



## ODAKLANAN KÜBİK, ODAKTAN SAPAN KUİNTİK ORTAMDA PT-SİMETRİSİNE SAHİP KAFESLER ÜZERİNDE NLS DENKLEMİNİN TEMEL SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

İzzet Göksel<sup>1</sup> ve İlkay Bakırtaş<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>İTÜ Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul

### ABSTRACT

In this work, the existence and stability properties of two-dimensional optical solitons in cubic-quintic nonlinear Schrödinger (CQNLS) equation with several defective PT-symmetric potentials are studied. The numerical existence of fundamental solitons on these PT-symmetric lattices is shown for various potential depths and defects in self-focusing cubic, self-defocusing quintic media.

### ÖZET

Bu çalışmada, parite-zaman (PT) simetrisine sahip birtakım bozuk kafesler üzerinde kübik-kuintik, doğrusal olmayan Schrödinger (CQNLS) denkleminin iki boyutlu optik solitonlarının varlıkları ve kararlılıkları incelenmiştir. PT simetrisine sahip bu kafesler üzerinde temel solitonların sayısal varlığı; odaklanan kübik, odaktan sapan kuintik ortamda farklı potansiyel derinlikleri ve kusurlar için gösterilmiştir.

### GİRİŞ

Hem kübik hem kuintik terim içeren doğrusal olmayan Schrödinger (CQNLS) denklemi, birçok fiziksel durumu betimler ve özellikle de optikte karşımıza çıkar [1]. Doğrusal olmayan optikte, CQNLS denklemi bir elektromanyetik dalganın ışık kırıcı maddelerde yayılımını betimler. Kübik-kuintik doğrusalsızlık, madde içindeki bir öz rezonans yüzündendir ve güçlü iki-foton emilimini beraberinde getirir [2].

Bu çalışmada, parite-zaman (PT) simetrisine sahip birtakım kafesler üzerinde optik solitonların varlığı ve kararlılığı incelenecektir. Kullanılan fiziksel modeli ifade eden eşitlik; 2+1 boyutlu, odaklanan kübik, odaktan sapan kuintik ortamda, doğrusal olmayan, dış potansiyelli Schrödinger denklemdir:

$$iu_z + u_{xx} + u_{yy} + \alpha |u|^2 u + \beta |u|^4 u + V_{PT}u = 0 . \quad (1)$$

Burada  $u(x, y, z)$  karmaşık değerli fonksiyonu,  $xy$ -düzleminde olup  $z$  eksenini boyunca yayılan alanın yavaşça değişen genliğine;  $u_{xx} + u_{yy}$  kırınımına;  $V_{PT}(x, y)$  PT simetrisine sahip dış potansiyelle karşı gelmektedir.  $\alpha$  ve  $\beta$  sırasıyla kübik ve kuintik doğrusalsızlık katsayılarıdır ve bunların pozitif olması odaklanmaya, negatif olması ise odaktan sapmaya

karşı gelmektedir. Çalışmada odaklanan kübik, odaktan sapan kuintik ortam ele alındığından,  $\alpha = 1$   $\beta = -0,1$  olarak seçilmiştir.

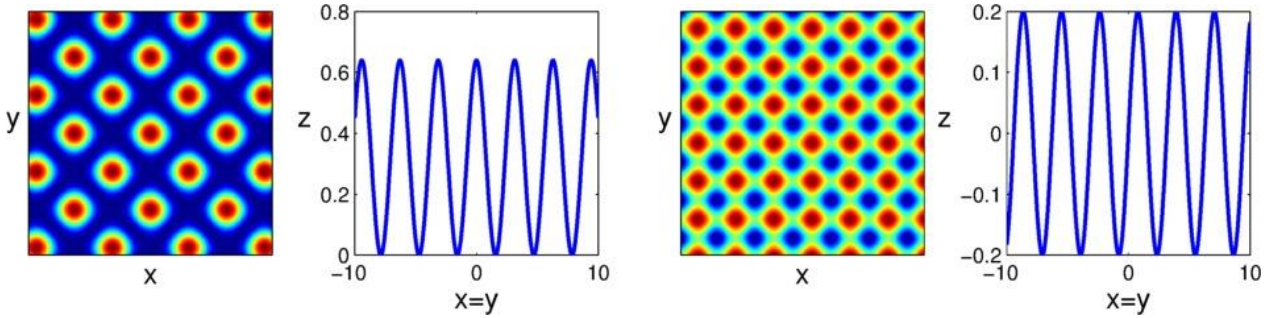
(1) denkleminin çözümü spektral yöntemlerle bulunacaktır [3]. İncelenecek potansiyeller, PT simetrisinin gerek koşulu olan  $V_{PT}(x, y) = V_{PT}^*(-x, -y)$  eşitliğini [4] sağlamakta olup aşağıdaki yapıdadır:

$$V_{PT}(x, y) = \frac{V_0}{25} \left| 2 \cos(x) + 2 \cos(y) + \delta e^{i\theta(x,y)} \right|^2 + iW_0 [\sin(2x) + \sin(2y)] . \quad (2)$$

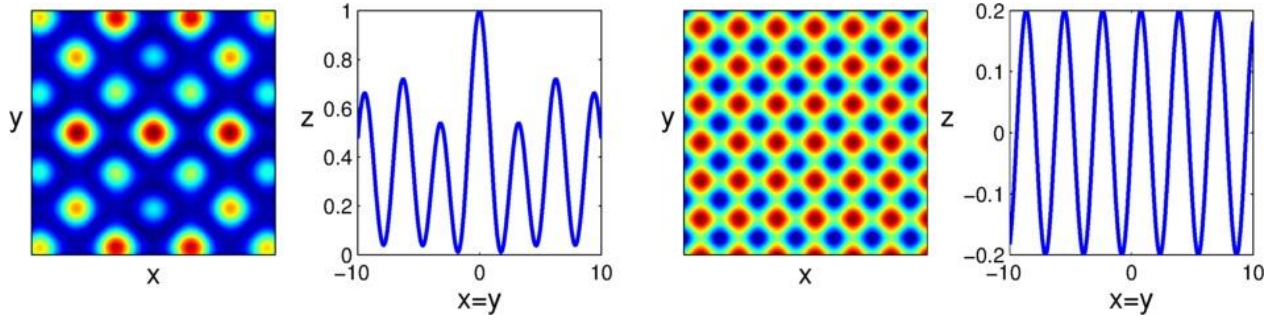
Burada  $V_0$  ve  $W_0$  sırasıyla potansiyelin gerçel ve sanal kısımlarının derinliklerini temsil etmektedir ve

$$\theta(x, y) = \arctan\left(\frac{y - \pi}{x}\right) \pm \arctan\left(\frac{y + \pi}{x}\right) \quad (3)$$

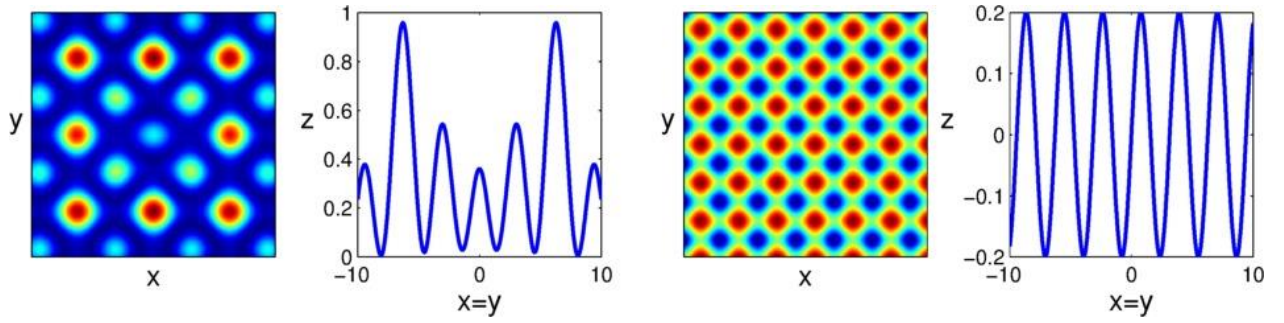
ile ifade edilen faz fonksiyonu  $\theta(x, y)$ , artı veya eksi işaretine göre kafes yapısında pozitif veya negatif bir kusur meydana getirmektedir [5].  $\delta$  katsayısının 0 olarak alınması potansiyelde kusur olmadığı duruma, 1 olarak alınması kusur olduğu duruma karşı gelmektedir. Çalışmada incelenen potansiyellerin gerçel ve sanal kısımlarına ait üstten görünüşleri ve köşegen kesitleri aşağıdaki şekillerde verilmiştir. Şekil 1'de kusur içermeyen potansiyel, Şekil 2'de pozitif kusur içeren potansiyel, Şekil 3'te negatif kusur içeren potansiyel resmedilmiştir.



Şekil 1: (Soldan sağa)  $V_0 = 1$  ;  $W_0 = 0,1$  ;  $\delta = 0$  değerleri için (2) potansiyelinin gerçel kısmının üstten görünüşü, gerçel kısmının köşegen kesiti, sanal kısmının üstten görünüşü ve sanal kısmının köşegen kesiti.



**Şekil 2:** (Soldan sağa) (3) denklemindeki işaret '+' olmak üzere  $V_0 = 1$  ;  $W_0 = 0,1$  ;  $\delta = 1$  değerleri için (2) potansiyelinin gerçel kısmının üstten görünüşü, gerçel kısmının köşegen kesiti, sanal kısmının üstten görünüşü ve sanal kısmının köşegen kesiti.



**Şekil 3:** (Soldan sağa) (3) denklemindeki işaret '-' olmak üzere  $V_0 = 1$  ;  $W_0 = 0,1$  ;  $\delta = 1$  değerleri için (2) potansiyelinin gerçel kısmının üstten görünüşü, gerçel kısmının köşegen kesiti, sanal kısmının üstten görünüşü ve sanal kısmının köşegen kesiti.

Bu çalışmada, PT simetrisine sahip kafesler üzerinde temel solitonların sayısal varlığı farklı potansiyel derinlikleri ve kusurlar için gösterilecektir. Sonrasında, elde edilen solitonların kararlılıkları incelenecek ve kafes yapısındaki kusurların bunlara olan etkisi tartışılacaktır.

## YÖNTEM

CQNLS denkleminin sayısal çözümünde, tayfı yeniden normelleştirme [3] olarak bilinen yöntemden yararlanılmıştır. Temelde bir Fourier yinelemesi olan bu yöntemde, sonuçlar  $u(x, y, z) = f(x, y) \cdot e^{i\mu z}$  çözüm önerisi ve  $f(x, y) = \lambda w(x, y)$  ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  dönüşümünde sonra Fourier uzayına geçilerek başlangıç koşulu  $f_0(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$  olarak alınan

$$\hat{w}_{n+1} = \frac{\alpha \lambda^2 \mathcal{F}(|w_n|^2 w_n) + \beta \lambda^4 \mathcal{F}(|w_n|^4 w_n) + \mathcal{F}(V_{PT} w_n)}{\mu + k_x^2 + k_y^2} , n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

özyinelemesiyle  $10^{-6}$  mertebesinde yakınsaklık sağlanmasıyla elde edilmiştir. Çalışmada,  $\mu = 1$  olarak alınmıştır.

Doğrusal kararlılık incelemesi, çözümlere ufak bir tedirgeme (pertürbasyon) eklenip elde edilen doğrusal tayfın özdeğerlerine bakılarak gerçekleştirilmiştir.  $0 < \varepsilon \ll 1$  olmak üzere,

$$u(x, y, z) = f(x, y) \cdot e^{i\mu z} + \varepsilon \cdot \left[ g(x, y)e^{\sigma z} + h^*(x, y)e^{\sigma^* z} \right] e^{i\mu z} \quad (5)$$

tedirgenmiş çözümün doğrusal tayfı,  $L_1 = \partial_{xx} + \partial_{yy} + 2\alpha|f|^2 + 3\beta|f|^4 - \mu + V_{PT}$  ve  $L_2 = \alpha f^2 + 2\beta f^3 f^*$  olmak üzere

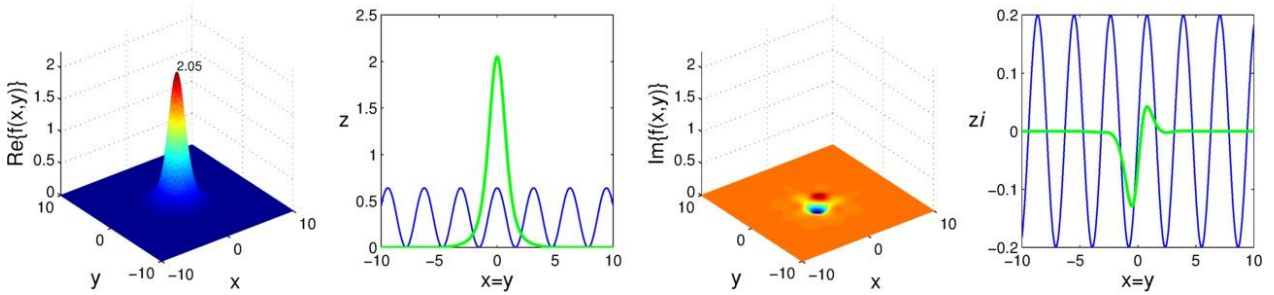
$$i \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ -L_2^* & -L_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \quad (6)$$

denklem sistemiyle ifade edilmektedir. (5) denkleminde görüleceği üzere, çözümün patlamaması için  $\sigma$  özdeğerlerinin gerçel kısımlarının sıfır olması gerekmektedir.

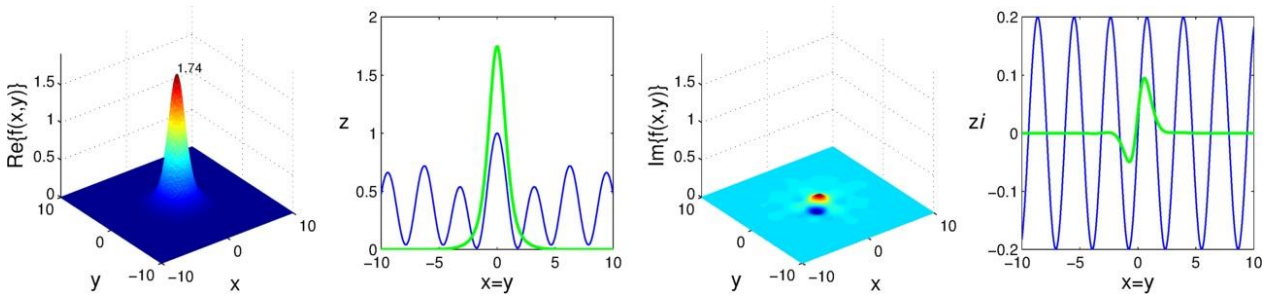
Doğrusal olmayan kararlılık incelemesi, çözümlerin doğrudan benzetimle iletilmesi sırasında şekil, konum ve genliklerinin korunup korunmamasına bakılarak gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla, çözümler zaman basamaklı Fourier (split-step Fourier) yöntemiyle  $z$  boyunca iletilmiş ve her adımda bahsedilen özelliklerinin değişip değişmediği incelenmiştir.

### TEMEL SOLİTON ÇÖZÜMLER VE KARARLILIK İNCELEMESİ

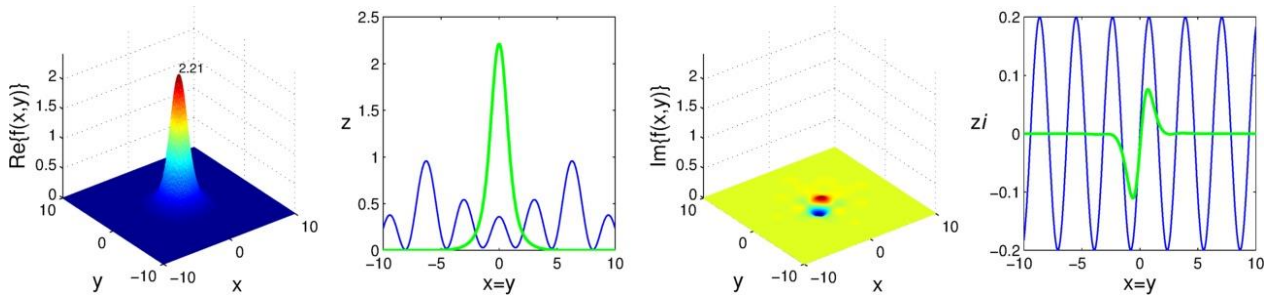
Odaklanan kübik, odaktan sapan kuintik ortamda temel solitonlar değişik potansiyel derinlikleri için elde edilmiştir. Temsili olarak,  $V_0 = 1$ ;  $W_0 = 0,1$  derinlikleri için elde edilen solitonlar Şekil 4'te kusur içermeyen potansiyel, Şekil 5'te pozitif kusur içeren potansiyel ve Şekil 6'da negatif kusur içeren potansiyel için resmedilmiştir.



Şekil 4:  $\alpha = 1$ ;  $\beta = -0,1$ ;  $\delta = 0$ ;  $\mu = 1$ ;  $V_0 = 1$ ;  $W_0 = 0,1$  değerleri için elde edilen solitonun gerçel ve sanal kısımlarının görüntüleri.

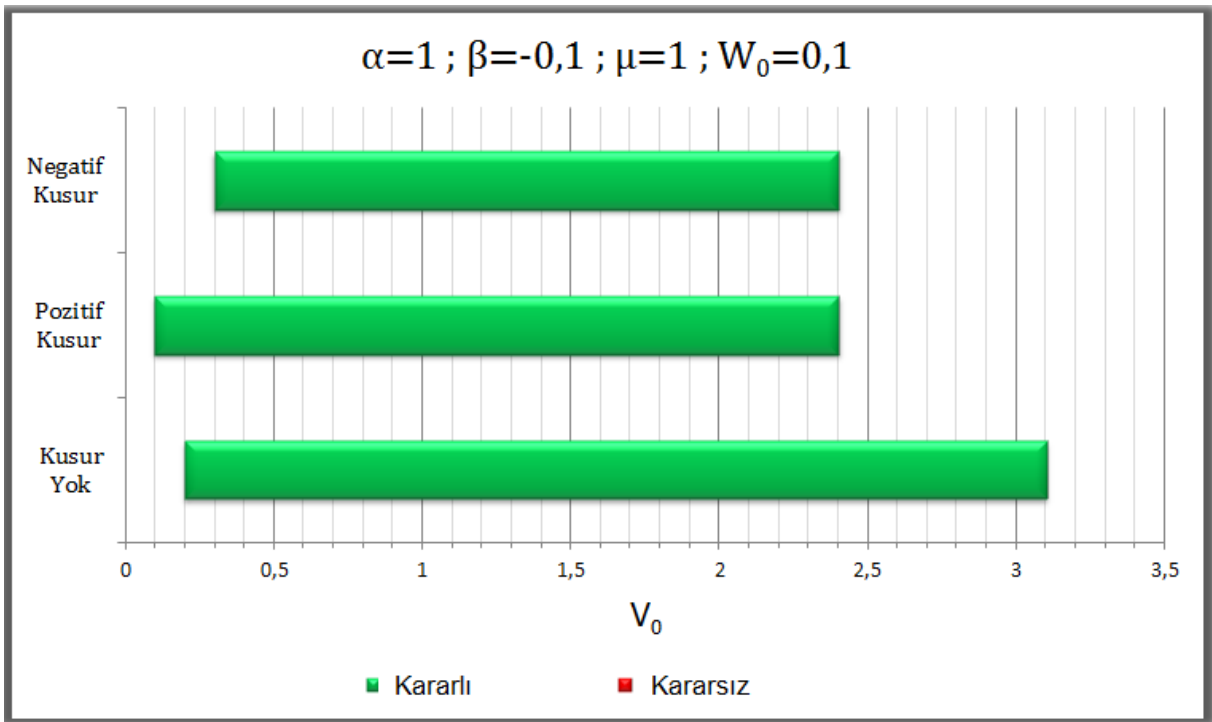


Şekil 5: (3) denklemindeki işaret '+' olmak üzere,  $\alpha = 1$ ;  $\beta = -0,1$ ;  $\delta = 1$ ;  $\mu = 1$ ;  $V_0 = 1$ ;  $W_0 = 0,1$  değerleri için elde edilen solitonun gerçel ve sanal kısımlarının görüntüleri.



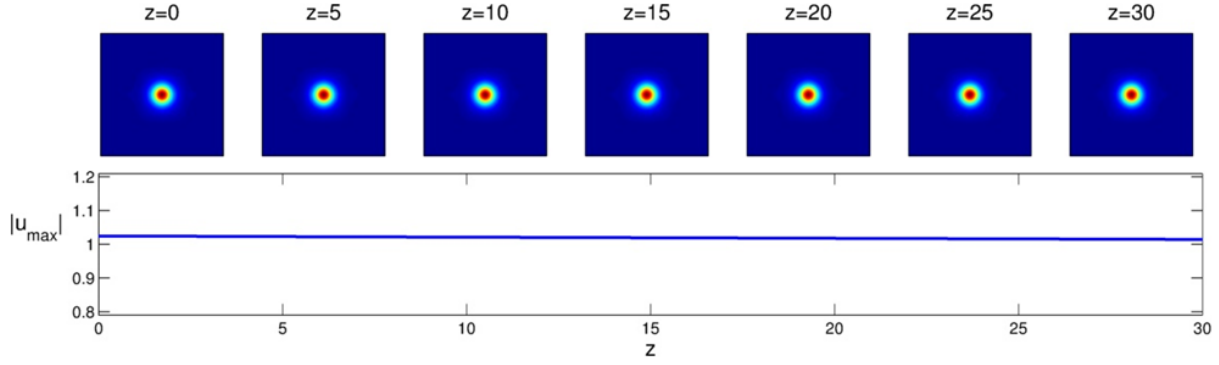
**Şekil 6:** (3) denklemindeki işaret '-' olmak üzere,  $\alpha = 1$  ;  $\beta = -0,1$  ;  $\delta = 1$  ;  $\mu = 1$  ;  $V_0 = 1$  ;  $W_0 = 0,1$  değerleri için elde edilen solitonun gerçel ve sanal kısımlarının görüntüleri.

Farklı kusurların ve potansiyelin gerçel kısmının derinliğinin solitonların varlık ve kararlılıkları üzerindeki etkilerini incelemek için, sanal kısmın derinliği  $W_0$  sabit tutularak farklı  $V_0$  değerleri ve kusurlar için çözümler elde edilmiş ve sonuçlar **Şekil 7**'de gösterilmiştir.



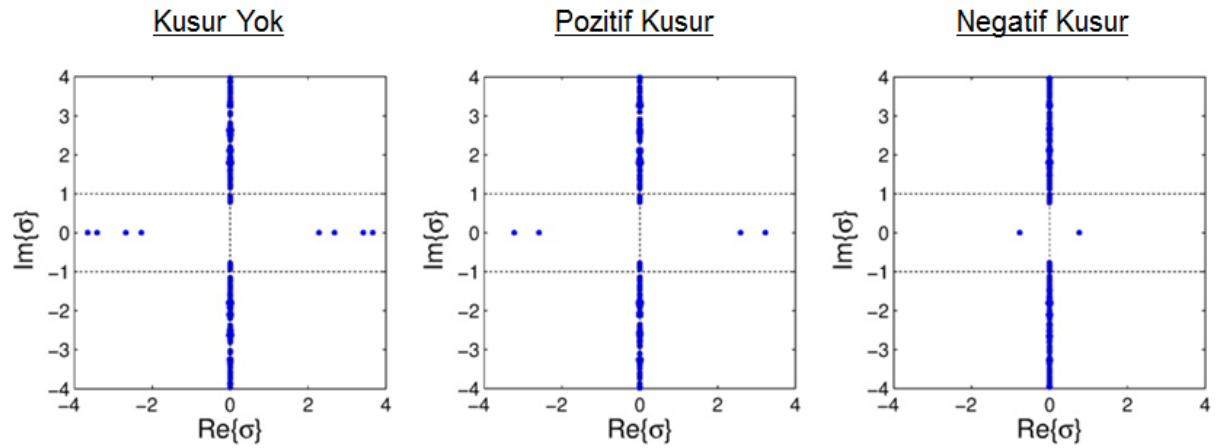
**Şekil 7:** Farklı kusurlar ve  $\alpha = 1$  ;  $\beta = -0,1$  ;  $\mu = 1$  ;  $W_0 = 0,1$  değerleri için elde edilen solitonların varlıkları ve doğrusal olmayan anlamda kararlılıkları.

**Şekil 8**'deki  $V_0 = 2$  için elde edilen solitonun doğrudan benzetimi incelendiğinde; bu solitonun, şekil, konum ve genliği korunduğundan doğrusal olmayan anlamda kararlı olduğu görülmektedir. Benzer şekilde, elde edilen tüm solitonların doğrusal olmayan anlamda kararlı oldukları gözlemlenmiştir.



**Şekil 8:** Pozitif kusur ve  $\alpha = 1$  ;  $\beta = -0,1$  ;  $\mu = 1$  ,  $V_0 = 2$  ;  $W_0 = 0,1$  değerleri için elde edilen solitonun  $z$  boyunca ilerletilmesi sırasında üstten görünüşü ve genliğinin değişim grafiği.

Şekil 9'daki  $V_0 = 1$  için elde edilen solitonların doğrusal tayfları incelendiğinde; tayflarındaki saf sanal olmayan özdeğerlerden dolayı, bu solitonların doğrusal anlamda kararsız oldukları görülmektedir. Benzer şekilde, elde edilen tüm solitonların doğrusal anlamda kararsız oldukları gözlemlenmiştir.



**Şekil 9:** Farklı kusurlar ve  $\alpha = 1$  ;  $\beta = -0,1$  ;  $\mu = 1$  ;  $V_0 = 1$  ;  $W_0 = 0,1$  değerleri için elde edilen solitonların doğrusal tayfların özdeğerleri.

## SONUÇ

Bu çalışmada, PT simetrisine sahip çeşitli bozuk kafesler üzerinde temel solitonların sayısal varlığı; odaklanan kübik, odaktan sapan kuintik ortamda farklı potansiyel derinlikleri ve kusurlar için gösterilmiş ve bu soliton çözümlerinin kararlılıkları hem doğrusal hem doğrusal olmayan anlamda incelenmiştir. PT-simetrisine sahip bu kafeslerde pozitif veya negatif bir kusur yarı genişliğini azaltmaktadır. Odaklanan kübik, odaktan sapan kuintik ortamda; elde edilen tüm solitonlar bozukluğun varlığından bağımsız olarak doğrusal olmayan anlamda kararlıdır. Öte yandan, elde edilen tüm solitonlar doğrusal anlamda kararsızdır.

### KAYNAKLAR

- [1] C. T. Zhou, X. T. He, Third- and fifth-order optical nonlinearities in a new stilbazolium derivative, *Journal of the Optical Society of America B*. 19 (2002) 369–375.
- [2] G. Boudebsa, S. Cherukulappuratha, H. Leblonda, J. Trolesb, F. Smektalab, F. Sancheza, Experimental and theoretical study of higher-order nonlinearities in chalcogenide glasses, *Optics Communications*. 219 (2003) 427–433.
- [3] M. J. Ablowitz, Z. H. Musslimani, Spectral renormalization method for computing self-localized solutions to nonlinear systems, *Optic Letters*. 30 (2005) 2140–2142.
- [4] C. M. Bender, S. Boettcher, Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT Symmetry, *Physical Review Letters*. 80 (1998) 5243–5246.
- [5] M. J. Ablowitz, B. Ilan, E. Schonbrun, R. Piestun, Solitons in two-dimensional lattices possessing defects, dislocations, and quasicrystal structures, *Physical Review E*. 74 (2006) 035601(R).