



## ZEMİN ve AKIŞKAN ile ETKİLEŞEN PLAKLARIN SERBEST TİTREŞİM PROBLEMİ İÇİN BİR SINIR ELEMAN-KARIŞIK SONLU ELEMAN ÇÖZÜMÜ

Akif Kutlu, Bahadır Uğurlu ve Mehmet Hakkı Omurtag  
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

### ABSTRACT

In this study a new solution strategy for the free vibration analysis of Mindlin plates lying on Pasternak foundation and interacting with a quiescent fluid domain is presented. The Hellinger-Reissner variational principle is adopted for the plate-foundation system to generate a mixed finite element formulation and a boundary element solution scheme is presented for the fluid-structure interaction. Through the suggested formulation, the added mass matrix is defined in terms of plate deflection, which is then integrated into the plate equations of motion. Circular bottom plates of rigid fluid storage tanks are investigated as application of the method. The effect of the system parameters, such as thickness to width and fluid filling ratios, on the plate dynamic performance is thoroughly studied.

### ÖZET

Bu çalışmada, Pasternak zeminine yaslanan ve durağan akışkanla etkileşen Mindlin plaklarının serbest titreşim analizi için bir çözüm yöntemi sunulmuştur. Plak zemin sistemi için Hellinger-Reissner prensibi uygulanmış, yapı-akışkan etkileşimi içinse bir sınır eleman çözümü sunulmuştur. Önerilen çözüm şemasında akışkan etkisi plak yer değiştirmeleri cinsinden tarif edilmiş ve plak hareket denklemlerine eksü kütlesi formunda dahil edilmiştir. Yöntemin uygulaması olarak rijit akışkan tanklarının dairesel taban plakları ele alınmış, plak kalınlık-genişlik oranı, akışkan doluluk oranı gibi sistem parametrelerinin plağın dinamik davranışı üzerindeki etkileri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

### GİRİŞ

Yapısal sistemlerin temel elemanları arasında yer alan ve inşaat, gemi inşaatı, uçak gibi mühendislik alanlarında yaygın olarak kullanılan plakların [1] birçok uygulaması, farklı sürekli ortamlarla temas halinde olmalarını da gerektirir. Elastik zemin [2], akışkan ortamı [3] ya da ortak zemin ve akışkan ortamı [4] ile etkileşim gibi durumlarda oldukça değişebilen plak mekanik davranışı birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Kirchhoff plağı-Pasternak zemin etkileşimi problemini sonlu eleman yöntemi ile ele alan öncü çalışmalar arasında Omurtag ve diğ. [5] ve Omurtag ve Kadioğlu [6] gösterilebilir. Çubuk-zemin ve plak-zemin etkileşimiyle ilgili erken dönem çalışmalar kapsamlı bir şekilde Wang ve diğ. [7] tarafından derlenmiştir. Zhou ve diğ. [8] üç boyutlu elastisite denklemlerini kalın dairesel plaklara uygulayarak, Pasternak zeminine ile etkileşim hali için serbest titreşim problemini araştırmışlardır. Akhavan ve diğ. [9] Winkler/Pasternak zeminine oturan, düzlem içi kuvvetler etkisindeki dikdörtgen Mindlin plaklarının serbest titreşim problemi için kapalı formda kesin

bir çözüm sunmuşlardır. Yine üç boyutlu elastisite denklemlerini kullanan Dehghan and Baradaran [10], Pasternak zeminine oturan kalın plakların burkulma ve serbest titreşim problemini sonlu eleman ve diferansiyel kuadratur yöntemlerini birleştirerek incelemiştir. Plak-akışkan etkileşiminin incelendiği son dönemdeki çalışmalar ise şöyle özetlenebilir. Ergin ve Uğurlu kısmen akışkan içine daldırılmış ankastre mesnetli dikdörtgen plakların [3] ve akışkanla kısmen doldurulmuş tankların [11] serbest titreşim özelliklerini bir sınır eleman çözümü ile belirlemiştir. Jeong [12] rijit duvarlarla çevrili bir akışkan ortamını sınırlandıran iki özdeş dairesel plağın serbest titreşim parametrelerini Fourier-Bessel seri açılımı ve Rayleigh-Ritz yöntemini birleştirerek elde etmiştir. Dikdörtgen plaklar üzerine benzer bir çalışma, Jeong ve Kim [13] tarafından Rayleigh-Ritz yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Askari ve Daneshmand [14] silindirik bir cismin içerisine kısmen daldırılan bir rijit silindirik tankın dairesel taban plağının dinamik davranışını araştırmışlardır. Hasheminejad ve Tafani [15] rijit akışkan tanklarının eliptik taban plaklarının serbest titreşim özelliklerini incelemiştir.

Bağımsız plak-zemin ve plak-akışkan etkileşimi için çok sayıda çalışma yapılmış olmasına rağmen, plak-zemin-akışkan etkileşimini aynı anda inceleyen kısıtlı sayıda çalışma mevcuttur. Nispeten erken bir çalışmada, Chiba [16] Winkler zeminine oturan silindirik akışkan tankının ince elastik taban plağının aksel simetrik titreşimini analitik olarak incelemiştir. Uğurlu ve diğ. [17], karışık sonlu eleman yöntemi ve sınır eleman yöntemini birlikte kullanarak, Pasternak zemini ve sınırlandırılmamış akışkan ortamıyla kısmen etkileşim içinde olan ince dikdörtgen plakların dinamik davranışını araştırmışlardır. Hashemi ve diğ. [18] aynı problemi, Mindlin plak modeli ve sınırlandırılmış akışkan ortamı için, Timoshenko çubuk fonksiyonlarının uygulandığı bir Rayleigh-Ritz çözümü ile ele almışlardır. Hashemi ve diğ. [19] doğrusal değişen düzlem içi yükler altındaki taban plaklarının burkulma ve serbest titreşim analizini gerçekleştirmişlerdir. Kutlu ve diğ. [4], [17]'deki fiziksel modellerini, izotrop zemini ortotrop zeminle ve ince plağı kayma şekil değiştirmesi barındıran plakla değiştirerek geliştirmişlerdir.

Bu çalışmada, elastik zemin ve durağan akışkanla etkileşim halindeki plakların serbest titreşim analizi için, karışık sonlu eleman ve sınır eleman yöntemlerinin (sırasıyla yapısal ve akışkan problemleri için) birlikte uygulandığı bir yöntem önerilmiştir. Çalışmanın yazarların önceki benzer çalışmalarından [4,17] başlıca farkı, akışkan dinamik yükünün plak yer değiştirmeleri cinsinden tanımlanarak eksu kütleli cinsinden yapı hareket denkleminde dahil edilmesi ile akışkan-yapı etkileşiminin doğrudan sağlanmasıdır. Bu sayede, belli bir akışkan durumu için hesap edilen eksu kütleleri yapısal probleme aktarılmakta ve farklı plak parametreleri için analizler kolaylıkla yapılabilmektedir. Yöntemin sayısal uygulaması olarak dairesel en kesitli akışkan depolama tanklarının taban plakları incelenmiş, dinamik karakteristikler Mindlin plak ve Pasternak zemin modelleri uygulanarak elde edilmiştir.

## FORMÜLASYON

### Plak-Zemin Etkileşimi İçin Alan Denklemleri

Mindlin plak teorisinde yer değiştirme alanı bir adet çökme  $U(w)$  ve iki adet bağımsız kesit dönmesi  $\mathbf{R}(\varphi_x, \varphi_y)$  [1] ile tanımlanır. Plak eğrilikleri ve kesitte sabit kayma açıları  $\boldsymbol{\varepsilon}(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$  nispeten kalın plak için kartezyen koordinat sisteminde  $(x, y, z)$  Hellinger-Reissner prensibinde kullanılmak üzere yer değiştirmeler ( $\boldsymbol{\varepsilon}^u$ ) ve iç kuvvetler cinsinden ( $\boldsymbol{\varepsilon}^\sigma$ ) tarif edilirse:  $\boldsymbol{\varepsilon}^u = \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma$  eşitliği,

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x = \varphi_{x,x} &= \frac{12}{Eh^3} (M_{xx} - M_{yy}\nu) \quad , \quad \kappa_y = \varphi_{y,y} = \frac{12}{Eh^3} (M_{yy} - M_{xx}\nu) \\ \kappa_{xy} = \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} &= \frac{12M_{xy}}{Gh^3} \quad , \quad \gamma_{xz} = w_{,x} + \varphi_x = \frac{6S_{xz}}{5Gh} \\ \gamma_{yz} = w_{,y} + \varphi_y &= \frac{6S_{yz}}{5Gh} \quad , \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Burada,  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$ , ve  $h$  sırasıyla plak elastisite modülü, kayma modülü, Poisson oranı ve plak kalınlığıdır. Genel tarifleriyle;  $\mathbf{M}(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy})$  eğilme ve burulma momentlerini,  $\mathbf{S}(S_{xz}, S_{yz})$  ise kesit içindeki kesme kuvvetlerini temsil etmektedir. Pasternak elastik zemin modeli, plak ve zemin arasındaki basıncı  $p = kw - G_f w_{,xx} + w_{,yy}$  şeklinde tanımlar. Burada,  $k$  Winkler zemin parametresi ve  $G_f$  zemin kayma parametresidir. Pasternak zemini ile etkileşen Mindlin plağının denge denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir [4]:

$$\left. \begin{aligned} S_{xz,x} + S_{yz,y} - kw + G_f (w_{,xx} + w_{,yy}) &= 0 \\ M_{xx,x} + M_{xy,y} - S_{xz} &= 0 \\ M_{yy,y} + M_{xy,x} - S_{yz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

### Karışık Yapıdaki Fonksiyonelin Birinci Varyasyonu ve Sonlu Eleman Matrisleri

Hellinger-Reissner prensibine dayanarak, yapısal mekanik probleminin fonksiyonelinin birinci varyasyonu karışık yapıda,

$$\delta\Pi_{HR} = \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma)^T \delta\boldsymbol{\sigma} dV + \int_V (\boldsymbol{\sigma}^\sigma)^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}^u dV = 0, \quad (3)$$

ile verilebilir. Burada  $V$  problem bölgesini göstermektedir. Bünye bağıntıları (1) ve denge denklemlerinin (2), (3)'te yerleştirilmesi ile plak-zemin sisteminin fonksiyoneline ait birinci varyasyon,

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HR} &= \int_{\Omega} \left[ \varphi_{x,x} - \frac{12}{Eh^3} (M_{xx} - M_{yy}\nu) \right] \delta M_{xx} d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \varphi_{y,y} - \frac{12}{Eh^3} (M_{yy} - M_{xx}\nu) \right] \delta M_{yy} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \left[ \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} - \frac{12M_{xy}}{Gh^3} \right] \delta M_{xy} d\Omega + \int_{\Omega} \left[ w_{,x} + \varphi_x - \frac{6S_{xz}}{5Gh} \right] \delta S_{xz} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \left[ w_{,y} + \varphi_y - \frac{6S_{yz}}{5Gh} \right] \delta S_{yz} d\Omega + \int_{\Omega} [S_{xz} \delta w_{,x} + S_{yz} \delta w_{,y}] d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} [kw \delta w + G_f w_{,x} \delta w_{,x} + G_f w_{,y} \delta w_{,y}] d\Omega + \int_{\Omega} [M_{xx} \delta \varphi_{x,x} + M_{xy} \delta \varphi_{x,y} + S_{xz} \delta \varphi_x] d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} [M_{xy} \delta \varphi_{y,x} + M_{yy} \delta \varphi_{y,y} + S_{yz} \delta \varphi_y] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

olur. Burada  $\Omega$  plak ortalama düzlemdir. Denklem (4)'de verilen varyasyonel ifade, 4 düğüm noktalı ve  $C^0$  sürekliliğine sahip sonlu elemanlar kullanılarak, cebrik bir formda yazılabilir. Oluşan sistem matrisi  $[\mathbf{K}]$  karışık yapıda

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{ss}] & [\mathbf{k}_{su}] \\ [\mathbf{k}_{us}] & [\mathbf{k}_{uu}] \end{bmatrix} \quad (5)$$

şeklinde. Burada  $u$  ve  $s$  sırasıyla, karışık yapıdaki matriste yer değiştirmeler ve kuvvet tipi büyüklüklerle ilgili terimlere karşılık gelir. Dönel eylemsizliklerin de hesaba katılmasıyla, izoparametrik plak elemanında bir yer değiştirme ( $w$ ) ve iki dönmeyle ( $\varphi_x, \varphi_y$ ) ilişkilendirilen yayılı kütle matrisi aşağıdaki yapıdadır:

$$[\mathbf{m}] = \begin{bmatrix} \rho h [\mathbf{k}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{12} \rho h^3 [\mathbf{k}_1] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{12} \rho h^3 [\mathbf{k}_1] \end{bmatrix} \quad (6)$$

Burada,  $\rho$  plak yoğunluğu ve  $\mathbf{k}_1 = \int \hat{N}_i \hat{N}_j d\Omega$  alt matrisi  $\hat{N}$  bilineer interpolasyon fonksiyon çarpımlarının integralini barındıran alt matristir.

### Yapı-Akışkan Etkileşiminin Formülasyonu

İdeal ve hareketi irrotasyonel olan bir akışkan alanı için, akışkan hızı  $\mathbf{v}$ , hız potansiyel fonksiyonu  $\Phi$ 'nin gradyeni şeklinde;  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla \Phi(\mathbf{x}, t)$  ile tarif edilebilir. Burada  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$  konum vektörünü ve  $t$  zamanı temsil etmektedir. Süreklilik koşulundan,  $\Phi$  potansiyeli akışkan bölgesinde Laplace denklemini sağlar;  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Bernoulli denkleminde ikinci mertebe terimler ihmal edilerek, plak yüzeyindeki akışkan basıncı aşağıdaki denklemle verilir:

$$p = -\rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (7)$$

Burada,  $\rho_f$  akışkan yoğunluğudur. Plak-akışkan arayüzünde akışkan ve plağın hızlarının eşitliği aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$S_w \text{ 'de } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (8)$$

Burada  $\mathbf{n}$ , plak ıslak yüzeyi  $S_w$  üzerinde akışkan alanından dışa doğru yönelmiş olan normal doğrultusunu,  $w$  ise plak ortalama düzleminin çökmesini göstermektedir. Bu çalışmada, plağın yüksek frekanslarda titreştiği öngörülmüş ve akışkan serbest yüzey etkileri ihmal edilerek, serbest yüzey sınır koşulu olarak sonsuz frekans koşulu uygulanmıştır [3]:

$$\Phi = 0 \quad (9)$$

Potansiyel fonksiyon  $\Phi$  için tanımlanan sınır değer problemi, plak ıslak yüzeyinde geçerli bir sınır integral denklem ile ifade edilebilir:

$$c(\mathbf{X}) \Phi(\mathbf{X}) = \iint_{S_w} (\Phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{X}) q(\mathbf{x}) - q^*(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \Phi(\mathbf{x})) dS \quad (10)$$

Burada,  $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$  ve  $\mathbf{x}$  sırasıyla kaynak ve uygulama noktalarının konumunu temsil eder ve  $\Phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{X})$  Laplace denkleminin temel çözümüdür.  $q = \partial \Phi / \partial n$  akıya karşılık gelirken, temel çözümün tekil doğasından kaynaklanan  $c(\mathbf{X})$  serbest terimi,  $\Phi(\mathbf{X})$ 'in akışkan alanı içinde kalan oranını simgeler. Üç boyutlu homojen bir bölgede, temel çözüm ve akısı sırasıyla  $\Phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = 1/(4\pi r)$  ve  $q^*(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = -(\partial r / \partial n) / 4\pi r^2$ 'dir. Burada  $r$  kaynak ve bölge noktaları arasındaki uzaklıktır. Temel çözüm  $4\pi \Phi^* = 1/r - 1/r'$  şeklinde seçilerek, uygulanan serbest

yüzey şartı doğrudan sağlanabilir. Burada  $r' = [(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z+Z)^2]^{1/2}$ , uygulama noktası ile kaynak noktasının serbest yüzey simetriği arasındaki uzaklıktır.

Genel bir plak geometrisi için, (10) sınır integral denkleminin, üzerinde tanımlandığı plak ıslak yüzeyi; yüzey elemanları ile ayrıklaştırılır ve potansiyel fonksiyonu ile akı dağılımı elemanlar üzerinde düğüm noktalarındaki değerleri cinsinden yaklaşık olarak ifade edilir:

$$\Phi^i = \sum_{j=1}^{n_i} N_j \Phi_{ij} \quad , \quad q^i = \sum_{j=1}^{n_i} N_j q_{ij} \quad (11)$$

Burada,  $n_i$  sınır elemana atanan düğüm noktası sayısı,  $\Phi^i$ ,  $q^i$   $i$ . sınır eleman için sırasıyla potansiyel fonksiyonu ile akı ifadeleri,  $\Phi_{ij}$  ve  $q_{ij}$  elemanın  $j$ . düğüm noktasının sırasıyla potansiyel ve akı değerleri ve  $N_j$  şekil fonksiyonlarıdır. Bu çalışmada, 4 düğüm noktalı dörtgen elemanlar ve bilinear şekil fonksiyonları kullanılmıştır. Ayrıklaştırmada kullanılan tüm düğüm noktalarının (10) denkleminde yer alan kaynak noktaları olarak atanması, (8) kinematik sınır koşulunun tanıtılması ve (11) yaklaşımlarının uygulanması ile ıslak yüzey üzerindeki potansiyel fonksiyonu dağılımı için cebrik bir denklem sistemi elde edilir:

$$c_k \Phi_k + \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_i} (\Phi_{ij} \int_{S_i} N_j q^* dS) = i\omega \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_i} (w_{ij} \int_{S_i} N_j \Phi^* dS) \quad ; \quad k=1, \dots, n_n \quad (12)$$

Burada,  $n_n$  ve  $n_p$  sırasıyla toplam düğüm noktası ve sınır eleman sayılarını,  $S_i$   $i$ . sınır elemanın alanını,  $\Phi_k$   $k$ . düğüm noktasındaki potansiyel değerini ve  $w_{ij}$   $i$ . sınır elemanın  $j$ . düğüm noktasındaki çökme değerini göstermektedir. (12) denkleminin sağ tarafındaki  $i\omega$  çarpımı (8) sınır koşulunda harmonik harekete bağlı olarak ortaya çıkar. (12) denkleminde yüzey integrallerin uygulanması ile denklem sistemi,

$$\sum_{j=1}^{n_i} h_{ij} \Phi_j = i\omega \sum_{j=1}^{n_i} g_{ij} w_j \quad ; \quad i=1, \dots, n_n \quad (13)$$

şeklinde yazılabilir ve matris formda

$$\mathbf{H}\Phi = i\omega \mathbf{G}\mathbf{w} \quad (14)$$

halini alır. Burada,  $\Phi$  ve  $\mathbf{w}$  sırasıyla düğüm noktalarındaki potansiyel değerleri ve yer değiştirmeleri vektörleridir. (12) eşitliği her ne kadar sadece plak titreşimlerinden kaynaklanan akışkan hareketlenmelerini ifade etse de, rijit duvarlar gibi akışkan alanını sınırlayan yüzeylerin varlığı durumunda geçerli olacak şekilde de düzenlenebilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{pp} & \mathbf{H}^{pr} \\ \mathbf{H}^{rp} & \mathbf{H}^{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi^p \\ \Phi^r \end{Bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{pp} & \mathbf{G}^{pr} \\ \mathbf{G}^{rp} & \mathbf{G}^{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Burada,  $p$  ve  $r$  indisleri sırasıyla plak ıslak yüzeyi ve rijit duvar yüzeyini simgelemektedir ve  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{G}$  katsayı matrisleri ile  $\Phi$ ,  $\mathbf{w}$  vektörleri elastik ve rijit yüzeylerle ilişkili alt bileşenlere ayrılmıştır. Tarif edilen matris yapısından, plak ıslak yüzeyindeki potansiyel fonksiyon dağılımı,

$$\Phi^p = i\omega \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{w}, \quad (16)$$

ile elde edilebilir. Burada  $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{H}^{pp} - \mathbf{H}^{pr} (\mathbf{H}^{rr})^{-1} \mathbf{H}^{rp})^{-1} (\mathbf{G}^{pp} - \mathbf{H}^{pr} (\mathbf{H}^{rr})^{-1} \mathbf{G}^{rp})$  şeklindedir.

Plak yüzeyi üzerindeki dinamik akışkan basıncı  $\mathbf{p}$ , (16) ifadesinin (7) denkleminde kullanılması ile elde edilir:

$$\mathbf{p} = \rho_f \omega^2 \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{w} = -\mathbf{A} \ddot{\mathbf{w}} \quad (17)$$

Burada,  $\mathbf{A} = \rho_f \tilde{\mathbf{A}}$  akışkanın plak dinamiği üzerindeki atalet etkisini ifade eden eksu kütle matrisidir.

### Özdeğer Problemi

Plak hareketlerini tanımlayan denklem sistemi, plak yayılı kütle matrisi  $\mathbf{B}$  ile eksu kütle matrisinin global sistem matrisinde bir araya getirilmesiyle oluşturulur:

$$\left( \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{ss}] & [\mathbf{k}_{su}] \\ [\mathbf{k}_{us}] & [\mathbf{k}_{uu}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{B} + \mathbf{A}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\mathbf{M}, \mathbf{S}\}^T \\ \{\mathbf{U}, \mathbf{R}\}^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Burada,  $\omega$  zemin ve akışkan ile etkileşim içinde olan plağın doğal frekansını temsil etmektedir. Karışık formülasyonun doğası gereği (18) ifadesinde yer değiştirme ve gerilme bileşkesi tipindeki alan değişkenleri birlikte yer alır. Kondense sistem matrisinin

$$[\mathbf{K}^*] = [\mathbf{k}_{uu}] - [\mathbf{k}_{su}]^T [\mathbf{k}_{ss}]^{-1} [\mathbf{k}_{su}] \quad (19)$$

olarak tanımlanmasıyla, sadece yer değiştirme bileşenlerine bağlı bir özdeğer denklemi,

$$\left( [\mathbf{K}^*] - \omega^2 [\mathbf{B} + \mathbf{A}] \right) \{\mathbf{U}, \mathbf{R}^T\} = \{\mathbf{0}\} \quad (20)$$

ile verilebilir.

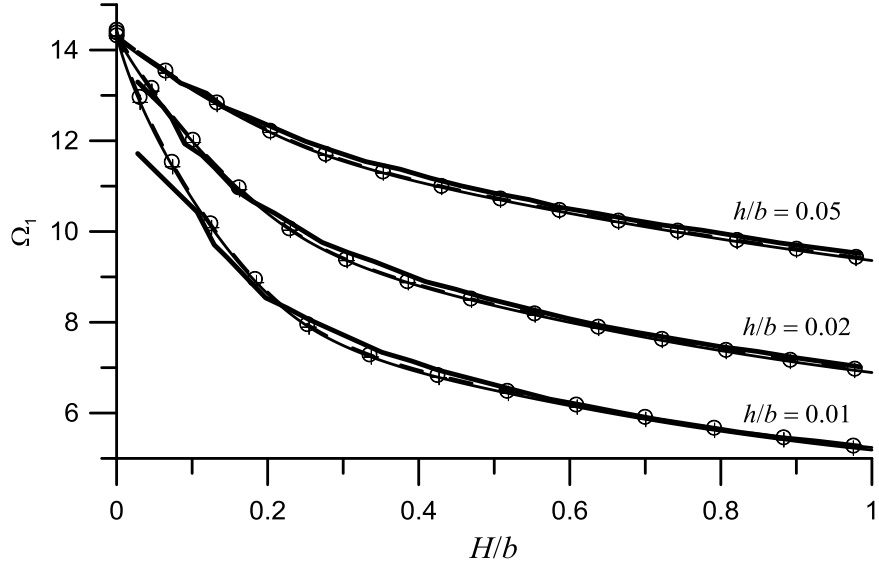
### SAYISAL SONUÇLAR

Geliştirilen çözüm yöntemi, elastik zemine oturan daire enkesitli rijit akışkan tanklarının taban plaklarının serbest titreşim analizine uygulanacaktır. Elde edilen sonuçlar, boyutsuzlaştırılarak,  $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$  frekans parametresi cinsinden sunulacaktır. Burada  $b$  daire plak yarıçapı ve  $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$  plak eğilme rijitliğidir. Plak zemini için boyutsuz Winkler ve kayma parametreleri sırasıyla  $\tilde{k} = k b^4 / D$  ve  $\tilde{G}_f = G_f b^2 / D$  ile tanımlanmıştır. Hesaplamalarda, Poisson oranı  $\nu = 0.3$  ve plak-akışkan yoğunluk oranı  $\rho / \rho_f = 10$  olarak alınmış, ayrıca dairesel taban plağı rijit duvara ankastre mesnetle bağlanmıştır.

### Winkler Zeminine Oturan Dairesel Taban Plağı: Yakınsama Analizi ve Eksenel Simetrik Modlar için Doğrulama

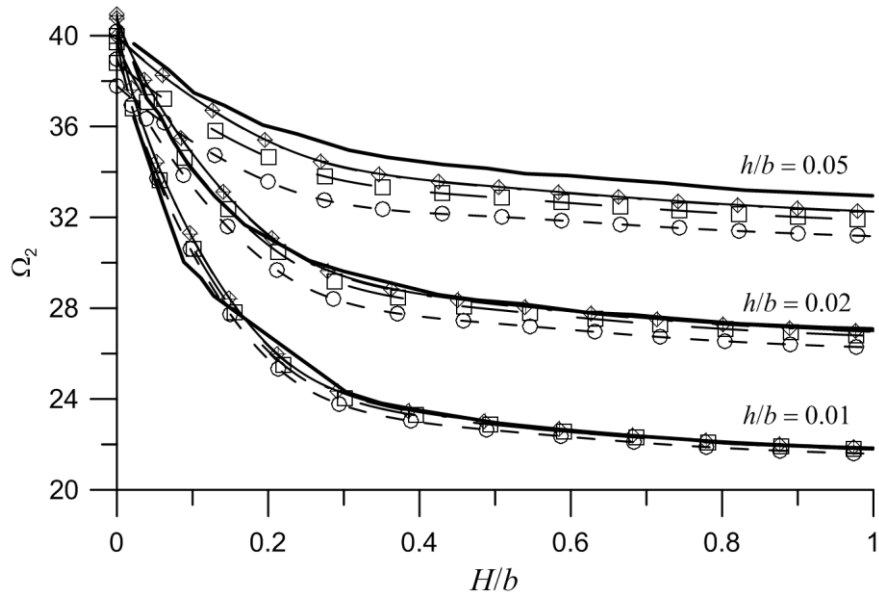
Önerilen çözüm yöntemini doğrulamak ve sayısal yöntemin yakınsamasını incelemek üzere, Chiba [16] tarafından incelenen Winkler zeminine oturan ince daire taban plağı çalışılmıştır. Üç farklı plak kalınlık oranı için hesaplanan ilk iki eksenel simetrik moda ait doğal frekans değerleri, akışkan yüksekliğine ( $H/b$ ) bağlı olarak Şekil 1-2'de görülebilir. Değerlerdeki yakınsamayı gözlemek için 108, 192, 300 ve 432 elemandan oluşan 4 farklı ağ yapısı kullanılmıştır. Düzlem içi kuvvetlerin etkisini gözetken Chiba [16] sonuçlarından, dinamik davranış üzerindeki etkinin en düşük olduğu, yerçekim ivme parametresi  $\bar{g} = \Omega^2 g / h = 10^{-10}$  için verilen sonuçlar referans değerler olarak alınmıştır. İstikrarlı bir yakınsama davranışı ve Chiba [16]'da sunulan değerlerle uyumlu sonuçlar elde edilmiştir. Yüksek modlarda yakınsama daha yavaş gerçekleşirken, plak kalınlığının incilmesi ile birlikte daha hızlı bir yakınsamanın sağlandığı dikkat çekmektedir. Beklenebileceği gibi, mod sayısı yükseldikçe ve

plak kalınlığı arttıkça, kayma etkisinin gözetildiği bu çalışmaya ait değerlerle Chiba [16] sonuçları birbirinden uzaklaşmaktadır. Artan akışkan yüksekliği ile birlikte frekans parametrelerinin bir asimptota yaklaşma eğilimi, yüksek modlarda daha önce görülmektedir.



Şekil 1. Dairesel taban plağının birinci aksel simetrik frekansı ( $\Omega_1$ );  $\tilde{k} = 100$ ,  $\tilde{G}_f = 0$ .

———— Chiba [16],  $\ominus$  —  $\ominus$  108 eleman,  $\square$  —  $\square$  192 eleman,  $\diamond$  —  $\diamond$  300 eleman,  $\dagger$  —  $\dagger$  432 eleman



Şekil 2. Dairesel taban plağının ikinci aksel simetrik frekansı ( $\Omega_2$ );  $\tilde{k} = 100$ ,  $\tilde{G}_f = 0$ .

———— Chiba [19],  $\ominus$  —  $\ominus$  108 eleman,  $\square$  —  $\square$  192 eleman,  $\diamond$  —  $\diamond$  300 eleman,  $\dagger$  —  $\dagger$  432 eleman

### Pasternak Zeminine Oturan Daire Taban Plağının Serbest Titreşim Frekansları

Pasternak zeminine oturan daire şeklindeki taban plaklarının dinamik davranışı, sunulan çözüm yöntemi ile ve yakınsama analizine dayanarak 432 elemanlı ayrıklaştırmalar kullanılarak incelenmiştir. Çeşitli zemin parametreleri, plak kalınlık oranları ve akışkan

yüksekliğine bağlı olarak, ilk iki moda karşılık gelen boyutsuz frekans değerleri Çizelge 1-2'de sunulmuştur. Sonuçlardan görülebileceği gibi, akışkan yüksekliği arttıkça frekans değerleri zemin kayma parametresindeki değişimden daha az etkilenmektedir ve özellikle birinci modda, plak kalınlık oranı arttıkça bu davranış daha belirgin olmaktadır. İkinci doğal frekansın, zemin kayma parametresindeki değişimlere karşı daha duyarlı olması dikkat çekicidir. Plak inceldikçe, plak dinamik davranışı üzerindeki akışkan atalet etkisi de artmaktadır.

Çizelge 1. Pasternak zeminine oturan daire taban plağının birinci mod frekansları

$H/b$	$h/b=0.01$			$h/b=0.02$			$h/b=0.05$		
	$(\tilde{k}, \tilde{G})$			$(\tilde{k}, \tilde{G})$			$(\tilde{k}, \tilde{G})$		
	(100,5)	(100,10)	(200,5)	(100,5)	(100,10)	(200,5)	(100,5)	(100,10)	(200,5)
0.00	15.4980	16.5812	18.4440	15.4887	16.5715	18.4358	15.4392	16.5186	18.3910
0.25	8.5962	9.1930	10.2296	10.6252	11.3641	12.6463	12.8232	13.7167	15.2746
0.50	7.0254	7.5056	8.3554	9.0453	9.6659	10.7614	11.5977	12.3979	13.8120
0.75	6.1822	6.5992	7.3462	8.1186	8.6689	9.6520	10.7712	11.5069	12.8224
1.00	5.5940	5.9678	6.6420	7.4400	7.9396	8.8391	10.1110	10.7958	12.0305

Çizelge 2. Pasternak zeminine oturan daire taban plağının ikinci mod frekansları

$H/b$	$h/b=0.01$			$h/b=0.02$			$h/b=0.05$		
	$(\tilde{k}, \tilde{G})$			$(\tilde{k}, \tilde{G})$			$(\tilde{k}, \tilde{G})$		
	(100,5)	(100,10)	(200,5)	(100,5)	(100,10)	(200,5)	(100,5)	(100,10)	(200,5)
0.00	25.3247	26.9669	27.2273	25.2866	26.9285	27.1911	25.0608	26.7002	26.9761
0.25	14.6610	15.6060	15.7617	17.9185	19.0766	19.2675	21.2111	22.5944	22.8320
0.50	12.8654	13.6862	13.8279	16.2009	17.2394	17.4178	19.9768	21.2719	21.5018
0.75	12.2237	12.9993	13.1357	15.5505	16.5427	16.7162	19.4694	20.7273	20.9542
1.00	11.9681	12.7258	12.8599	15.2859	16.2594	16.4308	19.2564	20.4987	20.7243

## SONUÇLAR ve DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, dinamik plak-akışkan-zemin etkileşim problemi için karışık sonlu eleman yöntemi ile sınır eleman yöntemini bir araya getiren bir sayısal çözüm yöntemi sunulmuştur. Mindlin plağı-Pasternak zemin sistemi Hellinger-Reissner prensibine dayalı, iki alanlı bir formülasyonla tarif edilmiş, 4 düğüm noktalı dörtgen izoparametrik sonlu elemanlar ile sistem matrisi üretilmiştir. Önerilen yöntemde, hidrodinamik basınç sonucu oluşan eksu kütlesi plak çökmeleri cinsinden tarif edilerek, doğrudan plak hareket denkleminde dahil edilmiştir. Yayılı kütle yaklaşımıyla oluşturulan plak kütle matrisinde plak dönел eylemsizlikleri de hesaba katılmıştır. Yapısal frekans değerlerinin elde edildiği özdeğer denklemleri bir kondensasyon işleminin ardından, karışık yapıdaki sistem denklemlerinden kuvvet tipi alan değişkenlerinin elenmesi yolu ile elde edilmiştir. Önerilen yöntem, akışkan depolayan ve zemine oturan rijit tankların taban plaklarının dinamik davranışının belirlenmesinde kullanılmıştır. Literatürle yapılan karşılaştırmalarda, sayısal yöntemin tutarlı bir yakınsama davranışı sergilediği ve uyumlu sonuçlar ürettiği gözlenmiştir. Zemin parametrelerinin, plak kalınlık oranının ve akışkan yüksekliğinin plak dinamik davranışına olan etkileri sunulan örneklerle incelenmiştir.



**KAYNAKLAR**

- [1] R. Szilard, Theories and Applications of Plate Analysis, John Wiley and Sons, 2004.
- [2] A. Kutlu, M.H. Omurtag, Large deflection bending analysis of elliptic plates on orthotropic elastic foundation with mixed finite element method, *International Journal of Mechanical Sciences*. 65 (2012) 64–74. doi:10.1016/j.ijmecsci.2012.09.004.
- [3] A. Ergin, B. Uğurlu, Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid, *Journal of Fluids and Structures*. 17 (2003) 927–939. doi:10.1016/S0889-9746(03)00050-1.
- [4] A. Kutlu, B. Uğurlu, M.H. Omurtag, A. Ergin, Dynamic response of Mindlin plates resting on arbitrarily orthotropic Pasternak foundation and partially in contact with fluid, *Ocean Eng.* 42 (2012) 112–125. doi:10.1016/j.oceaneng.2012.01.010.
- [5] M.H. Omurtag, A. Özütok, A.Y. Aköz, Y. Özçelikörs, Free vibration analysis of Kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gâteaux differential, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 40 (1997) 295–317. doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19970130)40:2<295::AID-NME66>3.0.CO;2-2.
- [6] M.H. Omurtag, F. Kadioğlu, Free vibration analysis of orthotropic plates resting on Pasternak foundation by mixed finite element formulation, *Computers & Structures*. 67 (1998) 253–265. doi:10.1016/S0045-7949(97)00128-4.
- [7] Y.H. Wang, L.G. Tham, Y.K. Cheung, Beams and plates on elastic foundations: a review, *Progress in Structural Engineering and Materials*. 7 (2005) 174–182. doi:10.1002/pse.202.
- [8] D. Zhou, S.H. Lo, F.T.K. Au, Y.K. Cheung, Three-dimensional free vibration of thick circular plates on Pasternak foundation, *J. Sound. Vib.* 292 (2006) 726–741. doi:10.1016/j.jsv.2005.08.028.
- [9] H. Akhavan, S.H. Hashemi, H.R.D. Taher, A. Alibeigloo, S. Vahabi, Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation. Part II: Frequency analysis, *Computational Materials Science*. 44 (2009) 951–961. doi:10.1016/j.commatsci.2008.07.001.
- [10] M. Dehghan, G.H. Baradaran, Buckling and free vibration analysis of thick rectangular plates resting on elastic foundation using mixed finite element and differential quadrature method, *Applied Mathematics and Computation*. 218 (2011) 2772–2784. doi:10.1016/j.amc.2011.08.020.
- [11] A. Ergin, B. Uğurlu, Hydroelastic analysis of fluid storage tanks by using a boundary integral equation method, *Journal of Sound and Vibration*. 275 (2004) 489–513. doi:10.1016/j.jsv.2003.07.034.
- [12] K.-H. Jeong, Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid, *Journal of Sound and Vibration*. 260 (2003) 653–670. doi:10.1016/S0022-460X(02)01012-X.
- [13] K.-H. Jeong, J.-W. Kim, Hydroelastic vibration analysis of two flexible rectangular plates partially coupled with a liquid, *Nuclear Engineering and Technology*. 41 (2009) 335–346. doi:10.5516/NET.2009.41.3.335.
- [14] E. Askari, F. Daneshmand, Free vibration of an elastic bottom plate of a partially fluid-filled cylindrical container with an internal body, *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 29 (2010) 68–80. doi:10.1016/j.euromechsol.2009.05.005.
- [15] S.M. Hasheminejad, M. Tafani, Coupled hydroelastic vibrations of an elliptical cylindrical tank with an elastic bottom, *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*. 26 (2014) 264–276. doi:10.1016/S1001-6058(14)60030-5.

- [16] M. Chiba, Axisymmetric free hydroelastic vibration of a flexural bottom plate in a cylindrical tank supported on an elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration*. 169 (1994) 387–394. doi:10.1006/jsvi.1994.1024.
- [17] B. Ugurlu, A. Kutlu, A. Ergin, M.H. Omurtag, Dynamics of a rectangular plate resting on an elastic foundation and partially in contact with a quiescent fluid, *J. Sound. Vib.* 317 (2008) 308–328. doi:10.1016/j.jsv.2008.03.022.
- [18] S. Hosseini Hashemi, M. Karimi, H. Rokni Damavandi Taher, Vibration analysis of rectangular Mindlin plates on elastic foundations and vertically in contact with stationary fluid by the Ritz method, *Ocean Eng.* 37 (2010) 174–185. doi:10.1016/j.oceaneng.2009.12.001.
- [19] S. Hosseini-Hashemi, M. Karimi, D.T. Hossein Rokni, Hydroelastic vibration and buckling of rectangular Mindlin plates on Pasternak foundations under linearly varying in-plane loads, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 30 (2010) 1487–1499. doi:10.1016/j.soildyn.2010.06.019.