu ek frekanslar klasik frekanslara göre mikro malzeme sabitlerinin değişiminden daha çok etkilenmektedirler. Yani mikro sabitlerin değerleri büyüdükçe bu ek frekanslar klasik frekanslara oranla daha hızlı değişmekte ve zamanla incelenen frekans aralığının dışına çıkmaktadırlar. Mikro sabitler ancak belirli bir eşik değere ulaştığında mikro frekansların yanı sıra klasik frekanslarda da değişim başlamakta, yani ortam artık mikro özelliklerini kaybetmeye ve mikro yapı malzemenin makro değişimini de etkilemeye başlamaktadır.

Bu gözlem, hesaplanan frekanslarla deneysel frekanslar arasında farkın minimizasyonuna dayanan bir optimizasyon problemine temel oluşturmaktadır [5]. Ancak deneysel olarak ek frekansları ölçmek ve klasik frekanslardan ayırmak mümkün olmadığından, kurulan optimizasyon problemi mikroizotropik teori ile hesaplananlarla, klasik teoriden elde edilen klasik frekanslar arasındaki farkın ve ek olarak ortaya çıkan mikro frekansların sayısının minimize edilmesi şeklinde iki farklı amaç fonksiyonuna dayanmaktadır.

Sonuç olarak, bu ters optimizasyon probleminin çözümü ile ek frekansların istenen frekans aralığının dışına çıktığı ve klasik frekansların pertürbe olmaya başladığı andaki mikroizotropik malzeme sabitleri üst sınır değerleri olarak elde edilebilir. Bu değerlerden sonra malzeme mikro yapısını kaybetmekte ve makro davranışı etkilemeye başlamaktadır. Dolayısı ile bu noktada bulunan değerler mikroizotropik bir ortam için ortaya çıkan ek malzeme sabitlerinin üst sınırı olarak kabul edilebilmektedir.

TEMEL DENKLEMLER

Yukarıda değinildiği gibi genel olarak malzemenin makro yapıda izotropik olması mikro yapıda da izotropik olmasını gerektirmez. Bir başka deyişle izotropik makro yapıda ortaya çıkan bazı eksen çakışmalarının mikro yapıda oluşması gerekmez. Örneğin makro yapıda gerilme ve şekil değiştirme bileşenlerinin asal doğrultularının çakışması mikro yapıda benzer çakışmanın olması anlamına gelmez. Bu tür çakışmaların olması hali özel malzeme türlerinin tanımlanması anlamına gelmektedir.

Bu çalışmada mikro ölçekte belirli mikro gerilme ve mikro şekil değiştirme bileşenlerinin asal doğrultularının çakıştığı özel bir durum olan mikroizotropik malzemeler ele alınmıştır [6,7]. Burada mikro ölçekte hangi gerilme bileşenlerinin hangi şekil değiştirme bileşenleri ile eşleştirileceği sorunu enerji ifadesinde ortaya çıkan çiftlerle aşılabilir, yani mikroizotropik teoride temel olarak

1- Gerilme tansörünün $t_{(kl)}$ simetrik kısmının asal doğrultularının makro şekil değiştirme tansörününkilerle $\varepsilon_{(kl)}$ çakıştığı,
2- Simetrik mikrogerilme tansorünün $\sigma_{(kl)}$ asal doğrultularının mikro şekildeğiştirme tansörününkilerle $\phi_{(kl)}$ çakıştığı,
3- Simetrik gerilme-moment tansorünün $t_{k(lm)}$ asal doğrultularının simetrik mikro şekildeğiştirme gradyanınkilerle $\phi_{(lm)k}$ çakıştığı,

varsayılmaları yapılabilir. Özellikle hasar mekaniğinde gerçeği iyi yansıtabileceği düşünülen bu teori ile, aşağıda görüleceği gibi klasik elastisite teorisinde bulunan katsayılara ek olarak 8 sabit daha ortaya çıkmaktadır.

Yukarıda verilen varsayımlarla, mikroizotropik malzemelerde bünye denklemleri [6,7]

$$\begin{aligned} &t_{(kl)} = A_1 e_{rr}\delta_{kl} + 2A_2 e_{kl}, \quad t_{[kl]} = \sigma_{[kl]} = 2A_3 e_{mkl}(r_m + \phi_m), \quad \sigma_{(kl)} = -A_4\phi_{rr}\delta_{kl} - 2A_5\phi_{(kl)}, \\ &t_{k(lm)} = B_1\phi_{rr,k}\delta_{lm} + 2B_2\phi_{(lm),k}, \quad m_{kl} = -2\left(B_3\phi_{l,k} + B_4\phi_{k,l} + B_5\phi_{r,r}\delta_{kl}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

şeklinde yazılabilir [7]. Burada

$$\begin{aligned} &A_1 = \lambda + \sigma_1, \quad A_2 = \mu + \sigma_2, \quad A_3 = \sigma_5, \quad A_4 = -\sigma_1, \quad A_5 = -\sigma_2, \\ &B_1 = \tau_3, \quad 2B_2 = \tau_7 + \tau_{10}, \quad B_3 = 2\tau_4 + 2\tau_9 + \tau_7 - \tau_{10}, \quad B_4 = -2\tau_4, \quad B_5 = -2\tau_9. \end{aligned} \tag{2}$$

olarak verilmektedir. $\lambda, \mu, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_5, \tau_3, \tau_4, \tau_7, \tau_9$ ve τ_{10} malzeme katsayıları olup σ_i ve τ_i katsayıları Eringen [1-2] anlamında kullanılmışlardır. Ayrıca, t_{kl}, σ_{kl} makro ve mikro gerilme tansörleri, t_{klm} gerilme-moment tansörü, $m_{kl} = e_{lmn}t_{knm}$ moment tansörü, $e_{kl} = u_{(k,l)}$ genleme tansörü, $\phi_{(kl)}$ mikro genleme tansörü, u_k yerdeğiştirme vektörü, $r_k = \frac{1}{2}e_{klm}u_{m,l}$ ve $\phi_k = \frac{1}{2}e_{klm}\phi_{lm}$ makro ve mikro dönme vektörleri ve e_{klm} permütasyon sembolüdür.

Mikroizotropik katının hareket denklemleri [6,7]

$$\begin{aligned} &(A_1 + A_2 - A_3)u_{r,rk} + (A_2 + A_3)u_{k,rr} + 2A_3 e_{mlk}\phi_{m,l} + \rho f_k = \rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \\ &B_1\phi_{rr,mm}\delta_{kl} + 2B_2\phi_{(kl),rr} - A_4\phi_{rr}\delta_{kl} - 2A_5\phi_{(kl)} + \rho f_{(kl)} = \frac{1}{2}\rho j\frac{\partial^2\phi_{(kl)}}{\partial t^2} \\ &2B_3\phi_{k,rr} + 2(B_4 + B_5)\phi_{r,rk} - 4A_3(r_k + \phi_k) - \rho l_k = \rho j\frac{\partial^2\phi_k}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{3}$$

ile verilmektedir. Genel olarak enerjinin korunumu denklemi termal etkiler ihmal edilerek

$$\rho\dot{\varepsilon} = t_{kl}v_{l,k} - \sigma_{kl}v_{lk} + t_{klm}v_{lm,k} \tag{4}$$

şeklinde yazılabilir. Burada ε birim kütle başına iç enerji yoğunluğu, $v_k = \dot{u}_k$ ve $v_{kl} = \dot{\phi}_{kl}$ hız vektörü bileşenleri olup yukarıdaki tanımlar kullanılarak integre edilirse [7], mikroizotropik ortamın birim hacim başına lineer elastik genleşme enerjisi yoğunluğu

$$\rho\varepsilon - \rho\varepsilon_0 = W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 \tag{5}$$

olarak elde edilir. Burada makro genleme, makro ve mikro dönme, mikro genleme, mikro genleme gradyanı ve mikro dönme gradyanından kaynaklanan potansiyel enerji yoğunlukları sırasıyla

$$W_1 = \frac{1}{2}\left[A_1 e_{kk}e_{mm} + 2A_2 e_{km}e_{mk}\right], \quad W_2 = 2A_3(r_k + \phi_k)(r_k + \phi_k), \quad W_3 = \frac{1}{2}\left[A_4 \phi_{kk}\phi_{mm} + 2A_5 \phi_{(km)}\phi_{(mk)}\right],$$
$$W_4 = \frac{1}{2}\left[B_1 \phi_{kk,m}\phi_{ll,m} + 2B_2 \phi_{(kl),m}\phi_{(lk),m}\right], \quad W_5 = B_3 \phi_{k,m}\phi_{k,m} + B_4 \phi_{m,k}\phi_{m,k} + B_5 \phi_{k,k}\phi_{m,m} \tag{6}$$

dir. Ayrıca mikroizotropik ortam için birim kütle başına kinetik enerji yoğunluğu da

$$K = \frac{1}{2}\rho\dot{u}_k \cdot \dot{u}_k + \frac{1}{2}\rho j\dot{\phi}_{kl} \cdot \dot{\phi}_{kl} + \frac{1}{2}\rho j\dot{\phi}_k \cdot \dot{\phi}_k \tag{7}$$

olarak yazılabilir.

DALGA YAYILIMI

Mikropolar ve mikrogermeli ortamlarda incelenen dalga yayılımı problemlerinde ortamda klasik elastisite teorisinde görünmeyen ek dalgaların yayıldığı gözlenmiştir [5]. Benzer durum mikroizotropik ortamlar için de geçerlidir. Örneğin x_1 doğrultusunda yayılan tek boyutlu bir dalga probleminde

$u_1(x_1,t)$ boyuna yerdeğiştirme dalgasını, $u_2(x_1,t)$ ve $u_3(x_1,t)$ yanal yerdeğiştirme dalgalarını,

$\phi_1(x_1,t)$ boyuna mikro-dönme dalgasını, $\phi_2(x_1,t)$ ve $\phi_3(x_1,t)$ yanal mikro-dönme dalgalarını,

$\phi_{kk}(x_1,t)[=\phi_{11}(x_1,t)+\phi_{22}(x_1,t)+\phi_{33}(x_1,t)]$ boyuna mikro-germe dalgasını

$\phi_{11}(x_1,t)-\phi_{22}(x_1,t)$ ve $\phi_{11}(x_1,t)-\phi_{33}(x_1,t)$ yanal mikro-germe dalgalarını,

$\phi_{23}(x_1,t)$ boyuna mikro kayma dalgasını, $\phi_{12}(x_1,t)$ ve $\phi_{13}(x_1,t)$ boyuna mikro kayma dalgalarını

göstermektedir. Mikroizotropik teoride, klasik yerdeğiştirme dalgalarına ek olarak ortaya çıkan bu yeni dalgalara paralel olarak, serbest titreşim analizinde de bu dalgalara karşı gelen ek frekanslar doğacağı son derece açıktır.

PLAK TİTREŞİMİ PROBLEMİ

Homojen, boyu a, genişliği b ve kalınlığı h olan dikdörtgen mikroizotropik plak, düzlemine dik doğrultu x_3 ekseni olmak üzere, merkezi plağın geometrik merkezi olan bir (x_1,x_2,x_3) kartezyen koordinat sistemi üzerine yerleştirilmiş olmak üzere, mikroizotropik plağın toplam elastik genleme ve kinetik enerjisi

$$V = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2} W\,dz\,dy\,dx, \quad T = \frac{\rho}{2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2} K\,dz\,dy\,dx \tag{8}$$

şeklinde yazılabilir. Serbest titreşim altında mikroizotropik plağın yerdeğiştirme ve mikro şekildeğiştirme bileşenleri genlik fonksiyonları kullanılarak,

$$\left\{u_i(x,y,z,t),\phi_{ij}(x,y,z,t),,\phi_i(x,y,z,t))\right\} = \left\{U_i(x,y,z),\Phi_{ij}(x,y,z),\Phi_i(x,y,z)\right\}e^{i\omega t} \tag{9}$$

şeklinde yazılabilir, burada ω doğal frekanstır. (9) ifadesi ve $\xi = 2x/a$, $\eta = 2y/b$, $\zeta = 2z/h$ boyutsuz parametreleri yardımı ile plağın toplam kinetik enerjisi ve elastik genleme enerjisi

$$T = \frac{\rho}{16} abh\omega^2 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \Big\{ \left[U_1^2 + U_2^2 + U_3^2\right] + j\Big[\left(\Phi_{11}^2 + \Phi_{22}^2 + \Phi_{33}^2\right) + 2\left(\Phi_{(12)}^2 + \Phi_{(13)}^2 + \Phi_{(23)}^2\right) + \left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2\right)\Big]\Big\} d\zeta\, d\eta\, d\xi \tag{10}$$

ve

$$V = \frac{h}{4\alpha_1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \Big\{ A_1\bar{\Lambda}_1^2 + 2A_2\bar{\Lambda}_2 + (A_2 + A_3)\left(\bar{\Lambda}_3 + \bar{\bar{\Lambda}}_3\right) + 2(A_2 - A_3)\bar{\bar{\bar{\Lambda}}}_3 + B_1\left(\bar{\gamma}_1^2 + \bar{\bar{\gamma}}_2^2 + \bar{\bar{\bar{\gamma}}}_3^2\right)$$
$$+2B_2\left(\bar{\Lambda}_8 + \bar{\bar{\Lambda}}_8 + \bar{\bar{\bar{\Lambda}}}_8\right) + 4B_2\left(\bar{\Lambda}_9 + \bar{\bar{\Lambda}}_9 + \bar{\bar{\bar{\Lambda}}}_9\right) + 2(B_3 + B_4)\bar{\Lambda}_{10} + 2B_3\bar{\Lambda}_{11} + 4B_4\bar{\Lambda}_{12} + 2B_5\bar{\Lambda}_{13}^2\Big\} d\zeta\, d\eta\, d\xi \tag{11}$$
$$+\frac{bh}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} A_3\,\bar{\Lambda}_4\, d\zeta\, d\eta\, d\xi + \frac{abh}{16}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big\{4A_3\bar{\bar{\Lambda}}_4 + A_4\bar{\bar{\Lambda}}_5^2 + 2A_5\bar{\Lambda}_6 + 4A_5\bar{\Lambda}_7\Big\} d\zeta\, d\eta\, d\xi$$

şeklinde yazılabilir. (11) ve (10) denklemlerinin her ikisinde de $-e^{2i\omega t}$ çarpanının sonuca etki etmeyeceği göz önüne alınarak yazılmadığını belirtmek gerekir. Burada,

$$\bar{\Lambda}_1 = \bar{e}_{\xi\xi} + \bar{e}_{\eta\eta} + \bar{e}_{\zeta\zeta},\quad \bar{\Lambda}_2 = \bar{e}_{\xi\xi}^2 + \bar{e}_{\eta\eta}^2 + \bar{e}_{\zeta\zeta}^2,\quad \bar{\Lambda}_3 = {}_1\bar{e}_{\xi\eta}^2 + {}_1\bar{e}_{\xi\zeta}^2 + {}_1\bar{e}_{\eta\zeta}^2,\quad \bar{\bar{\Lambda}}_3 = {}_2\bar{e}_{\xi\eta}^2 + {}_2\bar{e}_{\xi\zeta}^2 + {}_2\bar{e}_{\eta\zeta}^2,$$
$$\bar{\bar{\bar{\Lambda}}}_3 = {}_1\bar{e}_{\xi\eta}\,{}_2\bar{e}_{\xi\eta} + {}_1\bar{e}_{\xi\zeta}\,{}_2\bar{e}_{\xi\zeta} + {}_1\bar{e}_{\eta\zeta}\,{}_2\bar{e}_{\eta\zeta},\quad \bar{\Lambda}_4 = \left({}_2\bar{e}_{\eta\zeta} - {}_1\bar{e}_{\eta\zeta}\right)\bar{\Phi}_\xi + \left({}_1\bar{e}_{\xi\zeta} - {}_2\bar{e}_{\xi\zeta}\right)\bar{\Phi}_\eta + \left({}_2\bar{e}_{\xi\eta} - {}_1\bar{e}_{\xi\eta}\right)\bar{\Phi}_\zeta,$$
$$\bar{\bar{\Lambda}}_4 = \bar{\Phi}_\xi^2 + \bar{\Phi}_\eta^2 + \bar{\Phi}_\zeta^2,\quad \bar{\Lambda}_5 = \left(\bar{\Phi}_{\xi\xi} + \bar{\Phi}_{\eta\eta} + \bar{\Phi}_{\zeta\zeta}\right),\quad \bar{\Lambda}_{51} = \left(\bar{\Phi}_{\xi\xi} + \bar{\Phi}_{\eta\eta} + \bar{\Phi}_{\zeta\zeta}\right)_{,\xi},$$
$$\bar{\Lambda}_{52} = \alpha_1\left(\bar{\Phi}_{\xi\xi} + \bar{\Phi}_{\eta\eta} + \bar{\Phi}_{\zeta\zeta}\right)_{,\eta},\quad \bar{\Lambda}_{53} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\bar{\Phi}_{\xi\xi} + \bar{\Phi}_{\eta\eta} + \bar{\Phi}_{\zeta\zeta}\right)_{,\zeta},\quad \bar{\Lambda}_6 = \bar{\Phi}_{\xi\xi}^2 + \bar{\Phi}_{\eta\eta}^2 + \bar{\Phi}_{\zeta\zeta}^2,$$
$$\bar{\Lambda}_7 = \bar{\Phi}_{(\xi\eta)}^2 + \bar{\Phi}_{(\xi\zeta)}^2 + \bar{\Phi}_{(\eta\zeta)}^2,\quad \bar{\Lambda}_8 = \bar{\Phi}_{\xi\xi,\xi}^2 + \bar{\Phi}_{\eta\eta,\xi}^2 + \bar{\Phi}_{\zeta\zeta,\xi}^2,\quad \bar{\bar{\Lambda}}_8 = \bar{\Phi}_{\xi\xi,\eta}^2 + \bar{\Phi}_{\eta\eta,\eta}^2 + \bar{\Phi}_{\zeta\zeta,\eta}^2,$$
$$\bar{\bar{\bar{\Lambda}}}_8 = \bar{\Phi}_{\xi\xi,\zeta}^2 + \bar{\Phi}_{\eta\eta,\zeta}^2 + \bar{\Phi}_{\zeta\zeta,\zeta}^2,\quad \bar{\Lambda}_9 = \bar{\Phi}_{(\xi\eta),\xi}^2 + \bar{\Phi}_{(\xi\zeta),\xi}^2 + \bar{\Phi}_{(\eta\zeta),\xi}^2,\quad \bar{\bar{\Lambda}}_9 = \alpha_1^2\left(\bar{\Phi}_{(\xi\eta),\eta}^2 + \bar{\Phi}_{(\xi\zeta),\eta}^2 + \bar{\Phi}_{(\eta\zeta),\eta}^2\right),$$
$$\bar{\bar{\bar{\Lambda}}}_9 = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\left(\bar{\Phi}_{(\xi\eta),\zeta}^2 + \bar{\Phi}_{(\xi\zeta),\zeta}^2 + \bar{\Phi}_{(\eta\zeta),\zeta}^2\right),\quad \bar{\Lambda}_{10} = \bar{\Phi}_{\xi,\xi}^2 + \alpha_1^2\bar{\Phi}_{\eta,\eta}^2 + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\bar{\Phi}_{\zeta,\zeta}^2,$$
$$\bar{\Lambda}_{11} = \alpha_1^2\bar{\Phi}_{\xi,\eta}^2 + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\bar{\Phi}_{\xi,\zeta}^2 + \bar{\Phi}_{\eta,\xi}^2 + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\bar{\Phi}_{\eta,\zeta}^2 + \bar{\Phi}_{\zeta,\xi}^2 + \alpha_1^2\bar{\Phi}_{\zeta,\eta}^2,$$
$$\bar{\Lambda}_{12} = \alpha_1\bar{\Phi}_{\xi,\eta}\bar{\Phi}_{\eta,\xi} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\bar{\Phi}_{\xi,\zeta}\bar{\Phi}_{\zeta,\xi} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\bar{\Phi}_{\eta,\zeta}\bar{\Phi}_{\zeta,\eta},\quad \bar{\Lambda}_{13} = \bar{\Phi}_{\xi,\xi} + \alpha_1\bar{\Phi}_{\eta,\eta} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\bar{\Phi}_{\zeta,\zeta} \tag{12}$$

ve

$$\bar{e}_{\xi\xi} = \bar{U}_{\xi,\xi},\quad \bar{e}_{\eta\eta} = \alpha_1\bar{U}_{\eta,\eta},\quad \bar{e}_{\zeta\zeta} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\bar{U}_{\zeta,\zeta},\quad {}_1\bar{e}_{\xi\eta} = \alpha_1\bar{U}_{\xi,\eta},\quad {}_2\bar{e}_{\xi\eta} = \bar{U}_{\eta,\xi},$$
$${}_1\bar{e}_{\xi\zeta} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\bar{U}_{\xi,\zeta},\quad {}_2\bar{e}_{\xi\zeta} = \bar{U}_{\zeta,\xi},\quad {}_1\bar{e}_{\eta\zeta} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\bar{U}_{\eta,\zeta},\quad {}_2\bar{e}_{\eta\zeta} = \bar{U}_{\zeta,\eta},\quad \alpha_1 = \frac{a}{b},\quad \alpha_2 = \frac{h}{b} \tag{13}$$

olarak tanımlanmışlardır. Plağın toplam enerjisi, (11) ve (10) denklemlerinde "$-e^{2i\omega t}$" teriminin ihmal edildiği göz önünde tutularak,

$$\Pi = V - T \tag{14}$$

olarak verilebilir. Ritz enerji yöntemi için, mikroizotropik genlik fonksiyonları Chebyshev polinomları, plağın sınır şartlarına uygun sınır fonksiyonları ile çarpılarak,

$$
\begin{aligned}
U_i(\xi,\eta,\zeta) &= F_{U_i}(\xi,\eta)\sum_{k,l,m=1}^{\infty} A^i_{klm}P_k(\xi)P_l(\eta)P_m(\zeta), && i=1,2,3 \\
\Phi_{ij}(\xi,\eta,\zeta) &= F_{\Phi_{ij}}(\xi,\eta)\sum_{k,l,m=1}^{\infty} B^{ij}_{klm}P_k(\xi)P_l(\eta)P_m(\zeta), && i,j=1,2,3 \qquad \text{(simetrik)} \\
\Phi_i(\xi,\eta,\zeta) &= F_{\Phi_i}(\xi,\eta)\sum_{k,l,m=1}^{\infty} C^i_{klm}P_k(\xi)P_l(\eta)P_m(\zeta), && i=1,2,3
\end{aligned}
\tag{15}
$$

şeklinde yazılabilir. Burada $P_k(\chi)=Cos\left((k-1)Arc\cos\chi\right)$ k. derece Chebyshev polinomu ve $F_{U_i}(\xi,\eta)=f^1_{U_i}(\xi)f^2_{U_i}(\eta),\ \ i=1,2,3$ karşı gelen sınır fonksiyonları olup, farklı sınır koşulları için $f^1_{U_i}(\xi)$ ve $f^2_{U_i}(\eta)$ aldıkları değerler [8] da verilmiştir, mikro şekil değiştirmeye karşı gelen sınır fonksiyonları ise $f^1_\delta(\xi)=f^2_\delta(\eta)=1,\ (\delta=\phi_{ji},\phi_i,\ i,j=1,\ldots,3)$ olarak alınmışlardır [5].

Ritz yöntemini uygulamak için (14) toplam enerji ifadesini, (15) denklemlerinde görülen $\left\{A^i_{klm}, B^{ij}_{klm}, C^i_{klm}\right\}$ katsayılarına göre minimize edilerek,

$$
\frac{d\Pi}{dA^i_{klm}}=0,\quad \frac{d\Pi}{dB^{ij}_{klm}}=0,\quad ,\frac{d\Pi}{dC^i_{klm}}=0 \tag{16}
$$

denklem sistemi elde edilir ki, bu sistem matris notasyonunda

$$
\left(\mathbf{K}-\Omega^2\mathbf{M}\right)\mathbf{Z}=\mathbf{0} \tag{17}
$$

yazılarak, bir özdeğer problemine indirgenmiş olur. Burada $\Omega=a\,\omega\sqrt{\rho}$ dir ve rijitlik ve kütle matrisleri karşı gelen alt matrisler cinsinden

$$
\mathbf{K}=\begin{pmatrix}
\mathbf{K}_{u_1u_1} & \mathbf{K}_{u_1u_2} & \mathbf{K}_{u_1u_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{u_1\phi_2} & \mathbf{K}_{u_1\phi_3} \\
\mathbf{K}_{u_1u_2} & \mathbf{K}_{u_2u_2} & \mathbf{K}_{u_2u_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{u_2\phi_1} & 0 & \mathbf{K}_{u_2\phi_3} \\
\mathbf{K}_{u_1u_3} & \mathbf{K}_{u_2u_3} & \mathbf{K}_{u_3u_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{u_3\phi_1} & \mathbf{K}_{u_3\phi_2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\phi_1\phi_1} & \mathbf{K}_{\phi_1\phi_{22}} & \mathbf{K}_{\phi_1\phi_{33}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\phi_1\phi_2} & \mathbf{K}_{\phi_{22}\phi_{22}} & \mathbf{K}_{\phi_{22}\phi_{33}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\phi_1\phi_{33}} & \mathbf{K}_{\phi_{22}\phi_{33}} & \mathbf{K}_{\phi_{33}\phi_{33}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\phi_{(12)}\phi_{(12)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\phi_{(13)}\phi_{(13)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\phi_{(23)}\phi_{(23)}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{K}_{u_2\phi_1} & \mathbf{K}_{u_3\phi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\phi_1\phi_1} & \mathbf{K}_{\phi_1\phi_2} & \mathbf{K}_{\phi_1\phi_3} \\
\mathbf{K}_{u_1\phi_2} & 0 & \mathbf{K}_{u_3\phi_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\phi_1\phi_2} & \mathbf{K}_{\phi_2\phi_2} & \mathbf{K}_{\phi_2\phi_3} \\
\mathbf{K}_{u_1\phi_3} & \mathbf{K}_{u_2\phi_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\phi_1\phi_3} & \mathbf{K}_{\phi_2\phi_3} & \mathbf{K}_{\phi_3\phi_3}
\end{pmatrix}
\tag{18}
$$

ve

$$
\mathbf{M}=\begin{pmatrix}
\mathbf{M}_{u_1u_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{M}_{u_2u_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{M}_{u_3u_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{\phi_1\phi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{\phi_{22}\phi_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{\phi_{33}\phi_{33}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{\phi_{(12)}\phi_{(12)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{\phi_{(13)}\phi_{(13)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{\phi_{(23)}\phi_{(23)}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{\phi_1\phi_1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{\phi_2\phi_2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{\phi_3\phi_3}
\end{pmatrix}
\tag{19}
$$

olarak ve sütun vektörü Z alt sütun vektörleri cinsinden

$$
\mathbf{Z}=\{\mathbf{A}^1,\mathbf{A}^2,\mathbf{A}^3,\mathbf{B}^{11},\mathbf{B}^{22},\mathbf{B}^{33},\mathbf{B}^{12},\mathbf{B}^{13},\mathbf{B}^{23},\mathbf{C}^1,\mathbf{C}^2,\mathbf{C}^3\}^T \tag{20}
$$

şeklinde yazılabilir, burada her alt sütun vektör,

$$\mathbf{A} = \{A^1_{111},\ldots,A^1_{11N},\ldots,A^1_{1k1},\ldots,A^1_{1kN},\ldots,A^1_{J11},\ldots,A^1_{IJK}\} \tag{21}$$

şeklinde verilmektedir. Ayrıca alt rijitlik ve kütle matrislerinin bileşenleri olan alt matrisler ise

$$\mathbf{K}_{u_1u_1} = (A_1+2A_2)D^{1,1}_{u_1ku_1\underline{k}}G^{0,0}_{u_1lu_1\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + (A_2+A_3)\alpha_1^2\left(D^{0,0}_{u_1ku_1\underline{k}}G^{1,1}_{u_1lu_1\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + \frac{1}{\alpha_2^2}D^{0,0}_{u_1ku_1\underline{k}}G^{0,0}_{u_1lu_1\underline{l}}H^{1,1}_{m\underline{m}}\right),$$

$$\mathbf{K}_{u_1u_2} = \alpha_1\left[A_1D^{1,0}_{u_1ku_2\underline{k}}G^{0,1}_{u_1lu_2\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + (A_2-A_3)D^{0,1}_{u_1ku_2\underline{k}}G^{1,0}_{u_1lu_2\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}}\right],\quad \mathbf{K}_{u_1\phi_2} = a\frac{\alpha_1}{\alpha_2}A_3D^{0,0}_{u_1k\phi_2\underline{k}}G^{0,0}_{u_1l\phi_2\underline{l}}H^{1,0}_{m\underline{m}},$$

$$\mathbf{K}_{u_1u_3} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left[A_1D^{1,0}_{u_1ku_3\underline{k}}G^{0,0}_{u_1lu_3\underline{l}}H^{0,1}_{m\underline{m}} + (A_2-A_3)D^{0,1}_{u_1ku_3\underline{k}}G^{0,0}_{u_1lu_3\underline{l}}H^{1,0}_{m\underline{m}}\right],\quad \mathbf{K}_{u_1\phi_3} = -a\alpha_1A_3D^{0,0}_{u_1k\phi_3\underline{k}}G^{1,0}_{u_1l\phi_3\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}},$$

$$\mathbf{K}_{u_2\phi_3} = aA_3D^{1,0}_{u_2k\phi_3\underline{k}}G^{0,0}_{u_2l\phi_3\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}},\quad \mathbf{K}_{u_2\phi_1} = -a\frac{\alpha_1}{\alpha_2}A_3D^{0,0}_{u_2k\phi_1\underline{k}}G^{0,0}_{u_2l\phi_1\underline{l}}H^{0,1}_{m\underline{m}},\quad \mathbf{K}_{u_3\phi_2} = -a\,A_3D^{1,0}_{u_3k\phi_2\underline{k}}G^{0,0}_{u_3l\phi_2\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}},$$

$$\mathbf{K}_{u_2u_2} = \alpha_1^2(A_1+2A_2)D^{0,0}_{u_2ku_2\underline{k}}G^{1,1}_{u_2lu_2\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + (A_2+A_3)\left(D^{1,1}_{u_2ku_2\underline{k}}G^{0,0}_{u_2lu_2\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}D^{0,0}_{u_2ku_2\underline{k}}G^{0,0}_{u_2lu_2\underline{l}}H^{1,1}_{m\underline{m}}\right),$$

$$\mathbf{K}_{u_2u_3} = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2}\left[A_1D^{0,0}_{u_2ku_3\underline{k}}G^{1,0}_{u_2lu_3\underline{l}}H^{0,1}_{m\underline{m}} + (A_2-A_3)D^{0,0}_{u_2ku_3\underline{k}}G^{0,0}_{u_2lu_3\underline{l}}H^{1,0}_{m\underline{m}}\right],\quad \mathbf{K}_{u_3\phi_1} = a\alpha_1A_3D^{0,0}_{u_3k\phi_1\underline{k}}G^{1,0}_{u_3l\phi_1\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}},$$

$$\mathbf{K}_{u_3u_3} = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}(A_1+2A_2)D^{0,0}_{u_3ku_3\underline{k}}G^{0,0}_{u_3lu_3\underline{l}}H^{1,1}_{m\underline{m}} + (A_2+A_3)\left(D^{1,1}_{u_3ku_3\underline{k}}G^{0,0}_{u_3lu_3\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + \alpha_1^2D^{0,0}_{u_3ku_3\underline{k}}G^{1,1}_{u_3lu_3\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}}\right),$$

$$\mathbf{K}_{qq} = (B_1+2B_2)(D^{1,1}_{qkq\underline{k}}G^{0,0}_{qlq\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + \alpha_1^2D^{0,0}_{qkq\underline{k}}G^{1,1}_{qlq\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}D^{0,0}_{qkq\underline{k}}G^{0,0}_{qlq\underline{l}}H^{1,1}_{m\underline{m}}) + \frac{a^2}{4}(A_4+2A_5)D^{0,0}_{qkq\underline{k}}G^{0,0}_{qlq\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}}$$

$$(q=\phi_{11},\phi_{22},\phi_{33}),$$

$$\mathbf{K}_{pq} = B_1(D^{1,1}_{pkq\underline{k}}G^{0,0}_{plq\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + \alpha_1^2D^{0,0}_{pkq\underline{k}}G^{1,1}_{plq\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}D^{0,0}_{pkq\underline{k}}G^{0,0}_{plq\underline{l}}H^{1,1}_{m\underline{m}}) + \frac{a^2}{4}A_4D^{0,0}_{pkq\underline{k}}G^{0,0}_{plq\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}}$$

$$((p=\phi_{11},q=\phi_{22}),(p=\phi_{11},q=\phi_{33}),(p=\phi_{22},q=\phi_{33})),$$

$$\mathbf{K}_{qq} = 4B_2(D^{1,1}_{qkq\underline{k}}G^{0,0}_{qlq\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + \alpha_1^2D^{0,0}_{qkq\underline{k}}G^{1,1}_{qlq\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}D^{0,0}_{qkq\underline{k}}G^{0,0}_{qlq\underline{l}}H^{1,1}_{m\underline{m}}) + a^2A_5D^{0,0}_{qkq\underline{k}}G^{0,0}_{qlq\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}}$$

$$(q=\phi_{(12)},\phi_{(13)},\phi_{(23)}),$$

$$\mathbf{K}_{\phi_1\phi_1} = 2(B_3+B_4)D^{1,1}_{\phi_1k\phi_1\underline{k}}G^{0,0}_{\phi_1l\phi_1\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + 2B_3\left(\alpha_1^2D^{0,0}_{\phi_1k\phi_1\underline{k}}G^{1,1}_{\phi_1l\phi_1\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}D^{0,0}_{\phi_1k\phi_1\underline{k}}G^{0,0}_{\phi_1l\phi_1\underline{l}}H^{1,1}_{m\underline{m}}\right)$$

$$+2B_5D^{1,1}_{\phi_1k\phi_1\underline{k}}G^{0,0}_{\phi_1l\phi_1\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + a^2A_3D^{0,0}_{\phi_1k\phi_1\underline{k}}G^{0,0}_{\phi_1l\phi_1\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}},\quad \mathbf{K}_{\phi_1\phi_2} = 2B_4\alpha_1D^{0,1}_{\phi_1k\phi_2\underline{k}}G^{1,0}_{\phi_1l\phi_2\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + 2B_5\alpha_1D^{1,0}_{\phi_1k\phi_2\underline{k}}G^{0,1}_{\phi_1l\phi_2\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}},$$

$$\mathbf{K}_{\phi_1\phi_3} = 2B_4\frac{\alpha_1}{\alpha_2}D^{0,1}_{\phi_1k\phi_3\underline{k}}G^{0,0}_{\phi_1l\phi_3\underline{l}}H^{1,0}_{m\underline{m}} + 2B_5\frac{\alpha_1}{\alpha_2}D^{1,0}_{\phi_1k\phi_3\underline{k}}G^{0,0}_{\phi_1l\phi_3\underline{l}}H^{0,1}_{m\underline{m}},\quad \mathbf{K}_{\phi_2\phi_2} = 2(B_3+B_4)\alpha_1^2D^{0,0}_{\phi_2k\phi_2\underline{k}}G^{1,1}_{\phi_2l\phi_2\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}}$$

$$+2B_3\left(D^{1,1}_{\phi_2k\phi_2\underline{k}}G^{0,0}_{\phi_2l\phi_2\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}D^{0,0}_{\phi_2k\phi_2\underline{k}}G^{0,0}_{\phi_2l\phi_2\underline{l}}H^{1,1}_{m\underline{m}}\right) + 2B_5\alpha_1^2D^{0,0}_{\phi_2k\phi_2\underline{k}}G^{1,1}_{\phi_2l\phi_2\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + a^2A_3D^{0,0}_{\phi_2k\phi_2\underline{k}}G^{0,0}_{\phi_2l\phi_2\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}},$$

$$\mathbf{K}_{\phi_2\phi_3} = 2B_4\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2}D^{0,0}_{\phi_2k\phi_3\underline{k}}G^{0,1}_{\phi_2l\phi_3\underline{l}}H^{1,0}_{m\underline{m}} + 2B_5\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2}D^{0,0}_{\phi_2k\phi_3\underline{k}}G^{1,0}_{\phi_2l\phi_3\underline{l}}H^{0,1}_{m\underline{m}},$$

$$\mathbf{K}_{\phi_3\phi_3} = 2(B_3+B_4)\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}D^{0,0}_{\phi_3k\phi_3\underline{k}}G^{0,0}_{\phi_3l\phi_3\underline{l}}H^{1,1}_{m\underline{m}} + 2B_3\left(D^{1,1}_{\phi_3k\phi_3\underline{k}}G^{0,0}_{\phi_3l\phi_3\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}} + \alpha_1^2D^{0,0}_{\phi_3k\phi_3\underline{k}}G^{1,1}_{\phi_3l\phi_3\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}}\right)$$

$$+2B_5\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}D^{0,0}_{\phi_3k\phi_3\underline{k}}G^{0,0}_{\phi_3l\phi_3\underline{l}}H^{1,1}_{m\underline{m}} + a^2A_3D^{0,0}_{\phi_3k\phi_3\underline{k}}G^{0,0}_{\phi_3l\phi_3\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}},\quad \mathbf{M}_{qq} = \frac{1}{4}D^{0,0}_{qkq\underline{k}}G^{0,0}_{qlq\underline{l}}H^{0,0}_{m\underline{m}}\ \ (q=u_1,u_2,u_3),$$

$$(22)$$

$$\mathbf{M}_{pp} = \frac{j}{4} D^{0,0}_{pkp\underline{k}} G^{0,0}_{plp\underline{l}} H^{0,0}_{mm} \; (p = \phi_{11}, \phi_{22}, \phi_{33}, \phi_1, \phi_2, \phi_3), \; \mathbf{M}_{rr} = \frac{j}{2} D^{0,0}_{rkr\underline{k}} G^{0,0}_{rlr\underline{l}} H^{0,0}_{m\underline{m}} \quad (r = \phi_{(12)}, \phi_{(13)}, \phi_{(23)}), \tag{23}$$

olarak hesaplanmıştır. Burada, $k, l, m, \underline{k}, \underline{l}, \underline{m} = 1, ...\infty$ olup,

$$D^{s,\bar{s}}_{\beta_1\tau_1\beta_2\tau_2} = \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{d^s\left(f^1_{\beta_1}(\xi)P_{\tau_1}(\xi)\right)}{d\xi^s} \frac{d^{\bar{s}}\left(f^1_{\beta_2}(\xi)P_{\tau_2}(\xi)\right)}{d\xi^{\bar{s}}} \right\} d\xi, \quad H^{s,\bar{s}}_{\tau_1\tau_2} = \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{d^s P_{\tau_1}(\zeta)}{d\zeta^s} \frac{d^{\bar{s}} P_{\tau_2}(\zeta)}{d\zeta^{\bar{s}}} \right\} d\zeta,$$

$$G^{s,\bar{s}}_{\beta_1\tau_1\beta_2\tau_2} = \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{d^s\left(f^2_{\beta_1}(\eta)P_{\tau_1}(\eta)\right)}{d\eta^s} \frac{d^{\bar{s}}\left(f^2_{\beta_2}(\eta)P_{\tau_2}(\eta)\right)}{d\eta^{\bar{s}}} \right\} d\eta \tag{24}$$

olarak tanımlanmıştır.

FREKANS SPEKTRUMLARI

İncelenen plağın özellikleri , $E = 5.31GPa$, $\upsilon = 0.4$, $\rho = 2192kg/m^3$, $j = 1.96\,10^{-7} m^2$ ve boyutları $1 \times 1 \times 0.1\, m^3$ olarak alınmıştır ve Ritz yöntemi ile (17) özdeğer probleminden elde edilen frekansları aşağıdaki tablolarda verilmiştir. Tablo 1, SFSF: x_1 yönünde iki ucu basit bağlı, x_2 yönündeki uçları ise serbest olarak alınan plak için frekans spektrumunu göstermektedir. Tablodan görüleceği üzere, mikro malzeme sabitleri sıfır alındığında sadece klasik teori ile elde edilen frekanslar gözlenmektedir. Bu mikro sabitlerin yaklaşık 10^{-8} boyutunda alınmasıyla klasik frekanslar arasında birçok ek frekans ortaya çıkmaktadır ve sabitlerin değerleri artırılmaya devam ettiğinde bu ek frekansların mikro sabitlerin değişiminden klasik frekanslara göre daha fazla etkilendikleri için, incelenen frekans aralığının hızla dışına çıkmakta ve dolayısıyla incelen aralıktaki ek frekansların sayısı azalmaktadır. Ek sabitlerin değerleri artırıldıkça, ek frekansların sayısının azalmasıyla birlikte, klasik frekanslarda da değişimler gözlenmeye başlanmaktadır. Bu ek sabitler yaklaşık 10^{-5} boyutuna geldiğinde artık incelenen aralıkta hiçbir ek frekans kalmamıştır ve klasik frekanslarda sapmalar gözlenmeye başlamıştır. Farklı sınır koşulları için mikroizotropik plağın frekans aralığı aşağıdaki tablolarda verilmiştir. (Tablo.2:SSSS:Tüm kenarlardan basit bağlı, Tablo.3:CCCC:Tüm kenarlardan ankastre bağlı, Tablo.4. FFFF: Tüm kenarları serbest (pamuk üzerindeki plağın titreşimi gibi).

Tablo.1. Sınır koşulları SFSF olan mikroizotropik plak için frekans spektrumu

Micro Malzeme sabitleri $\sigma_i = GPa \quad (i = 1,2,5)$ $B_i = GN \quad (i = 1-5)$	Frekanslar: Klasik frekanslar (koyu-siyah), ek mikro frekanslar (normal-kırmızı), bozulmaya başlayan klasik frekanslar (altı çizili-mavi) verilmiştir.
$\sigma_i = B_i = 0$	**0.3095, 1.5869, 1.8518, 3.4299, 3.7807, 4.5722, 4.8935, 6.2983, 6.4810, 7.1223, 8.5412, 8.6983, 8.7962, 9.0763, 9.3126, 10.3729, 10.5641, 11.3442, 11.5249,**
$\sigma_i = B_i = 10^{-8}$	**0.3095**, 0.6306, 0.6306, 0.6306, 0.6887, 0.7519, 0.7965, 0.9347, 0.9347, 1.3281, 1.3281, 1.3281, 1.3333, 1.3333, 1.3612, 1.4560, 1.5704, **1.5869, 1.8518**, 1.8568
$\sigma_i = 10^{-8}, B_i = 10^{-4}$	**0.3095**, 0.6306, 0.6306, **1.5869, 1.8518, 3.4299, 3.7808, 4.5722, 4.8935, 6.2983, 6.4810, 7.1223, 8.5412, 8.6983, 8.7962, 9.0763, 9.3126, 10.3729, 10.5641**
$\sigma_i = 10^{-4}, B_i = 10^{-8}$	**0.30955**, 1.5870, **1.8518**, 3.4300, 3.7809, 4.5723, **4.8935**, 6.2984, 6.4812, 7.1225, 7.6070,7.6070, 8.5414, 8.6985, 8.7963, 9.0764, 9.3127
$\sigma_i = B_i = 10^{-6}$	**0.3095**, 1.587, **1.8518, 3.4299, 3.7807**, 4.5723, 4.8936, 6.2981, 6.3064, 6.3064, 6.3067, 6.4811, 6.8870, **7.1223**, 7.5194, 7.9649, 8.5411, **8.6983, 8.7962**
$\sigma_i = B_i = 10^{-5}$	0.3097, 1.5875, 1.8520, 3.4304, 3.7809, 4.5728, 4.8939, 6.2988, 6.4816, **7.1223, 8.5412, 8.6983**, 8.7966, 9.0767, 9.3130, 10.3734, 10.5645, 11.3443, **11.5249**
$\sigma_i = B_i = 10^{-4}$	0.3110, 1.5924, 1.8539, 3.4342, 3.7809, 4.5776, 4.8976, 6.3031, 6.4856, 7.1225, 8.5414, 8.6985, 8.8011, 9.0807, 9.3168, 10.3776, 10.5684, 11.3446, 11.5253

Yukarıda verilen Tablo 1 ve aşağıda farklı sınır koşulları için verilen diğer tablolarda elde edilen frekans değerleri boyutsuz frekans parametresi olup, doğal frekans ile arasındaki bağıntı

$$f = \frac{h\pi}{2b^2}\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}\ \Delta \tag{25}$$

ile verilmektedir.

Tablo.2. Sınır koşulları SSSS olan mikroizotropik plak için frekans spektrumu

Mikro Malzeme sabitleri $\sigma_i = GPa \quad (i=1,2,5)$ $B_i = GN \quad (i=1-5)$	Frekanslar: Klasik frekanslar (koyu-siyah), ek mikro frekanslar (normal-kırmızı), bozulmaya başlayan klasik frekanslar (altı çizili-mavi) verilmiştir.
$\sigma_i = B_i = 0$	**1.9273, 4.5858, 4.5858, 6.0395, 6.0395, 7.0227, 8.5412, 8.5484, 8.5484, 10.7084, 10.7084, 12.079, 12.079, 13.5049, 13.5049, 13.7842, 13.7842, 14.0328, 15.5364**
$\sigma_i = B_i = 10^{-8}$	0.6306, 0.6306, 0.6887, 0.7519, 0.7965, 0.9347, 0.9347, 1.3281, 1.3281, 1.3333, 1.3333, 1.3612, 1.4560, 1.5704, 1.8568, **1.9273,** 1.9304, 1.9304, 1.9390
$\sigma_i = 10^{-8}, B_i = 10^{-4}$	0.6306, 0.6306, **1.9273, 4.5858, 4.5858, 6.0395, 6.0395, 7.0227, 8.5412, 8.5484, 8.5484, 10.7084, 10.7084, 12.079, 12.079, 13.5049, 13.5049, 13.7842, 13.7842**
$\sigma_i = 10^{-4}, B_i = 10^{-8}$	**1.9273,** 4.5859, 4.5859, 6.0397, 6.0397, 7.0228, 7.6070, 7.6070, 8.5414, 8.5485, 8.5485, 10.7085, 10.7085, 12.0277, 12.0793, 12.0793, 13.5052, 13.5052, 13.7844
$\sigma_i = B_i = 10^{-6}$	**1.9273,** 4.5859, 4.5859, **6.0395, 6.0395,** 6.3065, 6.3065, 6.887, **7.0227,** 7.5195, 7.9649, **8.5412, 8.5484, 8.5484,** 9.3468, 9.3468, **10.7084, 10.7084, 12.079, 12.079**
$\sigma_i = B_i = 10^{-5}$	1.9274, 4.5862, 4.5862, **6.0395, 6.0395,** 7.0230, **8.5412,** 8.5487, 8.5487, 10.7087, 10.7087, **12.079, 12.079, 13.5049, 13.5049,** 13.7846, 13.7846, 14.0331, **15.5364**
$\sigma_i = B_i = 10^{-4}$	1.9281, 4.5893, 4.5893, 6.0397, 6.0397, 7.0261, 8.5414, 8.5519, 8.5520, 10.7119, 10.7119, **12.079, 12.079,** 13.5054, 13.5054, 13.7878, 13.7878, 14.0364, 15.5367

Tablo.3. Sınır koşulları CCCC olan mikroizotropik plak için frekans spektrumu

Mikro Malzeme sabitleri $\sigma_i = GPa \quad (i=1,2,5)$ $B_i = GN \quad (i=1-5)$	Frekanslar: Klasik frekanslar (koyu-siyah), ek mikro frekanslar (normal-kırmızı), bozulmaya başlayan klasik frekanslar (altı çizili-mavi) verilmiştir.
$\sigma_i = B_i = 0$	**3.3259, 6.3047, 6.3047, 8.8011, 10.3466, 10.4557, 12.2717, 12.2717, 12.488, 12.488, 13.7958, 15.1879, 15.1879, 15.7183, 16.8844, 17.0547, 17.6814, 19.2688**
$\sigma_i = B_i = 10^{-8}$	0.63065, 0.63065, 0.6887, 0.7519, 0.7965, 0.9347, 0.9347, 1.3281, 1.3281, 1.3333, 1.3333, 1.3612, 1.4560, 1.5704, 1.8568, 1.9304, 1.9304, 1.9390, 1.9390
$\sigma_i = 10^{-8}, B_i = 10^{-4}$	0.63065, 0.63065, **3.3259, 6.3047, 6.3047, 8.8011, 10.3466, 10.4557, 12.2717, 12.2717, 12.488, 12.488, 13.7958, 15.1879, 15.1879, 15.7183, 16.8844, 17.0547**
$\sigma_i = 10^{-4}, B_i = 10^{-8}$	3.3260, 6.3048, 6.3048, 7.6070, 7.6070, 8.8012, 10.3468, 10.4559, 12.0277, 12.272, 12.272, 12.4882, 12.4882, 13.7961, 15.1883, 15.1883, 15.7185, 16.8848
$\sigma_i = B_i = 10^{-6}$	3.3260, 6.3046, 6.3046, 6.3065, 6.3065, 6.8870, 7.51945, 7.9649, **8.8011,** 9.3468, 9.3468, **10.3466, 10.4557, 12.2717, 12.2717, 12.488, 12.488,** 13.2807, 13.2807
$\sigma_i = B_i = 10^{-5}$	3.3261, 6.3049, 6.3049, 8.8013, 10.3469, 10.4559, 12.2718, 12.2718, 12.4883, 12.4883, **13.7958,** 15.1883, 15.1883, 15.7186, 16.8848, 17.0551, **17.6814,** 19.2689
$\sigma_i = B_i = 10^{-4}$	3.3271, 6.3073, 6.3073, 8.8039, 10.3496, 10.4585, 12.2721, 12.2721, 12.491, 12.491, 13.7964, 15.1911, 15.1911, 15.7215, 16.8877, 17.0579, 17.6819, 19.2697

Tablo.4. Sınır koşulları FFFF olan mikroizotropik plak için frekans spektrumu

Mikro Malzeme sabitleri $\sigma_i = GPa \quad (i = 1,2,5)$ $B_i = GN \quad (i = 1-5)$	Frekanslar: Klasik frekanslar (koyu-siyah), ek mikro frekanslar (normal-kırmızı), bozulmaya başlayan klasik frekanslar (altı çizili-mavi) verilmiştir.
$\sigma_i = B_i = 0$	**1.1983, 1.8035, 2.3961, 3.0644, 3.0644, 5.3854, 5.5259, 5.5259, 5.8073, 6.7534, 7.5614, 8.2627, 8.2627, 8.5348, 8.5348, 8.5412, 9.9128, 10.0431, 10.646, 10.9261**
$\sigma_i = B_i = 10^{-8}$	0.6306, 0.6306, 0.6887, 0.7519, 0.7965, 0.9347, 0.9347, **1.1983**, 1.3281, 1.3281, 1.3333, 1.3333, 1.3612, 1.4560, 1.5704, **1.8035**, 1.8568, 1.9304, 1.9304, 1.9390
$\sigma_i = 10^{-8}, B_i = 10^{-4}$	0.6306, 0.6306, **1.19833, 1.8035, 2.3961, 3.0644, 3.0644, 5.3854, 5.5259, 5.5259, 5.8073, 6.7534, 7.5614, 8.2627, 8.2627, 8.5348, 8.5348, 8.5412, 9.9128, 10.0431**
$\sigma_i = 10^{-4}, B_i = 10^{-8}$	**1.1984, 1.8035, 2.3961, 3.0644, 3.0644, 5.3855, 5.5260, 5.5260, 5.8074, 6.7536, 7.5616**, 7.6070, 7.6070, **8.2629, 8.2629, 8.5350, 8.5350, 8.5414, 9.9130, 10.0434**
$\sigma_i = B_i = 10^{-6}$	**1.1984, 1.8036, 2.3961, 3.0644, 3.0644, 5.3854, 5.5260, 5.5260, 5.8074**, 6.3064, 6.3064, **6.7535**, 6.8870, 7.5194, **7.5615**, 7.9649, **8.2627, 8.2627, 8.5349, 8.5349**
$\sigma_i = B_i = 10^{-5}$	**1.1990, 1.8044, 2.3961, 3.0650, 3.0650, 5.3859, 5.5265, 5.5265, 5.8080, 6.754, 7.5615, 8.2627, 8.2627, 8.5354, 8.5354, 8.5412, 9.9135, 10.0432, 10.6464, 10.9267**
$\sigma_i = B_i = 10^{-4}$	**1.2048, 1.8129, 2.3965, 3.071, 3.071, 5.3911, 5.5312, 5.5312, 5.8144, 6.7586, 7.5617, 8.263, 8.263, 8.5404, 8.5404, 8.5414, 9.9191, 10.0435, 10.6499, 10.9317**

SONUÇ

Yukarıda Tablo.1 için ayrıntılı olarak anlatılan frekans spektrumunun farklı sınır koşulları altında da temel olarak geçerli olduğu verilen tablolardan gözlenmektedir. Yani mikro malzeme sabitleri artırıldıkça, klasik frekansların arasında önce ek frekanslar ortaya çıkmaktadır. Bu ek frekanslar klasik frekanslara oranla mikro malzeme sabitlerine daha duyarlıdırlar, ve sabitlerin artması ile hızla incelene frekans aralığının dışına çıkmakta ve malzeme sabitlerinin belirli bir eşik değerinden sonra, mikro frekanslar tamamen ortadan kaybolmakta ve klasik frekanslarda bozulmaya başlamaktadır. Klasik frekansların bozulmaya başladığı mikro sabitlerin bu eşik değerlerinden sonra malzemenin mikroizotropik olmaktan çıktığı ve mikro davranışın makro davranış üzerinde de etkili olmaya başladığı, dolayısıyla malzemenin mikro yapısını kaybettiği söylenebilir. Her ne kadar, bu çalışmada 8 ek sabit için mertebe bazında genel bir sınır verilse de, Kırış ve İnan tarafından, ters optimizasyon problemi ile mikrogermeli ortam sabitleri için makul üst sınırlar elde edilmiştir [5]. Benzer şekilde, hem ortaya çıkan ek frekansların sayısının, hem de hesaplanan klasik frekanslarla deneysel frekanslar arasındaki farkın minimize edilmesine dayanan iki farklı amaç fonksiyonu ile çalışan bir optimizasyon problemi kurularak, her bir mikroizotropik malzeme sabiti için daha kesin sınırlar belirlenmesi gelecek çalışmalara bırakılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Eringen A. C. ve Şuhubi E. S. Nonlinear Theory of Simple Micro-Elastic Solids, Part I. Int. J. Engng. Sci. 5 189-203 1964.

[2] Şuhubi E.S. ve Eringen A.C. Nonlinear Theory of Simple Micro-Elastic Solids, Part II Int. J. Engng. Sci. 5 389-396 1964.

[3] Eringen A. C. Linear theory of micropolar elasticity J. Math. Mech. 15 909-923 1966.

[4] Eringen A. C. Theory of thermo-microstretch elastic solids Int. J. Engng. Sci. 28 1291-1300, 1990.

[5] Kiris A. ve Inan E. On the identification of microstretch elastic moduli of materials by using vibration data of plates Int. J. Engng. Sci. 46 585-59 2008.

[6] Koh S. L. A special theory of microelasticity, Int. J. Engng. Sci. 8 583-593 1970.

[7] Koh S. L. Wave propagation in a micro-isotropic, micro-elastic solid, Int. J. Engng. Sci. 11 95-107 1973.

[8] Zhou D., Cheung Y. K., Au F. T. K. ve Lo S. H. Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method Int. J. Solids and Structures 39 6339-6353 2002.