



ÜÇ SERBESTLİK DERECELİ KÜTLE-YAY SİSTEMİNİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ İÇİN TAYLOR MATRİS YAKLAŞIMI

Sümeyye Sınır¹ ve Mehmet Çevik²
Celal Bayar Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü

ABSTRACT

Three degree of freedom system is considered as mass-spring system. The Taylor matrix method is employed to solve the differential equations systems of motion of the mass-spring system. The solution functions are obtained for each mass. The Taylor polynomial matrix solutions are compared with the exact solution and it is shown that the results from both methods are in good agreement.

ÖZET

Üç serbestlik dereceli bir kütle-yay problemi ele alınmıştır. Kütle-yay sisteminin hareketini tanımlayan diferansiyel denklem sistemi Taylor matris yöntemi ile çözülmüştür. Her bir kütle için hareketini veren fonksiyon elde edilmiştir. Elde edilen Taylor matris çözümleri tam çözümlerle karşılaştırılarak uyumlu oldukları gösterilmiştir.

1. GİRİŞ

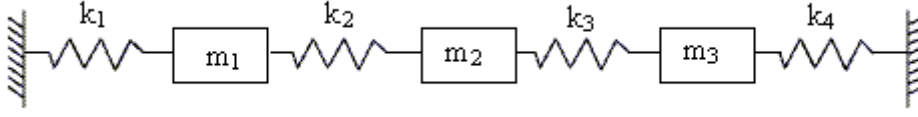
Titreşim, makine elemanlarında ya da yapılarda genellikle istenmeyen bir salınım hareketidir. Enerji kaybına, istenmeyen gürültülere ve hatta yapısal hasarlara neden olabildiği için titreşimin ya hiç olmaması, ya da gerekli yalıtımlar yapılarak sisteme etkisinin en aza indirilmesi istenir. Bunun için bilim insanları belirlenmiş özelliklerde titreşim yapan sistemler tasarlayıp davranışları hakkında bilgi sahip olmaya çalışmakta ve titreşimin sönümlenmesi konusundaki çalışmalara devam etmektedirler.

Fiziksel sistemlerin konumunun ifade edilmesinde genellikle birden fazla deplasman, açı veya diğer fiziksel parametrelere ihtiyaç vardır. Böyle koordinat takımlarına genelleştirilmiş koordinatlar denir. Bir sistemin bütün parçalarının herhangi bir zamanda konumlarının tamamen belirli olması için gerekli birbirinden bağımsız koordinat sayısına serbestlik derecesi denir. Literatürde sistemler serbestlik derecelerine göre şu şekilde sınıflandırılmaktadır: tek serbestlik dereceli sistemler, çok serbestlik dereceli sistemler ve sürekli sistemler. Bu sistemlerinin tümünün, belirsiz katsayılar yöntemi, frekans tepki yöntemi, geometrik yöntem, Laplace dönüşümleri, vb. yöntemlerle çözümleri çeşitli kaynaklarda mevcuttur [1]. Bu

¹ sumeyye.sinir@cbu.edu.tr

² m.cevik@cbu.edu.tr

çalışmada ise, çok serbestlik dereceli sistemlerin davranışı üç serbestlik dereceli bir kütle-yay problemi özelinde Taylor matris yöntemi ile ele alınacaktır.



Şekil 1.Üç kütle ve dört yaydan oluşan kütle-yay sistemi modeli

Şekil 1’de üç serbestlik dereceli bir kütle-yay sistemi görülmektedir. Bu sistemin matematik modeli aşağıda lineer adi diferansiyel denklem sistemi ile ifade edilmektedir.

$$m_1 \ddot{y}_1(t) + (k_1 + k_2)y_1(t) - k_2 y_2(t) = 0 \quad (1.a)$$

$$m_2 \ddot{y}_2(t) + (k_2 + k_3)y_2(t) - k_3 y_3(t) - k_2 y_1(t) = 0 \quad (1.b)$$

$$m_3 \ddot{y}_3(t) + (k_3 + k_4)y_3(t) - k_3 y_2(t) = 0 \quad (1.c)$$

Burada $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y_3(t)$ çözüm fonksiyonlarını k_1, k_2, k_3 ve k_4 yay katsayılarını, m_1, m_2, m_3 kütleleri göstermektedir Sistemin serbest titreşim analizinin yapılabilmesi için gerekli olan başlangıç şartları genel olarak aşağıdaki şekildedir:

$$y_1(0) = \lambda_1 \quad (2.a)$$

$$y_2(0) = \lambda_2 \quad (2.b)$$

$$y_3(0) = \lambda_3 \quad (2.c)$$

$$\dot{y}_1(0) = \lambda_4 \quad (2.d)$$

$$\dot{y}_2(0) = \lambda_5 \quad (2.e)$$

$$\dot{y}_3(0) = \lambda_6 \quad (2.f)$$

Taylor polinom matris yöntemi, mühendislik problemlerinin analizinde yeni ve kolay uygulanabilir bir matris yöntemidir. Bu yöntemde öncelikle denklemdeki veya denklem sistemindeki fonksiyonların Taylor serileri sonlu sayıda terim için alınır ve bunların matris ifadeleri denklemde veya denklem sisteminde yerleştirilerek matematik modelinin matris formu ifade edilir. Elde edilen matris denklem veya denklem sistemi çözülerek bilinmeyen Taylor katsayıları yaklaşık olarak hesaplanır. Böylece denklem ya da denklem sisteminin Taylor seri çözümleri elde edilmiş olur.

Literatürde, birçok matematiksel denklem için kullanılabilirliği gösterilmiş olmasına rağmen mühendislik problemlerinin ele alınmasında yeni bir yöntemdir. Kanwal ve Liu [2] integro diferansiyel denklemlerin çözümünde Taylor seri açılımını kullanmışlardır. Bu yöntem ayrıca ikinci mertebe lineer diferansiyel denklemlerin herhangi bir nokta civarında özel durumlar için yaklaşık çözümünün bulunmasında kullanılmıştır ve genelleştirilmiş Hermite, Laguerre, Legendre and Chebyshev denklemlerine uygulanmıştır[3]. Maleknejad ve Mahmoudi [4] ise yüksek mertebe lineer integro diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü elde etmek için

Taylor matris yöntemini geliştirmişlerdir. Gülsu ve Sezer [5] diferansiyel fark denklemlerinin ortogonal Taylor polinomları ile çözümlerini bulmuşlardır. Sezer ve Daşcıoğlu[6] yüksek mertebeli lineer değişken katsayılı diferansiyel fark denklemlerinin Taylor matris çözümlerini elde etmişlerdir. Taylor matris yöntemi Ricatti diferansiyel denkleminin [7] ve genelleştirilmiş pantograf denklemlerinin [8] çözümünde de kullanılmıştır. Daha birçok diferansiyel, integral ve integro-diferansiyel denklemin çözümünde yöntemin kullanıldığını görüyoruz. Ancak Kurt ve Çevik [9] Taylor matris yöntemini ilk kez tam bir mühendislik problemine uygulamış ve tek serbestlik dereceli kütle-yay-sönüm sisteminin titreşim analizini yapmışlar, denklemin verilen sınır şartları altında özel ve genel çözümlerini ortaya koymuşlardır. Çevik [10] ise, Taylor matris yöntemini bir mühendislik problemi olan boyuna titreşim yapan çubuğun diferansiyel denkleminin çözümünde kullanmıştır.

2. HAREKET DENKLEMİNİN VE BAŞLANGIÇ ŞARTLARININ MATRİS İFADESİ

Sistemin Taylor matris yöntemi ile çözümü için $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y_3(t)$ çözüm fonksiyonlarının sonlu bir kesme sınırı için Taylor seri açılımları aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^N Y_{1n} (t-c)^n, Y_{1n} = \frac{y_1^{(n)}(c)}{n!}, a < c < b \quad (3.a)$$

$$y_2(t) = \sum_{n=0}^N Y_{2n} (t-c)^n, Y_{2n} = \frac{y_2^{(n)}(c)}{n!}, a < c < b \quad (3.b)$$

$$y_3(t) = \sum_{n=0}^N Y_{3n} (t-c)^n, Y_{3n} = \frac{y_3^{(n)}(c)}{n!}, a < c < b \quad (3.c)$$

Burada a ve b fonksiyonun tanım aralığını, Y_{1n} , Y_{2n} ve Y_{3n} terimleri ise bilinmeyen Taylor katsayılarını ifade etmektedir. (3) ile verilen Taylor polinomlarının matris ifadeleri aşağıdaki şekildedir.

$$y_1(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{Y}_1, \quad (4.a)$$

$$y_2(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{Y}_2, \quad (4.b)$$

$$y_3(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{Y}_3, \quad (4.c)$$

Denklem (4)'teki $\mathbf{T}(t)$, \mathbf{Y}_1 , \mathbf{Y}_2 ve \mathbf{Y}_3 matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\mathbf{T} = [1 \quad t \quad t^2 \quad \dots \quad t^N] \quad (5)$$

$$\mathbf{Y}_1 = [Y_{10} \quad Y_{11} \quad Y_{12} \quad \dots \quad Y_{1N}]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{Y}_2 = [Y_{20} \quad Y_{21} \quad Y_{22} \quad \dots \quad Y_{2N}]^T \quad (7)$$

$$\mathbf{Y}_3 = [Y_{30} \quad Y_{31} \quad Y_{32} \quad \dots \quad Y_{3N}]^T \quad (8)$$

(3.a)'da verilen $y_1(t)$ fonksiyonun türevlerinin matris gösterimi aşağıdaki şekildedir.

$$\dot{y}_1(t) = \dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{Y}_1 = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}\mathbf{Y}_1 \quad (9.a)$$

$$\ddot{y}_1(t) = \ddot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{Y}_1 = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}^2\mathbf{Y}_1 \quad (9.b)$$

$$y_1^{(k)}(t) = \mathbf{T}^{(k)}(t)\mathbf{Y}_1 = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}^k\mathbf{Y}_1 \quad (9.c)$$

Burada ^(k) türevin mertebesini ifade etmekte olup tekrar eden türevlerin yineleme bağıntısını veren \mathbf{B} matrisi şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Benzer şekilde $y_2(t)$ ve $y_3(t)$ fonksiyonlarının da türevleri matris formunda yazılır.

$$\ddot{y}_2(t) = \ddot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{Y}_2 = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}^2\mathbf{Y}_2 \quad (11)$$

$$\ddot{y}_3(t) = \ddot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{Y}_3 = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}^2\mathbf{Y}_3 \quad (12)$$

Elde edilen (4), (11) ve (12) eşitliklerini (1)'de ki denklem sisteminde yerine yazarak ve $\mathbf{T}(t)$ matrisinin elimine ederek aşağıdaki matris sistemi elde edilir.

$$m_1 \mathbf{B}^2\mathbf{Y}_1 + (k_1 + k_2)\mathbf{I}\mathbf{Y}_1 - k_2\mathbf{I}\mathbf{Y}_2 = 0 \quad (13.a)$$

$$m_2 \mathbf{B}^2\mathbf{Y}_2 + (k_2 + k_3)\mathbf{I}\mathbf{Y}_2 - k_3\mathbf{I}\mathbf{Y}_3 - k_2\mathbf{I}\mathbf{Y}_1 = 0 \quad (13.b)$$

$$m_3 \mathbf{B}^2\mathbf{Y}_3 + (k_3 + k_4)\mathbf{I}\mathbf{Y}_3 - k_3\mathbf{I}\mathbf{Y}_2 = 0 \quad (13.c)$$

Burada \mathbf{I} birim matrisi $(N+1) \times (N+1)$ boyutundadır. Başlangıç şartlarının matris formu:

$$y_1(0) = \mathbf{T}(0)\mathbf{Y}_1 = \lambda_1 \quad (14.a)$$

$$y_2(0) = \mathbf{T}(0)\mathbf{Y}_2 = \lambda_2 \quad (14.b)$$

$$y_3(0) = \mathbf{T}(0)\mathbf{Y}_3 = \lambda_3 \quad (14.c)$$

$$\dot{y}_1(0) = \mathbf{T}(0)\mathbf{B}\mathbf{Y}_1 = \lambda_4 \quad (14.d)$$

$$\dot{y}_2(0) = \mathbf{T}(0)\mathbf{B}\mathbf{Y}_2 = \lambda_5 \quad (14.e)$$

$$\dot{y}_3(0) = \mathbf{T}(0)\mathbf{B}\mathbf{Y}_3 = \lambda_6 \quad (14.f)$$

şeklindedir.

3. ÇÖZÜM METODOLOJİSİ

(13)'de elde edilen matris sistemini

$$\mathbf{W}\mathbf{Y} = 0 \quad (15)$$

şeklinde düzenleriz. Burada

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_{00} & W_{01} & \cdots & W_{0N} \\ W_{10} & W_{11} & \cdots & W_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N0} & W_{N1} & \cdots & W_{NN} \end{bmatrix} \quad (16)$$

ve

$$\mathbf{Y} = [Y_{10} \ Y_{11} \ \cdots \ Y_{1N} \ Y_{20} \ Y_{21} \ \cdots \ Y_{2N} \ Y_{30} \ Y_{31} \ \cdots \ Y_{3N}]^T \quad (17)$$

şeklinde dir.

Sistemin başlangıç şartlarının da çözüme dâhil edilebilmesi için matris formunda ifade edilmişti. Gerekli olan m adet başlangıç şartının genel matris ifadesi aşağıda verilmiştir:

$$\mathbf{U}_i \mathbf{Y} = [\lambda_i] \quad i = 0,1,2,\dots,m \text{ veya } [\mathbf{U}_i; \lambda_i] \quad (18)$$

(15) matris denkleminde m tane satır silinerek yerine (18) ile verilen başlangıç şartlarından gelen satırlar yazılır. Bu işlemin sonucunda elde edilen genişletilmiş matris ifadesi şudur:

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} W_{00} & W_{01} & \cdots & W_{0N} & ; & 0 \\ W_{10} & W_{11} & \cdots & W_{1N} & ; & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ W_{N-m,0} & W_{N-m,1} & \cdots & W_{N-m,N} & ; & 0 \\ U_{00} & U_{01} & \cdots & U_{0N} & ; & \lambda_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ U_{m0} & U_{m1} & \cdots & U_{mN} & ; & \lambda_m \end{bmatrix} \quad (19)$$

Eğer $\det(\tilde{\mathbf{W}}) \neq 0$ ise

$$\mathbf{Y} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \quad (20)$$

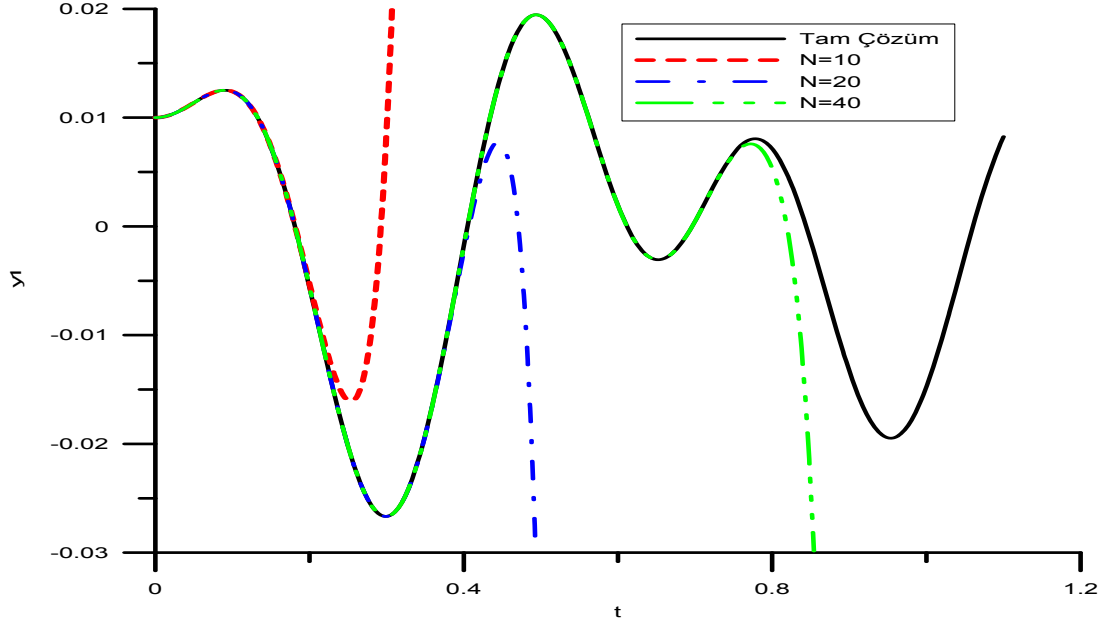
Denklemin sisteminin verilen başlangıç şartları altında genel çözümünün Taylor katsayıları elde edilmiş olur.

4. SAYISAL UYGULAMA

Şekil 1'de verilen kütle-yay sistemi için kütleler $m_1 = 30$ kg, $m_2 = 10$ kg ve $m_3 = 20$ kg dir. Yay katsayıları $k_1 = 4000$ N/m, $k_2 = 2000$ N/m, $k_3 = 1000$ N/m ve $k_4 = 3000$ N/m olarak

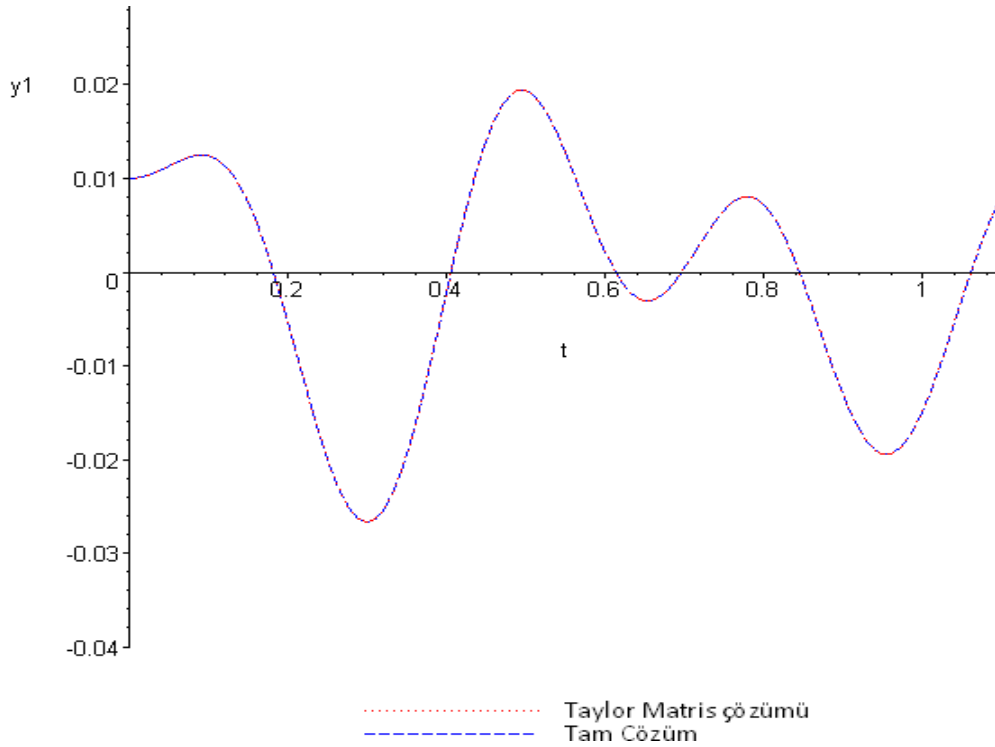
alınmıştır. Başlangıç şartları ise $y_1(0)=0.01$ m, $y_2(0)=0.05$ m, $y_3(0)=-0.01$ m, $\dot{y}_1(0)=0$, $\dot{y}_2(0)=0$, $\dot{y}_3(0)=0$ şeklinde verilmiştir.

Şekil 2’de görüldüğü gibi N değeri arttıkça Taylor matris çözümü tam çözüme yakınsamaktadır.



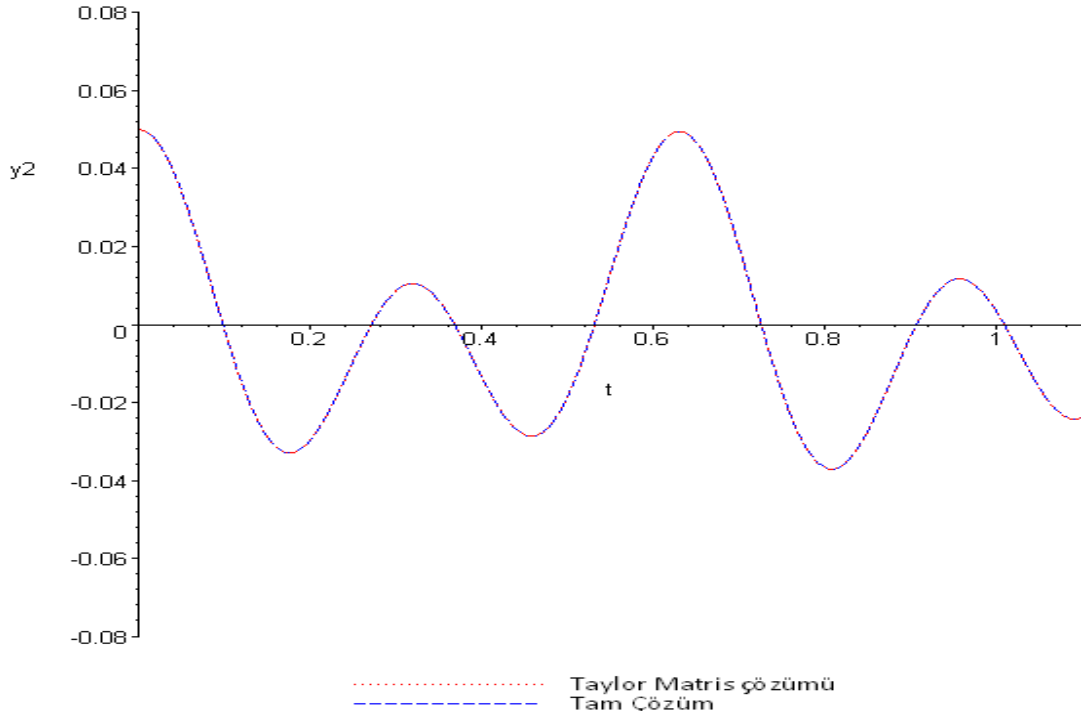
Şekil 2. N arttıkça Taylor matris çözümünün yakınsama grafiği

N=100 için m_1 kütesinin deplasmanının zamana değişimi Şekil 3’te gösterilmiştir.



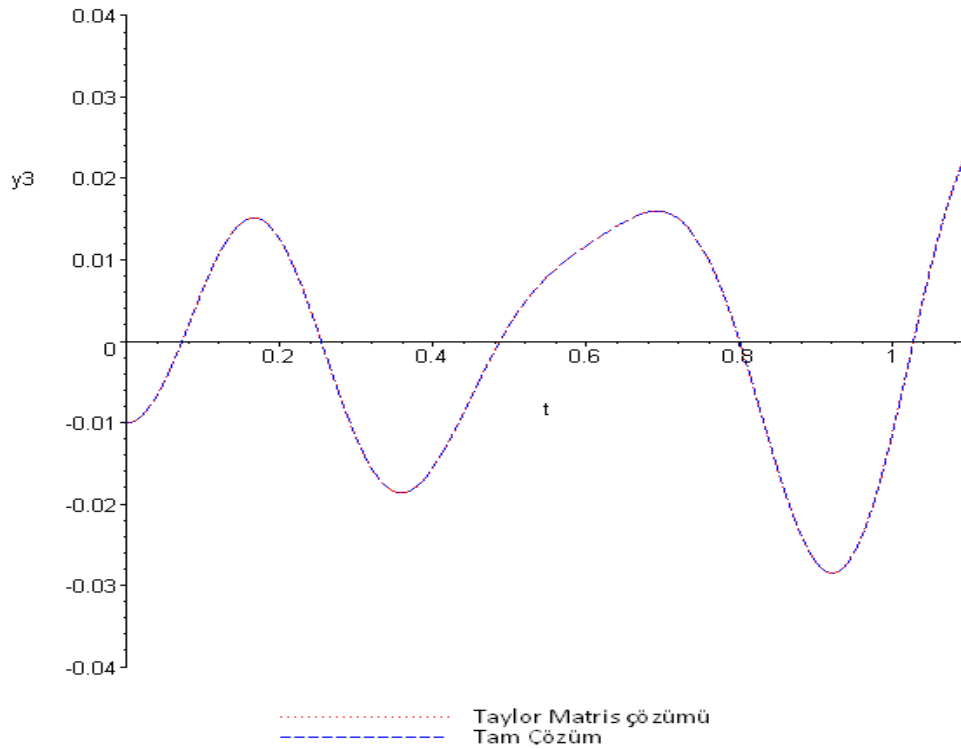
Şekil 3. y_1 'in zamana göre değişimi (N=100)

m_2 kütleinin zaman-deplasman grafiği N=100 için Şekil 4'teki gibidir.



Şekil 4. y_2 'nin zamana göre değişimi (N=100)

Şekil 5'te m_3 kütle için zaman-deplasman grafiği çizilmiştir (N=100).



Şekil 5. y_3 'ün zamana göre değişimi (N=100)

Şekil 3, 4 ve 5'te de görüldüğü gibi $N=100$ için tam çözüm ile Taylor matris çözümü örtüşmektedir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada üç kütle-den meydana gelmiş bir kütle-yay problemi özelinde üç serbestlik dereceli sistemlerin serbest titreşim analizinde Taylor matris yöntemi kullanılmıştır. Deplasman fonksiyonları bu yöntemle elde edilmiş ve grafikleri çizilmiştir. N artırılarak Taylor matris çözümlerinin tam çözüme yaklaştığı gözlenmiştir ve belli bir N değerinden sonrada Taylor matris çözümleri ile tam çözümlerin uyumlu olduğu görülmüştür.

Bu yöntem diğer tekniklerle karşılaştırıldığında gayet basit, kolay ve sistematik olarak uygulanabilmesi nedeniyle avantajlıdır. Ayrıca bu çözüm yöntemi yüksek mertebe sistemlere aynı basitlik ve kolaylıkla uygulanabilmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Inman, D. J., "Engineering Vibration" Prentice-Hall, 2001.
- [2] Kanwal, R.P., Liu, K.C., "A Taylor expansion approach for solving integral equations" International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 20 (3), 411-414, 1989.
- [3] Sezer, m., "A method for the approximate solution of the second-order linear differential equations in terms of Taylor polynomials" International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 27 (6), 821-834, 1996.
- [4] Maleknejad, K., Mahmoudi, Y., "Taylor polynomial solution of high-order Volterra-Fredholm integro-differential equations" Applied Mathematics and Computation 145 (2-3), 641-653, 2003.
- [5] Gülsu, M., Sezer, M., "A Taylor polynomial approach for solving differential difference equations" Journal of Computational and Applied Mathematics 186, 349-364, 2006.
- [6] Sezer, M., Daşcıoğlu, A. A., "Taylor polynomial solutions of general linear differential-difference equations with variable coefficients" Applied Mathematics and Computation 174 (2), 1526-1538, 2006.
- [7] Gülsu, M., Sezer, M., "On the solution of the Ricatti equation by the Taylor matrix method" Applied Mathematics and Computation 176, 414-421, 2006.
- [8] Sezer, M., Daşcıoğlu, A. A., "A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument" Journal of Computational and Applied Mathematics 200, 217-225, 2007.
- [9] Kurt, N., Çevik, M., "Polynomial solution of the single degree of freedom system by Taylor matrix method", Mechanics Research Communications 35, 530-536, 2008.
- [10] Çevik, M., "Application of Taylor Matrix method to the solution of longitudinal vibrations of rods", Mathematical and Computational Applications, 15 (3), 334-343, 2010.