



ELASTİK KONSOL KİRİŞLERİN BÜYÜK DEFORMASYON ANALİZİ

Y. Cengiz TOKLU¹, A. Erdem ÇERÇEVİK² M. Özgür YAYLI³
^{1,2,3} Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Bilecik

ABSTRACT

In the context of this study, structural analysis of an elastic cantilever has been conducted using an iterative method based on Euler-Bernoulli equations. For this purpose, the beam has been considered to be divided into elements of equal length and the rotational angles have been assumed to be linearly changing over these elements in computing the elastic curve. At the beginning, the deformations caused by the loads acting on the structure is determined, and then by application of the loads on the deformed system, the new deflections are recalculated. This procedure is repeated until stabilization of deflections and rotations. The iterative process has been conducted using MS Excel.

ÖZET

Bu çalışma kapsamında elastik konsol bir kirişin statik analizi Euler-Bernoulli eşitlikleri kullanılarak yinelemeli bir yöntemle yapılmıştır. Bu amaçla kiriş eşit uzunlukta parçalara bölünmüş ve ötelenmelerin hesabında, bu parçalar üzerindeki dönmelerin doğrusal değiştiği kabulü yapılmıştır. Başlangıçta kirişe verilen yükün kirişte oluşturduğu şekil değiştirmeler belirlenmiş, şekil değiştirmiş kirişe tekrar aynı yükler etki ettirilerek şekil değiştirmeler doğrusal olmayan şekilde tekrar belirlenmiştir. Bu işlem şekil değiştirme sonuçları yeteri kadar birbirine yaklaştığında bitirilerek kirişin gerçek şekil değiştirmesi bulunmuştur. Yineleme işlemi Ms Excel programlarında yapılmıştır.

GİRİŞ

Pek çok çalışma elastik konsol kirişlerin büyük deformasyonu üzerine yoğunlaşmıştır. “Elastica” problemi olarak tanımlanan bu problemin çözümü için iki temel çözüm yöntemi mevcuttur. İlk yöntem eliptik integrallerin kullanıldığı yöntemdir. [1-9] Ancak bu yöntem sadece basit yükler için uygundur.

İkinci yaklaşım ise sayısal yöntemlerdir. [9-27] Bu yöntemi kullanmak için ise oldukça uzun hesaplamalar ve pahalı paket programlar kullanmak gerekmektedir.

Önerilen yöntemde ise sadece Excel ya da Matlab programı kullanarak basit bir algoritma ile yinelemeli olarak basitçe çözülmektedir. Çubuk eşit boylarda küçük parçalara ayrılmıştır. Bu çubuklar doğrusal yükler ile yüklendiği kabul edilmiştir. Her parça üzerindeki yükler ile denge denklemleri yazılarak parça üzerinde kuvvetler bulunmuştur. Her parça için birbirleri ile bağlantılı olarak denge denklemleri yazılmış, Euler Bernoulli denklemi yardımı ile şekil değiştirmeler bulunmuştur. Şekil değiştirmiş sistem üzerinden aynı yükler tekrar uygulanmış yeni şekil değiştirmeler bulunmuştur. Bu işlem yeter sayıda yapılmış gerçeğe oldukça yakın sonuçlar elde edilmiştir.

ÖNERİLEN YÖNTEM

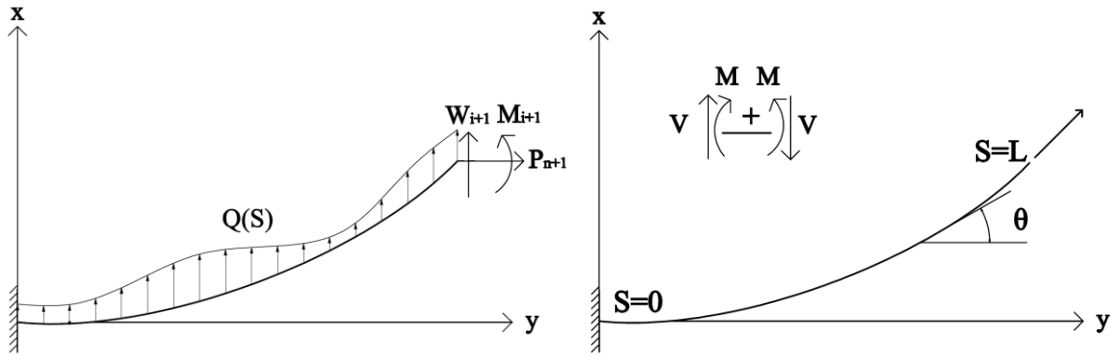
Kabuller

Yapılan çalışma ile ilgili kabuller şunlardır:

- Malzeme doğrusal elastiktir.
- Kesme deformasyonları ihmal edilmiştir.(Euler kesme teorisi)
- Kiriş parçası boyunca kesit alanı sabit tutulmuştur.
- Yükleme düzlemi eğilme düzlemi ile çakışmaktadır.
- Kiriş parçalarında dönme açısı doğrusal değişmektedir.
- Kiriş parçalarında yanal yayılı yük doğrusal değişmektedir.
- Tekil yükler ve momentler düğüm noktalarına etmektedir.

Formülasyon

Konsol bir kiriş Şekil 1'deki gibi yüklenildiği düşünölsün.



Şekil 1. Çubuğa etkileyen yük çeşitleri ve şekil değiştirmiş çubuk.

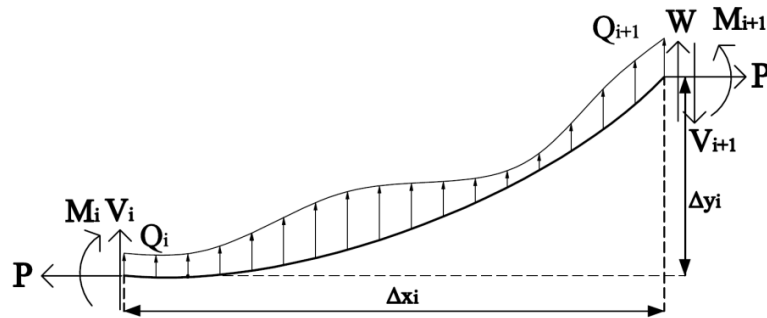
Euler-Bernoullinin diferansiyel denklemi izleyen şekildedir:

$$EI \frac{d\theta}{ds} = M \quad (1)$$

Çubuk h boyunda küçük elemanlara bölünmüştür. i elemanında Bu elemanların herbirinin üzerinde dönme ve yayılı yük doğrusal olarak değişmektedir.

$$\alpha_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{h} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$\beta_i = \frac{Q_{i+1} - Q_i}{h} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$



Şekil 2. i ve $i+1$ noktaları arasında bölünmüş bir parça üzerindeki yükler.

$$\Delta x_i \rightarrow \quad h \cos(\theta_i) \quad \alpha_i = 0 \quad (4)$$

$$\Delta x_i \rightarrow \frac{\sin(\theta_{i+1}) - \sin(\theta_i)}{\alpha_i} \quad \alpha_i \neq 0$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$\Delta y_i \rightarrow h \sin(\theta_i) \quad \alpha_i = 0 \quad (6)$$

$$\Delta y_i \rightarrow \frac{\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})}{\alpha_i} \quad \alpha_i \neq 0$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

Şekil 2'den hareketle sistemin bir parçası üzerindeki kesme kuvvetleri izleyen şekilde yazılabilir:

$$V_i = V_{i+1} - W - \int_{t=0}^h Q(t) dt \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$V_i = V_{i+1} - W - h \left[Q_i + \frac{1}{2}(\beta_i h) \right] \quad \alpha_i = 0 \quad \alpha_i \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

Şekil 2'den i parçasının uçlarındaki moment değerleri ise şu şekilde hesaplanabilir:

$$M_{i+1} = M_i + P\Delta y_i + V_i\Delta x_i + \int_{t=0}^h Q(t) [x_{i+1} - x(t)] dt \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

$$M_i = M_{i+1} - P\Delta y_i - V_i\Delta x_i - \left[\frac{h\Delta x_i}{2} \left(Q_i + \frac{\beta_i h}{3} \right) \right] \quad \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

$$M_i = M_{i+1} - P\Delta y_i - V_i\Delta x_i - \left[\frac{Q_i\Delta x_i h - \frac{Q_i}{\alpha_i^2}(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})) + Q_i \frac{\sin(\theta_i)}{\alpha_i} h + \frac{\beta_i h^2 \Delta x_i}{2} - \frac{\beta_i}{\alpha_i^2}(\Delta x_i - h \cos(\theta_{i+1})) + \beta_i h^2 \frac{\sin(\theta_i)}{2\alpha_i} \right]$$

$$\alpha_i \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

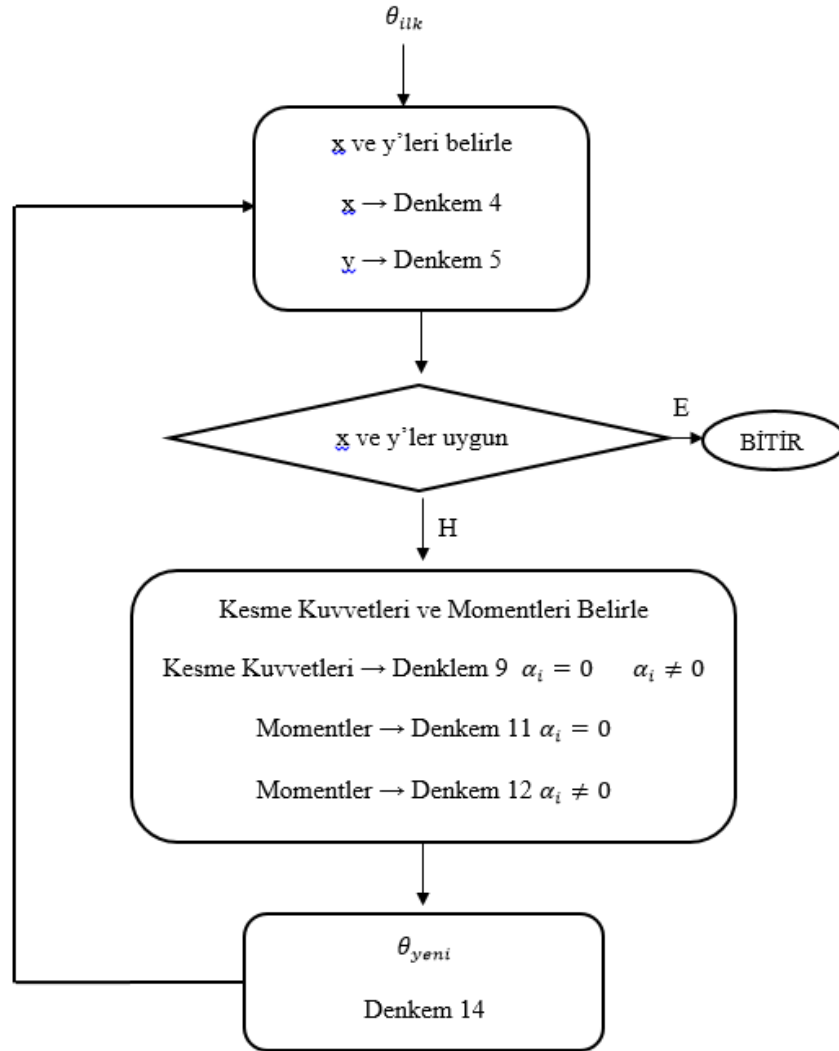
Euler-Bernoulli denklemi ve basitleştirilmiş şekli denklem 13 ve 14'de verilmiştir.

$$EI\Delta\theta_i = \int_i M(t) dt \quad (13)$$

$$\Delta\theta_i = \frac{M_i + M_{i+1}}{2EI} h \quad (14)$$

Farklı birçok yükler ile yüklü konsol kirişin yer değiştirme hesabı yapılırken öncelikli olarak bölünmüş her bir parça için ilk dönme açılarına (θ) göre yer değiştirmeler (x ve y 'ler) hesaplanır. (İlk dönme açıları bu çalışma kapsamında 0 olarak alınmıştır.) Yer değiştirmelerin uygun olup olmadığı kontrol edilir. Eğer yer değiştirmeler uygunsa, doğrusal olmayan yer değiştirmeler bulunmuş, yükler altında şekil değiştirmiş kirişin gerçek şekli belirlenmiş olur. Ancak şekil değiştirme uygun değilse konsol kirişte yüklerin kiriş üzerinde meydana getirdiği kesme kuvvetleri ve momentler bulunur. Denklem 14 yardımı ile de momentlerden yeni dönme açıları (θ) belirlenir. Yeni dönme açıları (θ) ve aynı yükler, önceki yineleme

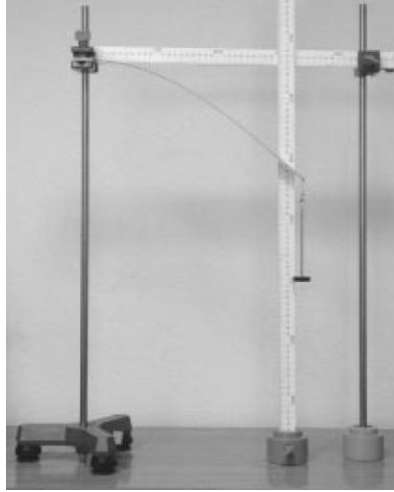
sonucunda şekil değişimi belirlenmiş kirişe tekrar etki ettirilir ve yeni yer değiştirmeler (x ve y 'ler) belirlenir. (Bu şekilde ilk yineleme tamamlanmış olur.) Yer değiştirmelerin uygun olup olmadığı tekrar kontrol edilir. Şekil değiştirmeler uygun değilse aynı yükler şekil değiştirmiş kirişe tekrar etki ettirilir ve yeni kesme kuvvetleri, momentler ve dönme açıları (θ) bulunur. Yeni bulunan dönme açılarına (θ) göre belirlenmiş yeni yer değiştirmelerin uygunluğu kontrol edilir. Bu uygunluk kriteri, bulunan yer değiştirmelerin önceki yinelemede bulunan yer değiştirmeler ile olabildiğince yakın olmasıdır. Bu yakınlık sağlandığında yineleme bitirilir ve çubuğun gerçek şekli bulunmuş olur. Statik denklemlerle çözümün akış şeması Şekil 3'te görülmektedir.



Şekil 3. Yerdeğiştirmeler hesap akış şeması

Önerilen Yöntemin Yapılan Deneysel Bir Çalışma ile Karşılaştırması

Belendez ve arkadaşları bir ucu ankastre elastik çubuk ucuna çeşitli yükler yükleyerek, çubuktaki şekil değiştirmeleri deneysel olarak belirlemiş, diferansiyel denklemlerden çıkan sonuçlar ile karşılaştırmışlardır. Hazırladıkları deney düzeneği Şekil 4 de verilmiştir.



Şekil 4. Hazırlanan deney düzeneği (Belendez 2003).

Yapılan çalışmada Young Modülü 194,3 GPa, çubuk ağırlığı 0,3032 N çubuk boyu 40 cm, $b=25$ mm ve $d=4$ mm'dir. Çubuk ağırlığı yayılı yük olarak düşünülmüş, $q=0,3032/0,4=0,758$ N/m olarak hesaplanmış, önerilen yöntem eşitliklerine göre – işaretle hesaplanmış, Çizelge 1'de karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Çalışmada bulunan sonuçlar gerçek sonuçlara oldukça yakın değer olarak görülmektedir.

Çizelge 1. Deneysel ve sayısal sonuçların karşılaştırılması.

Serbest Uç Düşey Yer Değiştirmesi (m)					
W(N)	Bu Çalışma Sonucu	Belendez 2003 Deneysel Sonuçlar	Fark (%)	Belendez 2003 Sayısal Sonuçlar	Fark (%)
0.000	0.0886	0.089	0.4	0.0898	1.3
-0.098	0.1495	0.149	0	0.1516	1.4
-0.196	0.1933	0.195	0.9	0.1960	1.4
-0.294	0.2240	0.227	1.4	0.2270	1.4

SAYISAL SONUÇLAR

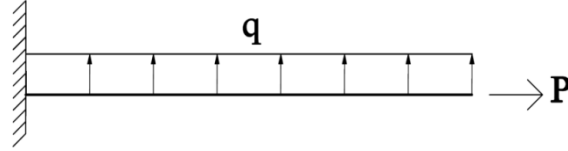
Yapılan çalışma sonuçları boyutsuz olarak sunulmuştur. Boyutsuzluk için izleyen denklemler kullanılmıştır:

$$x = \frac{X L}{L}, \quad y = \frac{Y L}{L}, \quad \text{yer değiştirmiş serbest uç koordinatları,}$$

$$P = \frac{P L^2}{EI}, \quad \text{serbest uçtaki yatay yük,}$$

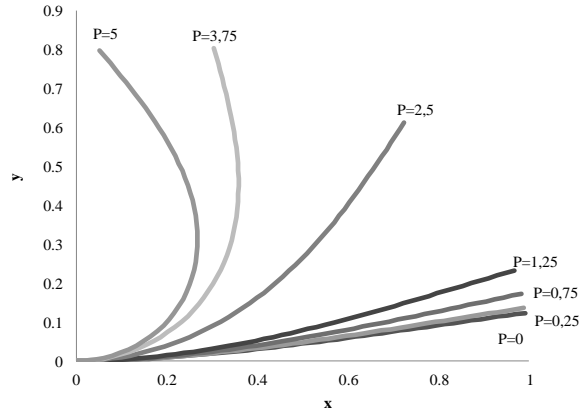
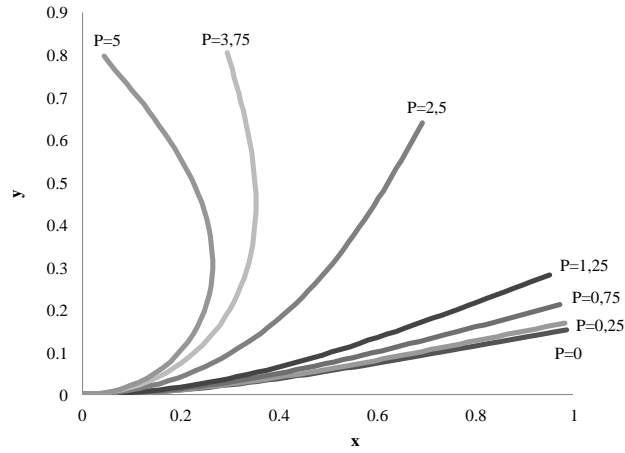
$$w = \frac{W L^2}{EI}, \quad \text{serbest uçtaki düşey yük,}$$

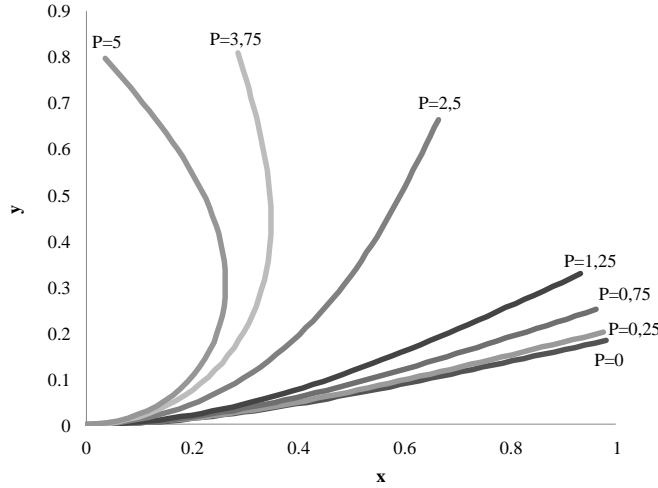
$$q = \frac{Q L^3}{EI}, \quad \text{düzgün yayılı düşey yük.}$$



Şekil 5. Yayılı ve yatay yüklerle yüklenmiş kiriş.

Şekil 4'te görülen çeşitli yüklerin kiriş üzerinde oluşturduğu çeşitli şekil değiştirme analizleri izleyen kısımda sunulmuştur. Burada çizilen grafikler kirişi 50 parçaya bölerek ve 20 iterasyon ile bulunmuş sonuçlardır (Şekil 6-8).

Şekil 6. $q=1$ için farklı yatay yükler altında gerçek kiriş yer değiştirmeleri.Şekil 7. $q=1,25$ için farklı yatay yükler altında gerçek kiriş yer değiştirmeleri.



Şekil 8. $q=1,5$ için farklı yatay yükler altında gerçek giriş yer değiştirmeleri.

SONUÇLAR

Literatürde araştırmacılar Elastika probleminin çözümü için pek çok yöntem önermişlerdir. Ancak önerilen yöntemler problemi yeteri kadar pratik ve hızla çözememektedir. Ayrıca yapılmış çalışmalarda farklı yük türlerinin aynı anda çubuk üzerine yüklendiği durumlar da mevcut değildir. Önerilen yinelemeli yöntemde ise Excel gibi oldukça basit bir yazılım kullanmak yeterli olmaktadır. Çeşitli yükler ile yüklenmiş çubuğun doğrusal olmayan şekil değiştirmelerini gerçeğe çok yakın bir şekilde belirlenebilmektedir. Özellikle farklı yük grupları yüklü çubuklar için yineleme sayısı arttıkça daha doğru sonuçlar elde edilse de doğru sonuca ulaşmak için fazla yinelemeye gerek duyulmamaktadır. Gelecekte yapılması planlanan çalışmalar ise elastik bir zemin üzerindeki çubuk için şekil değiştirmelerin belirlenmesi ve değişken kesitli çubukların şekil değiştirmelerinin hesaplanmasıdır.

KAYNAKLAR

- [1] H.J. Barten, On the deflection of a cantilever beam, *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3:275 (1945).
- [2] K.E. Bisshop, D.C. Drucker, Large deflections of cantilever beams, *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3:272–275 (1945).
- [3] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, NY. (1961).
- [4] K. Mattiasson, Numerical results from large deflection beam and frame problems analysis by means of elliptic integrals *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 16:145 (1981).
- [5] S. Chucheepsakul, S. Buncharoen, C.M. Wang, Large deflection of beams under moment gradient, *Journal of the Engineering Mechanics*, 120:1848 (1994).
- [6] F. Bona, S. Zelenika, A generalized elastica-type approach to the analysis of large displacements of spring-strips, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C* 21:509–517 (1997).
- [7] C.M. Wang, K.Y. Lam, X.Q. He, Chucheepsakul, S., Large deformation of an end supported beam subjected to a point load, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32:63–72 (1997).
- [8] D.W. Coffin, F. Bloom, Elastica solution for the hygrothermal buckling of a beam, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34:935 (1999).

- [9] A. Ohtsuki, F. Ellyin, Analytical approach to large deformation problems of frame structures (in case of a square frame with rigid joints), *The Japan Society of Mechanical Engineers International Journal*, J. 44:89–93 (2001).
- [10] J.G. Freeman, Mathematical theory of deflection of beam, *Philosophical Magazine*, 37: 275 (1946).
- [11] H.D. Conway, Large deflection of simply supported beams. *Philosophical Magazine*, 38:905 (1947).
- [12] J.T. Holden, On the finite deflections of thin beams, *International Journal of Solids and Structures*, 8:1051–1055 (1972).
- [13] W. F. Schmidt, Nonlinear bending of beams using the finite element method, *International Journal of Computers & Structures*, 8:153 (1977).
- [14] C.Y. Wang, Large deformations of a heavy cantilever, *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 39:261–273 (1981).
- [15] L.T. Watson, C.Y. Wang, Hanging an elastic ring, *International Journal of Mechanical Sciences*, 23:161–167 (1981).
- [16] Y. C. Toklu, On the stability and large deflection analysis of elastic bars, *Stability in the Mechanics of Continua*, 185-200. (1981).
- [17] B.W. Golley, The finite element solution of a class of elastica problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46:159–168 (1984).
- [18] B.W. Kooi, A unilateral contact problem with the heavy elastica solve by use of finite element, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 21:95–103 (1985).
- [19] M. Saje, S. Srpčić, Large deformations of in-plane beams, *International Journal of Solids and Structures*, 21:1181 (1985).
- [20] S.T. Mau, Elastica solution of braced struts, *Journal of Engineering Mechanics*, 116:688 (1990).
- [21] C.M. Wang, S. Kitipornchai, Shooting-optimization technique for large deflection analysis of structural members, *Engineering Structures*, 14:231–240 (1992).
- [22] B.W. Golley. The solution of open and closed elasticas using intrinsic coordinate finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 146:127–134 (1997).
- [23] K. Lee, Post-buckling of uniform cantilever column under a combined load, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 36:813–816 (2001).
- [24] A. Magnusson, M. Ristinmaa, C. Ljung, Behavior of the extensible elastica column, *International Journal of Solids and Structures*, 38:8441–8457 (2001).
- [25] R. Kumar, L. S. Ramachandra ve D. Roy, Techniques based on genetic algorithms for large deflection analysis of beams, *Sadhana Academy Proceedings in Engineering Sciences*, 29 6:589-604 (2004).
- [26] M. Sitar, F. Kosel, M. Brojan, A simple method for determining large deflection states of arbitrarily curved planar elastic. *Archive of Applied Mechanics*, 84:263–275 (2014).
- [27] D. K. Nguyen, Large displacement behaviour of tapered cantilever Euler–Bernoulli beams made of functionally graded material. *Applied Mathematics and Computation*. Volume 237, Pages 340–355 (2014).
- [28] T. Beleández, C. Neipp, A. Beleández, Numerical and experimental analysis of a cantilever beam: a laboratory project to introduce geometric nonlinearity in mechanics of materials, *International Journal of Engineering Education*, 19:6, 885-892 (2003).