

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

**ISI TRANSFERİ PROBLEMİNİN
GRAFİK ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Resul DİLSİZ**

**Anabilim Dalı: Mühendislikte İleri Teknolojiler
Programı: Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik**

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Y. Onur DEVRES

ARALIK 2007

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

**ISI TRANSFERİ PROBLEMİNİN
GRAFİK ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Resul DİLSİZ**

**Anabilim Dalı: Mühendislikte İleri Teknolojiler
Programı: Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik**

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Y. Onur DEVRES

ARALIK 2007

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı yapabilmem için bana imkân sağlayan İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsü Mühendislikte İleri Teknolojiler Ana Bilim Dalı Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Bölümü Programına ve bu programın yöneticilerine teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca bu çalışmayı hazırlamamda bana yardımcı olan, desteğini ve bilgisini esirgemeyen tez danışmanım, İstanbul Teknik Üniversitesi Kimya-Metalürji Fakültesi, Gıda Mühendisliği Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Y. Onur DEVRES'e şükranlarımı sunarım.

Beni yetiştiren, bugünlere getiren, her zaman arkamda olan aileme ve manevi desteği olmadan bu çalışmayı tamamlayamayacak olduğum, eşim Sabiha DİLSİZ'e minnetlerimi sunarım.

ARALIK 2007

Resul DİLSİZ

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	v
TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	viii
SEMBOL LİSTESİ	xi
ÖZET	xiii
SUMMARY	xiv
1 GİRİŞ	1
1.1 Çalışmanın Amacı	1
1.2 Yapılmakta Olan Hatalar	2
1.2.1 Görsel İnterpolasyonun Zorluğu	2
1.2.2 Düzenlenmiş Lineer-Log Grafiklerinden İnterpolasyon İle Veri Okumak	2
1.2.3 Grafiklerin Çizgilerinin Yoğunlaştığı Bölgeler	3
1.2.4 Grafik Verilerindeki Hata	3
1.2.5 Serinin Sadece İlk Terimi Alınarak Yapılan Hatalar	4
1.2.6 Boyutsuz Zamanın Önkoşulu	4
1.3 Alternatif Yöntemler	5
1.4 Literatürdeki Benzer Çalışmalar	5
2 SAYISAL ANALİZ PROGRAMINDA GELİŞTİRMELER	8
2.1 Zamana Bağlı Isı Aktarımı Problemi	8
2.2 Isı Aktarımı Problemlerinin Çözümleri	9
2.3 Değişkenlerine Ayırma Yöntemi İle Çözümler	9
2.4 Soru Çözümleri İçin Değer Hesaplayan Fonksiyonlar	10
2.4.1 Levha İçin Fonksiyonlar	10
2.4.1.1 Tek Boyutlu Levha (ctSlab1D)	10
2.4.1.2 İki Boyutlu Levha (ctSlab2D)	12
2.4.1.3 Üç Boyutlu Levha (ctSlab2D)	12
2.4.2 Yarı Sonsuz Levha İçin Fonksiyonlar (ctSemiSlab1D)	13
2.4.3 Silindir İçin Fonksiyonlar (ctCylinder)	14
2.4.4 Küre İçin Fonksiyonlar (ctSphere)	15
2.5 Grafik Hesaplayan Kodlar	15
2.5.1 Heisler 1. Grafikleri	15
2.5.1.1 Levha İçin Heisler Orta Nokta Grafikleri	16
2.5.1.2 Silindir İçin Heisler Orta Nokta Grafikleri	16
2.5.1.3 Küre İçin Heisler Orta Nokta Grafikleri	17
2.5.2 Heisler 2. Grafikleri	18
2.5.2.1 Levha İçin Heisler Düzeltme Grafikleri	18

2.5.2.2	Silindir İçin Heisler Düzeltme Grafikleri	18
2.5.2.3	Küre İçin Heisler Düzeltme Grafikleri	19
3	EĞRİ YAKLAŞTIRMA ÇALIŞMALARI	20
3.1	Levha İçin Eğri Yaklaştırma Sonuçları	24
3.2	Silindir İçin Eğri Yaklaştırma Sonuçları	26
3.3	Küre İçin Eğri Yaklaştırma Sonuçları	27
3.4	Alternatif Yöntemle Sonuçların Karşılaştırılması	29
4	HESAPLAMALARIN SUNULMASI İÇİN WEB ARAYÜZÜ	32
4.1	Sıcaklık Dağılımı Geçmiş Grafiği	33
4.2	Levha İçin Web Arayüzü Çözümleri	34
4.2.1	Tek Boyutlu Levha İçin Web Arayüzü Çözümleri	34
4.2.2	İki Boyutlu Levha İçin Web Arayüzü Çözümleri	36
4.2.3	Üç Boyutlu Levha İçin Web Arayüzü Çözümleri	38
4.3	Yarı Sonsuz Levha İçin Web Arayüzü Çözümleri	40
4.4	Silindir İçin Web Arayüzü Çözümleri	41
4.5	Küre İçin Web Arayüzü Çözümleri	43
4.6	Heisler Grafiklerinden Veri Okuma	44
4.6.1	Heisler Merkez Sıcaklığı Levha Grafiği	45
4.6.2	Heisler Merkez Sıcaklığı Silindir Grafiği	46
4.6.3	Heisler Merkez Sıcaklığı Küre Grafiği	46
4.6.4	Okunan Değerlerin Karşılaştırılması	47
5	SONUÇLAR VE TARTIŞMA	49
	KAYNAKLAR	51
	EKLER	53
A	Literatürdeki Ders Kitaplarındaki Grafikler	53
B	Literatürle Karşılaştırmalı Örnek Soru Çözümleri	69
C	Isı Aktarımı Probleminin Tanımı	81
D	Değişkenlere Ayırma Yöntemi İle Çözümler	86
E	Tekrar Çizilen Merkez Sıcaklık Grafikleri	103
	ÖZGEÇMİŞ	107

KISALTMALAR

PHP	: Hypertext Preprocessor
MATLAB	: Matrix Laboratory (Mathworks, Inc.)
HTTPD	: Hyper Text Transfer Protocol Daemon
CD	: Compact Disk
SPSS	: Statistical Package for the Social Sciences

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1: ctSlab1D fonksiyonu için parametrelerin açıklaması.....	11
Tablo 2.2: ctSlab2D fonksiyonu için parametrelerin açıklaması.....	12
Tablo 2.3: ctSlab3D fonksiyonu için parametrelerin açıklaması.....	13
Tablo 2.4: ctSemiSlab1D fonksiyonu için parametrelerin açıklaması.....	13
Tablo 2.5: ctCylinder fonksiyonu için parametrelerin açıklaması.....	14
Tablo 2.6: ctSphere fonksiyonu için parametrelerin açıklaması.....	15
Tablo 3.1: İkinci regresyonda iterasyon geçmişi ^{(b)(c)(d)}	23
Tablo 3.2: İkinci regresyon sonuçları, parametrelerin tahmini.....	23
Tablo 3.3: İkinci regresyon sonuçları, R^2 ^(a)	23
Tablo 3.4: Levha için regresyon sonuçları, parametrelerin tahmini	25
Tablo 3.5: Fourier sayısı aralıklarında eğri yaklaştırmasının yapacağı en yüksek hatalar (levha).....	25
Tablo 3.6: Silindir için regresyon sonuçları, parametrelerin tahmini	26
Tablo 3.7: Fourier sayısı aralıklarında eğri yaklaştırmasının yapacağı en yüksek hatalar (silindir)	26
Tablo 3.8: Küre için regresyon sonuçları, parametrelerin tahmini	28
Tablo 3.9: Fourier sayısı aralıklarında eğri yaklaştırmasının yapacağı en yüksek hatalar (küre).....	28
Tablo 3.10: Yaklaştırılan eğri formülü ve geometrilere göre katsayılar	29
Tablo 3.11: A_B ve C_B katsayıları.....	30
Tablo 3.12: Seri açılımın birinci terimini hesaplayan eşitliklerle, yaklaştırılan eğri sonuçlarının karşılaştırılması	31
Tablo 4.1: Örnek soru 6 için, kaynak ile web arayüzü sonuçlarının karşılaştırılması	36
Tablo 4.2: Web arayüzünden okunan değerlerin hesaplamalarla karşılaştırılması..	48
Tablo 5.1: Örnek Soru çözümlerinde yaklaştırılan eğrinin doğruluğu	50
Tablo B.1: Örnek soru 1 için MATLAB programı çıktıları	70
Tablo B.2: Örnek soru 2 için MATLAB programı çıktıları	71
Tablo B.3: Örnek soru 3 için MATLAB programı çıktıları	72
Tablo B.4: Örnek soru 4 için MATLAB programı çıktıları	73
Tablo B.5: Örnek soru 5 için MATLAB programı çıktıları	74
Tablo B.6: Örnek soru 6 için MATLAB programı çıktıları	75
Tablo B.7: Örnek soru 6 için, kaynak ile sonuçların karşılaştırılması	76
Tablo B.8: Örnek soru 7 için MATLAB programı çıktıları	77
Tablo B.9: Örnek soru 7 için, kaynak ile MATLAB sonuçların karşılaştırılması...	78
Tablo B.10: Örnek soru 8 için MATLAB programı çıktıları	79
Tablo B.11: Örnek soru 8 için, kaynak ile sonuçların karşılaştırılması	80
Tablo D.1: Levha için, sınır koşulları ve koşulların özfonksiyonları, norm fonksiyonları, özdeğerleri veren eşitlikler	89

Tablo D.2: Yarı sonsuz levha için, sınır koşulları ve koşulların özfonksiyonları, norm fonksiyonları	92
Tablo D.3: Yarı sonsuz levha için, sabit başlangıç sıcaklığı dağılımının olduğu ve dış ortam sıcaklığının 0 derece olduğu durumlar için genel çözümler	92
Tablo D.4: Silindir için, özfonksiyonlar, normalizasyon integralleri ve özdeğerlerin pozitif kökleri bulunduğu eşitlikler	99
Tablo D.5: Küre için homojen sınır koşullarında özfonksiyonlar, normalizasyon integralleri ve özdeğerlerin köklerinin bulunduğu eşitlikler	102

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1: Levha için merkez sıcaklıkların okunduğu Heisler grafiği.....	2
Şekil 1.2: Heisler'in silindir için merkez sıcaklığını veren grafiğinin sol-üst köşesi	3
Şekil 1.3: Heisler'in levha için vermiş olduğu düzeltme grafiğinin sağ-üst köşesi.	3
Şekil 1.4: Levha için verilen MATLAB sonuçları ile çizilmiş merkez sıcaklıkları grafiklerinin üzerinde, seri açılımın ilk teriminin gösterilmesi.....	4
Şekil 1.5: Levha için Heisler grafiği üzerinde Campo sonuçlarının gösterilmesi ..	6
Şekil 1.6: Heisler merkez sıcaklığı grafiği üzerinde $1/Bi=0.8$ için Campo eğrisinin karşılaştırılması.....	7
Şekil 2.1: Heisler1Slab fonksiyonu ile üretilen, levha için Heisler'in merkez sıcaklığı grafiği.....	16
Şekil 2.2: Heisler1Cylinder fonksiyonu ile üretilen, silindir için Heisler'in merkez sıcaklığı grafiği	17
Şekil 2.3: Heisler1Sphere fonksiyonu ile üretilen, silindir için Heisler'in merkez sıcaklığı grafiği.....	17
Şekil 2.4: MATLAB fonksiyonları ile üretilen levha için Heisler düzeltme grafiği	18
Şekil 2.5: MATLAB fonksiyonları ile üretilen silindir için Heisler düzeltme grafiği.....	19
Şekil 2.6: MATLAB fonksiyonları ile üretilen küre için Heisler düzeltme grafiği.	19
Şekil 3.1: Yapılan eğri yaklaştırmasında izlenen yol.....	21
Şekil 3.2: $1/Bi$ ile C_1 ve C_2 katsayılarının ilişkisi ve eğri yaklaştırma sonucu	22
Şekil 3.3: İkinci regresyon ile hataların büyük ölçüde küçültülmesi	24
Şekil 3.4: Levha için yaklaştırılan eğrinin yüzde hatası.....	25
Şekil 3.5: Silindir için yaklaştırılmış eğrinin yüzde hatası.....	27
Şekil 3.6: Küre için yaklaştırılmış eğrinin yüzde hatası.....	28
Şekil 4.1: Geliştirilen web bileşenlerinin listelendiği ana sayfa.....	33
Şekil 4.2: Zaman ile sıcaklık dağılımının değişimini gösteren arayüzün kullanımı	34
Şekil 4.3: Web arayüzünden tek boyutlu levha hesabı, veri giriş ekranı	35
Şekil 4.4: Web arayüzünde tek boyutlu levha hesabı sonuçları	35
Şekil 4.5: Web arayüzünden iki boyutlu levha hesabı, veri giriş ekranı.....	37
Şekil 4.6: İki boyutlu levha hesabı arayüzünde, sınır koşullarının değiştirilmesi	37
Şekil 4.7: Web arayüzünde iki boyutlu levha hesabı sonuçları	38
Şekil 4.8: Web arayüzünden üç boyutlu levha hesabı, veri giriş ekranı	39
Şekil 4.9: Web arayüzünde üç boyutlu levha hesabı sonuçları	39
Şekil 4.10: Web arayüzünden yarı-sonsuz levha hesabı, veri giriş ekranı.....	40
Şekil 4.11: Web arayüzünden yarı-sonsuz levha hesabı sonuçları	41
Şekil 4.12: Web arayüzünden silindir hesabı, veri giriş ekranı	42
Şekil 4.13: Web arayüzünden silindir hesabı sonuçları	42

Şekil 4.14: Web arayüzünden küre hesabı, veri giriş ekranı	43
Şekil 4.15: Web arayüzünden küre hesabı sonuçları	44
Şekil 4.16: Web arayüzünden levha için Heisler grafiğinin hassasiyetle okunması	45
Şekil 4.17: Web arayüzünden silindir için Heisler grafiğinin hassasiyetle okunması	46
Şekil 4.18: Web arayüzünden küre için Heisler grafiğinin hassasiyetle okunması	47
Şekil 4.19: Web arayüzünden okunan değerlerin hesaplamalarla karşılaştırılması	48
Şekil A.1: J. H. Lienhard ve J. H. Lienhard, Gröber grafikleri	53
Şekil A.2: A. Bejan (sf. 160), Heisler merkez sıcaklık grafiği (levha)	54
Şekil A.3: A. Bejan (sf. 161), Heisler düzeltme grafiği (levha)	54
Şekil A.4: A. Bejan (sf. 162), Gröber grafikleri (levha)	54
Şekil A.5: A. Bejan (sf. 165), Heisler merkez sıcaklık grafiği (silindir)	55
Şekil A.6: A. Bejan (sf. 166), Heisler düzeltme grafiği (silindir).....	55
Şekil A.7: A. Bejan (sf. 166), Gröber grafiği (silindir).....	55
Şekil A.8: A. Bejan (sf. 168), Heisler merkez sıcaklık grafiği (küre).....	56
Şekil A.9: A. Bejan (sf. 169), Heisler düzeltme grafiği (küre).....	56
Şekil A.10: A. Bejan (sf. 169), Gröber grafiği (küre).....	56
Şekil A.11: J. P. Holman (sf. 83), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (levha).....	57
Şekil A.12: J. P. Holman (sf. 84), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (silindir)	57
Şekil A.13: J. P. Holman (sf. 85), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (küre)	57
Şekil A.14: J. P. Holman (sf. 86), Heisler düzeltme grafiği (levha)	58
Şekil A.15: J. P. Holman (sf. 87), Heisler düzeltme grafiği (silindir)	58
Şekil A.16: J. P. Holman (sf. 88), Heisler düzeltme grafiği (küre)	58
Şekil A.17: J. P. Holman (sf. 90), Gröber grafiği (levha)	58
Şekil A.18: J. P. Holman (sf. 90), Gröber grafiği (silindir).....	59
Şekil A.19: J. P. Holman (sf. 91), Gröber grafiği (küre).....	59
Şekil A.20: L. M. Jacob (sf. 285), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (levha)	59
Şekil A.21: L. M. Jacob (sf. 286), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (silindir).....	59
Şekil A.22: L. M. Jacob (sf. 287), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (küre).....	60
Şekil A.23: L. M. Jacob (sf. 288), Heisler düzeltme grafiği (levha).....	60
Şekil A.24: L. M. Jacob (sf. 289), Heisler düzeltme grafiği (silindir).....	60
Şekil A.25: L. M. Jacob (sf. 290), Heisler düzeltme grafiği (küre)	61
Şekil A.26: S. Kakaç (sf. 274), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (levha).....	61
Şekil A.27: S. Kakaç (sf. 275), Heisler düzeltme grafiği (levha)	61
Şekil A.28: S. Kakaç (sf. 275), Gröber grafiği (levha)	62
Şekil A.29: S. Kakaç (sf. 276), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (silindir)	62
Şekil A.30: S. Kakaç (sf. 277), Heisler düzeltme grafiği (silindir)	62
Şekil A.31: S. Kakaç (sf. 277), Gröber grafiği (silindir).....	62
Şekil A.32: S. Kakaç (sf. 278), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (küre)	63
Şekil A.33: S. Kakaç (sf. 279), Heisler düzeltme grafiği (küre).....	63
Şekil A.34: S. Kakaç (sf. 279), Gröber grafiği (küre).....	63
Şekil A.35: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 80), Heisler merkez grafiği (levha) .64	
Şekil A.36: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 81), Heisler düzeltme grafiği (levha)..	64
Şekil A.37: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 81), Gröber grafiği (levha).....	65
Şekil A.38: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 82), Heisler merkez grafiği (silindir)..	65

Şekil A.39: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 83), Heisler düzeltme grafiği (silindir)	66
Şekil A.40: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 82), Gröber grafiği (silindir)	66
Şekil A.41: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 83), Heisler'in merkez grafiği (küre)	67
Şekil A.42: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 84), Heisler düzeltme grafiği (küre)	67
Şekil A.43: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 84), Gröber grafiği (küre)	68
Şekil D.1: Levha içinde, ısı iletimi	86
Şekil D.2: Yarı sonsuz levha için gösterim	90
Şekil D.3: İki boyutlu ısı aktarımının değişik sınır koşulları ile gösterimi	93
Şekil D.4: Silindirik koordinatlarda, sıcaklık dağılımının r ve t 'nin fonksiyonu olduğu, üçüncü tip sınır koşuluna sahip problemin gösterilmesi	98
Şekil D.5: Küresel koordinatlarda, sıcaklık dağılımının r ve t 'nin fonksiyonu olduğu, üçüncü tip sınır koşuluna sahip problemin gösterilmesi	101
Şekil E.1: Tekrar çizilmiş merkez sıcaklığı grafiği (levha)	104
Şekil E.2: Tekrar çizilmiş merkez sıcaklığı grafiği (silindir)	105
Şekil E.3: Tekrar çizilmiş merkez sıcaklığı grafiği (küre)	106

SEMBOL LİSTESİ

q	: Isı iletimi miktarı $[J/s, W]$
\bar{q}	: Birim alanda gerçekleşen ısı iletimi miktarı $[J/m^2s, W/m^2]$
k	: Isıl iletim katsayısı $[W/mK]$
h	: Isıl taşınım katsayısı $[W/m^2K]$
H	: Isıl taşınım/iletim oranı $[1/m]$
A	: Alan $[m^2]$
T	: Sıcaklık $[K]$
T_w	: Duvar sıcaklığı $[K]$
T_∞	: Dış ortam sıcaklığı $[K]$
T_s	: Sınırın tutulduğu sabit sıcaklık $[K]$
x	: x eksenine göre verilen bir koordinatı temsil eder. $[m]$
r	: Silindirik veya küresel koordinatlarda, merkezden uzaklık $[m]$
α	: Isıl yayılım $[m^2/s]$
ρ	: Malzemenin yoğunluğu $[kg/m^3]$
C_p	: Malzemenin ısı sığası $[J/kgK]$
t	: Zaman $[s]$
S_i	: i ile numaralandırılmış sınır yüzeyi.
n_i	: i ile numaralandırılmış sınır yüzeyindeki normal vektörü.
h_i	: i ile numaralandırılmış sınır yüzeyindeki ısı taşınım katsayısı.
k_i	: i ile numaralandırılmış sınır yüzeyindeki ısı iletimi katsayısı.
X	: Boyutsuz uzunluk.
θ	: Boyutsuz sıcaklık, küresel ve silindirik koordinatlarda açı.
θ_i	: İlk durumdaki boyutsuz sıcaklık.
Bi	: Biot sayısı.
τ	: Fourier sayısı, boyutsuz zaman.
β	: Değişkenlere ayırım sabiti, x düzlemi için.
γ	: Değişkenlere ayırım sabiti, y düzlemi için.
η	: Değişkenlere ayırım sabiti, z düzlemi için.
L	: Tek boyutlu levhada uzunluk $[m]$
a	: İki veya üç boyutlu levhada x yönündeki uzunluk $[m]$
b	: İki veya üç boyutlu levhada y yönündeki uzunluk $[m]$
c	: Üç boyutlu levhada z yönündeki uzunluk $[m]$
$\Gamma(t)$: Değişkenlere ayırmda, zaman fonksiyonu
$X(x)$: Değişkenlere ayırmda, x yönündeki mekan fonksiyonu
$Y(y)$: Değişkenlere ayırmda, y yönündeki mekan fonksiyonu
$Z(z)$: Değişkenlere ayırmda, z yönündeki mekan fonksiyonu

- c_m : Tek boyutlu ısı aktarımı probleminde integral sabiti
 c_{mn} : İki boyutlu ısı aktarımı probleminde integral sabiti
 c_{mnp} : Üç boyutlu ısı aktarımı probleminde integral sabiti
 R^2 : Regresyonun korelasyon katsayısı
 A_B, C_B : Seri açılımın birinci terimi için yapılan yaklaşımda katsayılar

ZAMANA BAĞLI ISI AKTARIMI PROBLEMİNİN GRAFİK ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Zamana bağlı çok boyutlu ısı aktarımı probleminin geniş uygulama alanları bulunmakta olup, kaynaklarda söz konusu problemin analitik ve sayısal çözüm yöntemlerine erişilebilmektedir. Bununla birlikte, çözüm yöntemlerinin uygulanması için türevli denklemler ve sayısal yöntemler ile ilgili temel bilgilerin çok iyi bilinmesi gerekmektedir. Bu konulara lisans seviyesinde yeterince yoğunlaşamadığından dolayı, genelde ara çözüm olarak basit eşitliklerin kullanılması ya da grafik okuma (Heisler grafikleri) ile zamana bağlı ısı aktarımı problemlerinin çözümü yapılmaktadır. Bu çalışmada zamana bağlı ısı aktarımı probleminin çözümü, değişkenlerine ayırma yöntemi ile farklı geometrilere ve boyutlarda irdelenmiştir. Söz konusu yöntem, dört temel geometri (levha, yarı sonsuz levha, silindir, küre) için kullanılmış, üç tip sınır koşulu için yüksek hassasiyetle sonuçlar üreten fonksiyonlar sayısal analiz programında kodlanmıştır.

Literatürde takip edilen ısı aktarımı dersi kitaplarında önerilen “grafik çözüm” (Heisler ve Gröber grafikleri) tartışılarak, hataya açık noktaların altı çizilmiştir. Literatürde sunulan çözüm yöntemlerine alternatif olabilecek yöntemler veya uygulamaların geliştirilmesi hedeflenmiştir.

Bu amaçla, sayısal analiz programı (MATLAB) içerisinde tanımlanan, fonksiyonlar kullanılarak 1947 yılında Heisler tarafından seri açılımının sadece ilk terimi alınarak hesaplanmış olan Heisler grafiklerini daha doğru bir şekilde, yüksek hassasiyetle tekrar oluşturacak programlar geliştirilmiştir.

Yapılan çalışmaya ek olarak, geliştirilen fonksiyonlarla hesaplanan sonuçların, literatürde yaygın kullanılan ders kitaplarında bulunan örnek soru çözümlerinin sonuçları ile bir karşılaştırılması verilmiştir. Bu karşılaştırmalarda, grafik okuma yöntemi ile yapılan çözümlerde %20' lere varan hatalar yapıldığı görülmüştür.

Literatürde, analitik hesaplamaları daha kolay bir şekilde yapmayı hedefleyen çalışmalar taranmış ve daha doğru sonuçlar veren bir eğri yaklaştırılması üzerinde çalışılmıştır. $R^2 > 0.9998$ olacak bir hassasiyetle eğri yaklaştırılması yapılmış, her bir geometri için katsayılar hesaplanmıştır.

Sayısal analiz programında geliştirilen bu fonksiyonlara erişimi ve bu fonksiyonların kullanımını arttırmak için, Web arayüzü tasarlanmıştır. PHP 5.1 destekli, Apache 2.2 HTTPD sunucusu üzerinde MATLAB Web Server çalıştırarak hesaplar çevrimiçi ulaşılabilir hale getirilmiştir.

Heisler grafiklerinden direkt okuma yapabilecek bir Web sayfası da hazırlanmış, grafik okumalarında yapılan hataları gösterebilmek için, grafikten okunan değerlerin gerçek değerlerle karşılaştırılması yapılmıştır. Aynı karşılaştırmada yaklaştırılan eğrinin sonuçları da verilmiş, önerilmiş olan, kolay hesaplanabilir eğrinin sonuçlarının doğruluğu kullanıcıya sunulmuştur.

GRAPHICAL SOLUTION OF THE TRANSIENT HEAT TRANSFER PROBLEM

SUMMARY

Time-dependent multi dimensional heat transfer problem has many applications in almost every science. In literature, both analytical and numerical solutions to the problem can be found. Moreover, in order to apply these solution methods, fundamentals of differential equations and numerical methods must be well known. These topics are not covered deep enough in undergraduate level of education, so that, alternative solutions such as reading values from charts (Heisler charts) are introduced to achieve the solutions of the time-dependent heat transfer problems. In this study, solution to the problem of transient heat transfer is explicated. Solutions of the heat transfer equation are analyzed with respect to different geometries. Separation of variables method out of other methods for solving heat transfer problem is developed for four main geometries (slab, semi-infinite slab, cylinder, and sphere) and for three of the boundary conditions; functions are coded in numerical analysis tool which will solve problems with high precision.

Commonness of the usage of the Heisler and Gröber charts in the literature is mentioned. Main problems in using graphic solution which are being followed by almost every textbook of heat transfer are discussed and error causing points are highlighted. Alternative methods or applications to the ones in the literature are being researched by this study.

Functions which analytically solve heat equation are developed in numerical analysis tool (MATLAB). Furthermore, programs that will more accurately regenerate the charts of Heisler, with high-precision, which was drawn in 1947 with only one-term of the series expansion, were developed.

In addition to the study, comparison of the results of the functions developed in numerical analysis tool and the results of the examples of the common textbooks of heat transfer in literature is given. In this comparison it was seen that solutions with chart reading have errors up to 20%.

Studies intending to overcome the difficulties of the calculating analytical solutions of the heat equation are scanned in the literature and a curve fitting for a better representative function is searched. Curves for all three of the geometries are fit with R^2 , which is no less than 0.9998.

In order to improve the access to the functions which are developed in numerical analysis tool and to increase the usage, a small web site is coded. By running MATLAB Web Server on an Apache 2.1 HTTPD server with PHP 5.1, results of this study are made available online.

A Web module for reading accurate data from Heisler charts were coded and values extracted by that tool are compared to the real values in order to express the errors made during chart reading. On the same comparison, results of the fitted curve is given, so that, user could interactively see and check the accuracy of the fit.

1 GİRİŞ

1.1 ÇALIŞMANIN AMACI

Literatürde yaygın olarak kullanılan ders kitaplarında, zamana bağlı ısı aktarımı probleminin çözümü için Heisler grafiklerinden okuma yapılarak çözümün elde edilmesi tarif edilmektedir. Söz konusu grafikler Heisler tarafından 1947’de hazırlanmıştır [1]. Bu çalışmada başlangıçta homojen sıcaklık dağılımına sahip olan üç temel geometri (levha, silindir ve küre) için, orta nokta sıcaklığını ve diğer kalınlıktaki sıcaklıkların bu sıcaklığa oranını gösteren grafikler oluşturmuştur. H. Gröber ve arkadaşları, 1961’de Heisler’in grafiklerini tamamlar nitelikte, toplam ısı aktarımı miktarını gösteren grafikleri ile ilgili çalışmalarını yapmışlardır [2].

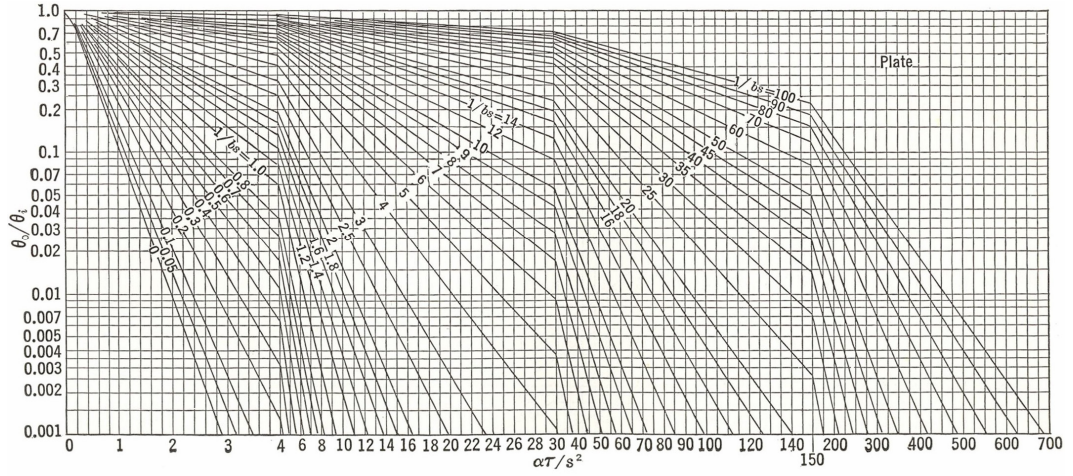
Bu noktadan itibaren, hemen her ısı aktarımı dersi kitabında bu grafiklere yer verilmiştir. Örgün eğitimde sıkça kullanılan ders kitaplarından örnek sayfalar, Ek-A ile verilmiştir. Bu kitaplarda hesaplamaların güçlüğü ortadan kaldırmak için, öğrenciler grafiklerin kullanımına sevk edilmektedir. Fourier sayısı, uzunluk L boyunca, birim hacimde gerçekleşen ısı iletiminin, aynı hacimde depolanan ısı miktarına oranını ifade eden boyutsuz bir değişkendir. Biot sayısı ise, katı malzemenin yüzeyindeki ısı aktarımı katsayısının, katının içindeki, uzunluğu L boyunca iletimine oranıdır. Isı aktarımı problemlerinin çözümü için Biot ve Fourier sayısı ile okuma yapılan Heisler’in orta nokta sıcaklık grafiklerinden (Heisler’in 1. grafikleri olarak da anılır) görsel bir interpolasyonla, önce orta nokta sıcaklığının bulunması salık verilmektedir. Ardından istenilen kalınlıktaki sıcaklık için, Heisler’in düzeltme grafiklerinden (Heisler’in 2. grafikleri olarak da anılır), yine görsel interpolasyonla okuma yapılması gerekmektedir. İstendiği takdirde, toplam ısı aktarımı miktarı için de Gröber’in toplam ısı aktarımı grafiklerinden yararlanılması tavsiye edilmektedir.

Sözü edilen yöntem, birçok açıdan hatalara açık bir yöntemdir. Bu çalışmada hataların önemi ve giderilmesi için çözüm önerileri sunulacaktır.

1.2 YAPILMAKTA OLAN HATALAR

1.2.1 Görsel İnterpolasyonun Zorluğu

Heisler ve Gröber grafikleri, kısıtlı Biot, kısıtlı Fourier ve kısıtlı derinlikler için sonuç vermektedir. Şekil 1.1 ile gösterildiği üzere, bazı Biot sayıları için çizimler yapılabilmektedir. Gerçek hayatta karşılaşılan problemler ise seçilerek çizilen bu noktalar ile aynı olmamaktadır. Bu durumda interpolasyon yapılması gerekmektedir. Değerlerin sayısal bir tabloda verilmemiş olması ile bu interpolasyon, görsel bir interpolasyon halini almaktadır. Bu ise hatalara oldukça açık bir durumdur. Söz konusu hatanın yapıldığı çözümlü örnek sorular, Ek B bölümünde verilmiştir.



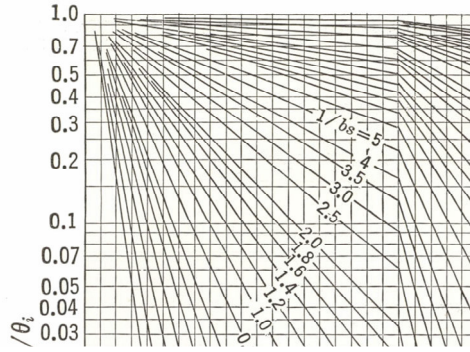
Şekil 1.1: Levha için merkez sıcaklıklarının okunduğu Heisler grafiği

1.2.2 Düzenlenmiş Lineer-Log Grafiklerinden İnterpolasyon İle Veri Okumak

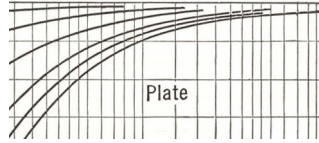
Heisler'in merkez sıcaklığının okunduğu grafiğin y eksenini logaritmik olarak verilmiştir. X eksenini ise belirli noktalarda alınan aralıklarla lineer olarak düzenlenmiştir. Bu noktalar, levha için: [0,4,30,150,750] silindir için: [0,4,30,150,350] ve küre için: [0,3,10,50,250] olmaktadır. Verilen bu noktalar arasındaki kısımlar lineer ölçekle çizilmiş, parçalar da yan yana getirilerek Heisler'in 1. grafikleri oluşturulmuştur. Heisler'in düzeltme grafiklerinin ve Gröber'in toplam ısı aktarımı miktarı grafiklerinin eksenleri ise logaritmik ve lineer olarak verilmiştir. Bu tip eksenleri olan grafikler üzerinde lineer bir interpolasyon yapılırken, yapılacak hatanın miktarı da artmaktadır.

1.2.3 Grafiklerin Çizgilerinin Yoğunlaştığı Bölgeler

Heisler grafiklerinin belli bölgelerinde çizgilerin yoğunlaşması ve birbirine çok yaklaşması söz konusu olmakta ve bölgelerde okuma yapmak daha da zor hale gelmektedir. Heisler'in merkez sıcaklıklarını veren tabloları, sol-üst köşelerinde Şekil 1.2'de gösterildiği gibi bir sıkılaşma olmaktadır. Aynı şekilde, Şekil 1.3'te verildiği gibi, Heisler'in düzeltme grafiklerinin sağ-üst köşesinde yoğunlaşma gözlenmektedir.



Şekil 1.2: Heisler'in silindir için merkez sıcaklığını veren grafiğinin sol-üst köşesi

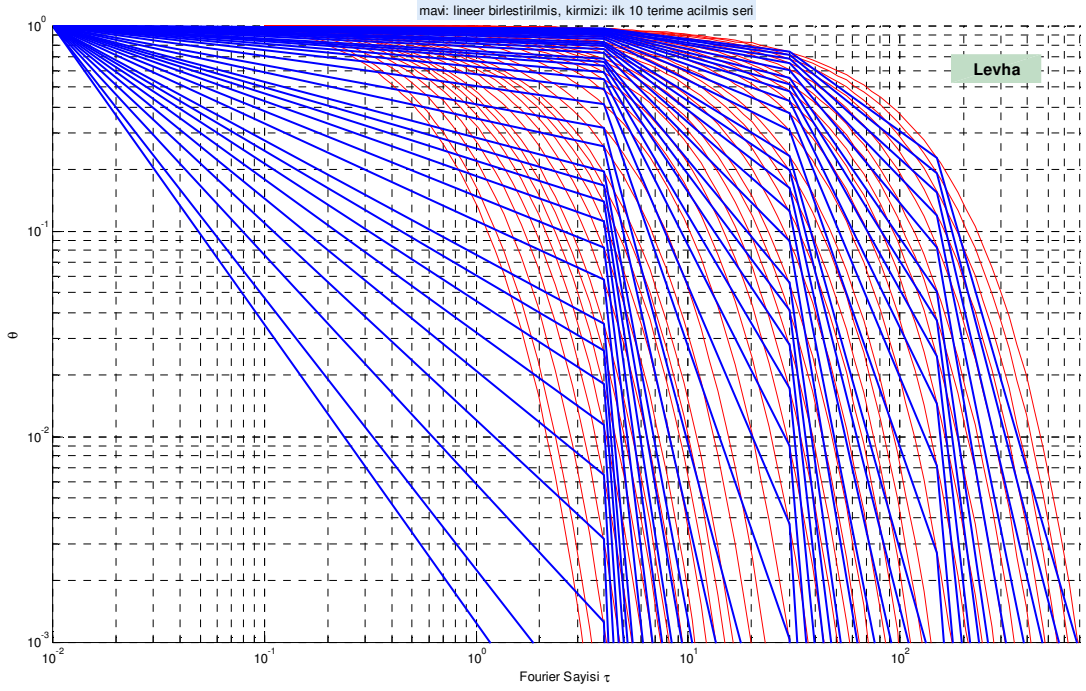


Şekil 1.3: Heisler'in levha için vermiş olduğu düzeltme grafiğinin sağ-üst köşesi

1.2.4 Grafik Verilerindeki Hata

Heisler'in merkez nokta sıcaklığı grafikleri üretilirken, grafiklerde verilen $1/Bi$ değerleri için, sadece belli noktalarda seriye açılımın birinci terimi hesaplanmış, daha sonra bu noktaları lineer olarak birleştirmiştir. Bu noktalar, levha için: $[0,4,30,150,750]$ silindir için: $[0,4,30,150,350]$ ve küre için: $[0,3,10,50,250]$ olmaktadır. Kesiklikler, Şekil 1.1'te kolaylıkla görülebilmektedir.

Gerçekte ise, seriye açılımın birinci teriminin eğrileri, Heisler merkez sıcaklıklarının gösterildiği grafiklerde verilen düz çizgilerin üstünde seyretmektedir. Burada, silindir için verilen Şekil 1.4'te görüldüğü gibi, özellikle Fourier sayısı $\tau < 1$ bölgesinde oldukça yüksek hatalar yapılmaktadır.



Şekil 1.4: Levha için verilen MATLAB sonuçları ile çizilmiş merkez sıcaklıkları grafiklerinin üzerinde, seri açılımın ilk teriminin gösterilmesi

1.2.5 Serinin Sadece İlk Terimi Alınarak Yapılan Hatalar

Değişkenlere ayırma yöntemi ile bulunan seri açılımı, sonsuza uzanan toplamlar şeklinde verilmektedir. Bu seri açılımının ilk terimi alınarak her ne kadar gerçek değere yakın bir sonuç elde edilse de daha hassas sonuçlara ulaşmak mümkündür. Bu çalışmada seri açılımında alınacak terim miktarı parametrik yapılmıştır.

1.2.6 Boyutsuz Zamanın Önkoşulu

Heisler grafiklerinin sonuç verebilmesi için, Fourier sayısı olarak da verilen boyutsuz zamanın, $\tau > 0.2$ olması gerekmektedir. Çünkü (1.2.5) başlığında anlatılan hatalar, bu koşul sağlanmadığında oldukça büyümektedir. Bu sebeple literatürde, Heisler grafikleri kullanılmadan önce bu kriter kontrol edilmektedir. Grigull ve Sandner [3] söz konusu önkoşulun aslında levha için $\tau > 0.24$, silindir için $\tau > 0.21$ ve küre için $\tau > 0.18$ olduğunu, fakat ders kitaplarının, bir çeşit ortalama alarak, $\tau > 0.2$ kontrolüne yer verdiğini belirtmektedir.

Yapılan bu çalışmada ise, serinin istenilen elemanına kadar açılım yapmak mümkün olduğundan, bahsedilen bu kısıt geçerli olmamaktadır.

1.3 ALTERNATİF YÖNTEMLER

Literatürde, Heisler grafikleri üretilirken kullanılan analitik çözümün seri açılımının ilk terimini hesaplamak ve böylece Heisler grafiklerinden veri okumanın güçlüğünü aşmak üzere verilen yöntemlere rastlamak mümkündür. Isı aktarımının birçok ders kitabının ekler bölümünde, üç temel geometri için, seri açılımın birinci terimini hesaplayabilmek için verilmiş eşitlikler bulunmaktadır. Eşitliklerin çalışabilmesi için, Heisler grafiklerinde olduğu gibi, $\tau > 0.2$ koşulu gerekmektedir. Bu koşul sağlanmadığı durumlarda seri açılımının ilk terimini almak, kabul edilemez seviyelerde hataya sebebiyet verecektir. Fourier sayısının 0.2'den büyük olması durumunda, seri açılımın ilk terimini almak %1'den küçük hatalara yol açacaktır. Söz konusu eşitliklerin geçerli olabilmesi için yine, başlangıç koşulu olarak homojen sıcaklık dağılımı sağlanmalıdır.

Seri açılımının ilk terimi alınıyor olsa dahi, hesaplanması gereken terim, yine ağır bir matematik gerektirmektedir. Lisans seviyesindeki mühendislere yönelik yazılmış ders kitaplarında ise, kolaylık olması adına, öğrencinin değerler okuyabileceği tablolar verilmektedir. Bu tablolarda aşkın (transdantal) denklemlerin belli noktalardaki kökleri ve silindir hesaplarında ortaya çıkan birinci ve ikinci Bessel fonksiyonlarının bazı seçilmiş noktalardaki değerleri verilmektedir. Çözülen soruda geçerli olan değerler, tablolarda verilen değerlerle aynı olmaması durumunda, tablolar üzerindeki verilerden interpolasyon yapılarak çözüme gidilmektedir. Böylece Heisler grafiklerinde ortaya çıkan hatalara açık yönler tekrar gündeme gelmektedir.

Bu çalışmada, yapılmış olan eğri uydurma çalışmasının sonuçları ile bahsedilen yöntemle hesaplanan değerlerin bir karşılaştırması Bölüm 3'te verilmektedir.

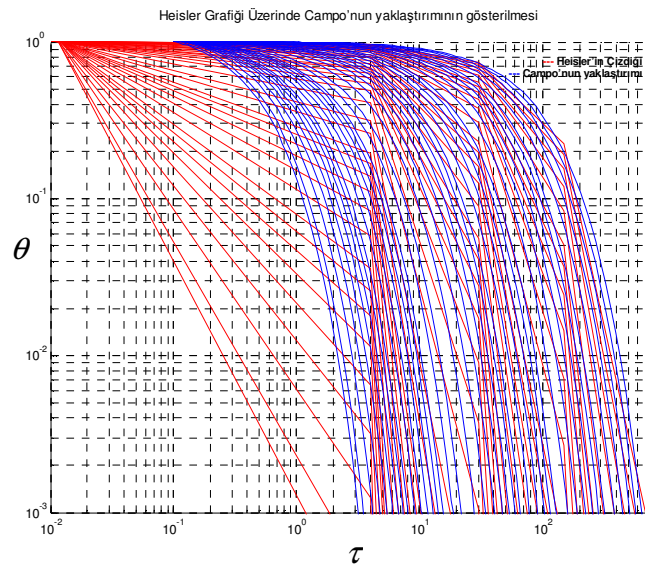
1.4 LİTERATÜRDEKİ BENZER ÇALIŞMALAR

Wiggins grafiklerden okumanın yerini alması için, 1987 yılında bilgisayarlı çözüm teknikleri geliştirmiştir [4]. Geliştirdiği yöntem ile grafiklerden yüksek hassasiyetle veri okuma probleminin önüne geçmiştir. Heisler'in çalışmasında olduğu gibi üç standart geometrinin (levha, silindir ve küre) analizini yapmış, seri açılımının ilk elemanını almıştır.

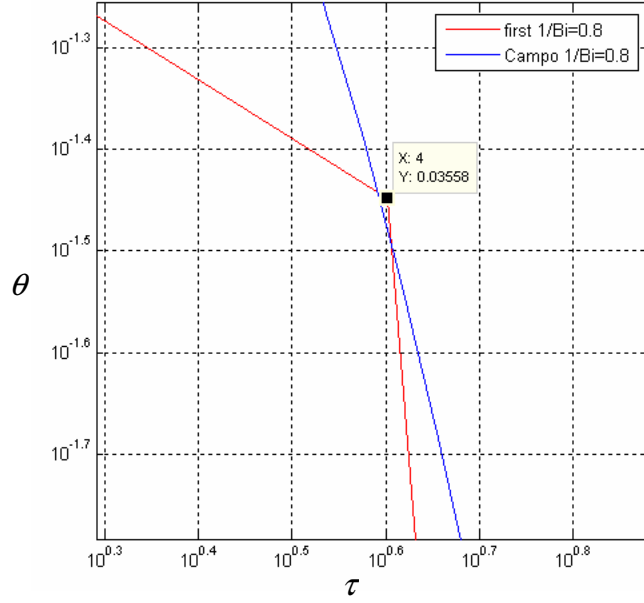
Wiggins, bundan bir sene sonra, 1988'de, aynı çalışmasını geliştirmiş, söz konusu üç standart geometri için üretmiş olduğu bilgisayar programlarının sonuç verme sürelerini yüksek oranda düşürecek iyileştirmelere gitmiştir [5]. Bu çalışmada daha yüksek hassasiyetli hesaplar verilmektedir. Seri açılımının kaç teriminin alınacağı, üretilen matematik analiz programında parametrik yapılmakla birlikte, çalışma içerisinde geçen sayısal sonuçlarda seri açılımlarının, aksi söylenmediği takdirde, en az on terimi hesaba dâhil edilmiştir.

Campo tarafından yapılmış başka bir çalışmada, Heisler grafiklerinden okuma yapılarak yapılan çözümlerin güçlüğünden ve hatalara açık olmasından bahsedilmiş ve alternatif bir çözüm önerisi ortaya konmuştur [6]. Ortaya konan çözümde, Heisler grafiklerinden okuma yapmak yerine, ısı aktarımı probleminin değişkenlere ayırım yöntemi ile çözümüyle ortaya çıkan seri açılımının ilk terimini hesaplamayı kolaylaştıracak bir eşitlik bulmaya çalışılmıştır. Yapılan çalışma sonucunda her bir geometri için hesaplamalarda kullanılacak bir fonksiyon eşleşmesi tablosu verilmiştir. Bu fonksiyonların içerdiği katsayılar için ise, eğri yaklaşım yöntemi kullanılarak değerler bulunmuştur. Değerler bulunurken en az $r^2 = 0.998$ değeri ile çok yüksek bir korelasyon katsayısı gözlemlenmiştir.

Heisler grafikleri ile Campo'nun sonuçlarının eğrileri üst üste yerleştirildiğinde, Şekil 1.5 de verildiği gibi, genel bir tutarlılık görülmektedir. Fakat Şekil 1.6'ya yakından bakıldığında, eğri yaklaşımın doğası gereği, bir miktar hata bulunmaktadır.



Şekil 1.5: Levha için Heisler grafiği üzerinde Campo sonuçlarının gösterilmesi



Şekil 1.6: Heisler merkez sıcaklığı grafiği üzerinde $1/Bi=0.8$ için Campo eğrisinin karşılaştırılması

Campo'nun yapmış olduğu çalışma sonuçlarında, her bir geometri için farklı formül verilmiş, kullanıcı öncelikle bir tablodan hesaplaması gereken fonksiyona bakmaya ve ardından başka bir tablodan ilgili katsayıları okuyarak değer bulmaya yönlendirilmiştir. Eğri yaklaştırma çalışmaları da birinci terim açılımına yapılmıştır. Bu yaklaşımlar Campo'nun yaptığı çalışmanın zayıf noktalarıdır.

2 SAYISAL ANALİZ PROGRAMINDA GELİŞTİRMELER

MATLAB[7] programında üretilen tüm fonksiyonlar ve programlar, bu çalışmaya ek bir CD ile verilmektedir.

2.1 ZAMANA BAĞLI ISI AKTARIMI PROBLEMİ

İçinde ısı üretimi olmayan, homojen bir katı maddenin zamana bağlı ısı iletimini ifade eden bir türevli denklem şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\nabla^2 T(r,t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} \quad 2.1$$

Bu denklemin çözülebilmesi için sınır koşulları ve başlangıç durumu bilinmelidir. Başlangıç koşulu, $t=0$ anında ortamdaki sıcaklık dağılımını veren, r 'ye bağlı bir fonksiyondur. Sınır koşulları ise, $t>0$ iken, ortamın sınırlarının maruz kaldığı ısı durumları ifade eder. Bunlar yüzeyin belli bir sıcaklık dağılımına sahip olması, yüzeyde belli bir ısı akışının gerçekleşmesi veya belli bir sıcaklıktaki ortama ısı geçmesi olabilir. Bahsedilen bu durumlar, sırasıyla birinci tür sınır koşulu (Dirichlet), ikinci tür sınır koşulu (Neumann) ve üçüncü tür sınır koşulu (Cauchy) olmaktadır.

Çözümün kolaylaştırılması için, boyutsuz değişkenler tanımlanmaktadır. Bunlardan en önemlileri, ısı akışının modeli hakkında fikir veren, Biot ve Fourier sayıları olmaktadır. Fourier sayısı, uzunluk L boyunca, birim hacimde gerçekleşen ısı iletiminin, aynı hacimde depolanan ısı miktarına oranını ifade eden boyutsuz bir değişkendir. Fourier sayısı arttıkça, ısı, katı maddenin içinde daha derine nüfuz edecektir. Biot sayısı ise, katı malzemenin yüzeyindeki ısı aktarımı katsayısının, katının içindeki, uzunluğu L boyunca iletimine oranıdır. Biot sayısı arttıkça, yüzeydeki ısı geçişinin, katı maddenin içerisine nüfuz etme süresi artmaktadır.

Isı aktarımı çeşitlerinden, sınır koşullarından ve boyutsuz değişkenlerden, Ek-C'de daha detaylı bahsedilmiştir.

2.2 ISI AKTARIMI PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Isı aktarımı probleminin çözümü için birden çok yöntem ortaya atılmıştır. Bunlardan biri integral dönüşüm tekniği olup, hem homojen hem homojen olmayan sınır koşullarında uygulanabilmektedir.

Geçici haller içeren problemlerde ise, Laplace Dönüşüm tekniği kullanılmaktadır. Zamana bağlı olan geçici hal terimi, dönüşüm yapıldığında düşmektedir.

Analitik yaklaşım yöntemleri, bir diğer çözüm yaklaşımıdır. Karmaşık geometrili ve karmaşık sınır koşullu problemlerin çözümünde öne çıkmaktadır. Fakat özel durumlar için geçerli olduğundan, bu yaklaşımın doğruluğu gerçek veriler ile karşılaştırıldığında ortaya çıkmaktadır.

Sayısal yöntemler, ısı aktarımı problemlerinin çözümünde sıklıkla uygulanmaktadır. Sonlu farklar yöntemi, oldukça başarılı sonuçlar vermektedir. Tam çözümüne ulaşamayan düzensiz sınır koşullarına veya değişken ısı özelliklere sahip karmaşık geometrilerin yüksek doğrulukla modellenmesini sağlamaktadır.

Bu çalışmada kullanılan değişkenlerine ayırma yöntemi ise, çözüm için ortaya atılmış yöntemlerin en eskilerindedir. Lineer ve homojen sınır koşullu kısmi türevli denklem için doğrudan sonuca götürür.

Isı aktarımı problemlerinin çözümü ile ilgili daha detaylı bilgiler, Ek-C'de verilmiştir.

2.3 DEĞİŞKENLERİNE AYIRMA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLER

$0 \leq x \leq L$ aralığında sınır koşullar ve başlangıç değerleri,

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad 0 < x < L \quad t > 0 \quad 2.2$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \quad t > 0 \quad 2.3$$

$$k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + hT = 0 \quad x = L \quad t > 0 \quad 2.4$$

$$T = F(x) \quad 0 \leq x \leq L \quad t = 0 \quad 2.5$$

şeklinde verilen ısı aktarımı probleminin çözümü için,

$$T(x, t) = X(x)\Gamma(t) \quad 2.6$$

şeklinde bir değişkenlerine ayırma yapılmaktadır. Ayırmanın geçerli olabilmesi için, her iki tarafı $-\beta^2$ 'ye eşitleyerek çözüm yapılır. Çözüm böylelikle özdeğer problemine dönüşmektedir:

$$T(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha\beta_m^2 t} \frac{1}{N(\beta_m)} X(\beta_m, x) \int_{x'=0}^L X(\beta_m, x') F(x') dx' \quad 2.7$$

şeklinde bulunan genel çözüm içerisinde yer verilen $X(\beta_m, x)$ özfonksiyonları, β_m özdeğerleri, $N(\beta_m)$ normalizasyon integralini göstermektedir. Bu fonksiyonlar ve kökleri β_m 'leri veren eşitlikler, sınır koşullarına göre değişmektedir. Ek-D bölümünde konu hakkında daha detaylı bilgi verilmiştir.

2.4 SORU ÇÖZÜMLERİ İÇİN DEĞER HESAPLAYAN FONKSİYONLAR

2.4.1 Levha İçin Fonksiyonlar

2.4.1.1 Tek Boyutlu Levha (*ctSlab1D*)

Levhada ısı aktarımı probleminin tek boyutta çözümü için, *ctSlab1D* fonksiyonu üretilmiştir. Tablo 2.1 ile fonksiyona sağlanması gereken parametreler ve sınır koşulu tiplerinin açıklaması verilmiştir.

Tablo 2.1: ctSlab1D fonksiyonu için parametrelerin açıklaması

```
>> help ctSlab1D
calculates 1D temperature for Slab type 1 - 9

Type 1:
Boundary condition at x = 0 : -dX/dx+H1X=0
Boundary Condition at x = L : dX/dx+H2X=0
All parameters are used
Type 2:
Boundary condition at x = 0 : -dX/dx+H1X=0
Boundary Condition at x = L : dX/dx=0
H2 is ignored
Type3:
Boundary condition at x = 0 : -dX/dx+H1X=0
Boundary Condition at x = L : X=0
H2 is ignored
Type4:
Boundary condition at x = 0 : dX/dx=0
Boundary Condition at x = L : dX/dx+H2X=0
H1 is ignored
Type5:
Boundary condition at x = 0 : dX/dx=0
Boundary Condition at x = L : dX/dx=0
H1 and H2 are ignored
Type6:
Boundary condition at x = 0 : dX/dx=0
Boundary Condition at x = L : X=0
H1 and H2 are ignored
Type7:
Boundary condition at x = 0 : X=0
Boundary Condition at x = L : dX/dx+H2X=0
H1 is ignored
Type8:
Boundary condition at x = 0 : X=0
Boundary Condition at x = L : dX/dx=0
H1 and H2 are ignored
Type9:
Boundary condition at x = 0 : X=0
Boundary Condition at x = L : X=0
H1 and H2 are ignored

usage:
ctSlab1D(type,x,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
```

type değişkeni ile, hangi sınır koşulu durumlarına sahip olduğu, *x* değişkeni ile, hangi kalınlıktaki sıcaklık hesaplanacağı, *t* değişkeni ile başlangıçtan ne kadar süre sonra sıcaklık hesaplanacağı, *alpha* ile malzemenin ısı yayını, *L* ile malzemenin kalınlığı verilmektedir. Ortamın ısı taşınım katsayısının ısı iletkenlik katsayısına oranı *H*, *H₁* ve *H₂* olmak üzere, her iki sınır için ayrı ayrı tanımlanmalıdır. Bazı sınır koşulu tiplerinde, *H₁* ve *H₂*'nin veya her ikisinin kullanılmadığı durumlar olabilmektedir. Bu durumlar, Tablo 2.1'de açıklanmıştır. *F* ile ilk durum sıcaklık dağılımının *x*'in bir fonksiyonu olarak verilmesi gerekmektedir. Literatürdeki çalışmalarda genel olarak homojen *T₀* sıcaklık dağılımı içeren durumlar konu edilmektedir. Heisler grafikleri de yalnızca bu durumda çalışmaktadır. Fakat değişkenlere ayırma yönteminin bir önkoşulu olan, *F* ilk sıcaklık dağılımı fonksiyonunun ve türevinin $0 < x < L$ boyunca parçalı sürekli olması sağlandığı sürece, *ctSlab1D* fonksiyonu doğru sonuçlar üretmektedir. *n* ile sağlanan değişken ise, seriye açılımın kaç teriminin alınacağını belirten parametredir. Literatürdeki soru çözümlerinde çoğu zaman ilk terim alınarak hesap yapılmakta veya yine tek terim

hesabı ile oluşturulmuş Heisler grafiklerinden okuma yapılmaktadır. Fakat bu çalışmada, hassasiyet bu parametre ile ayarlanabilmektedir.

2.4.1.2 İki Boyutlu Levha (*ctSlab2D*)

Levhada ısı aktarımı probleminin iki boyutlu çözümü için, *ctSlab2D* fonksiyonu üretilmiştir. Tablo 2.2 ile fonksiyona sağlanması gereken parametreler verilmiştir.

Tablo 2.2: *ctSlab2D* fonksiyonu için parametrelerin açıklaması

```
>> help ctSlab2D
calculates 2D temperature for Slab type 1 - 9
usage:
ctSlab2D([typeX,typeY],[x,y],t,alpha,[a,b],[H1,H2,H3,H4],F(x,y),n)
```

Tek boyutlu çözüm için gerekli olan değerlerin bazıları çoğullanmıştır. Örneğin iki tane *type* değişkeni girilmelidir. Bunlardan ilki, x yönündeki, diğeri y yönündeki sınırların tiplerini belirtmektedir. Bu tipler, tek boyutlu çözümdeki tiplerin aynısı olmaktadır. Çoğullanan bir diğer parametre ise mekân değişkenidir. İki boyutlu bir ortamda ikili koordinatlar geçerli olduğu için sıcaklığın hesaplanması istenilen nokta, $[x, y]$ ile verilmektedir. Cismin boyutlarını veren sınırlar da x ve y yönünde sırası ile $[a, b]$ olmaktadır. Ek-D bölümünde, Şekil D.3 ile verilen gösterimde olduğu gibi, dört sınır için, $[H_1, H_2, H_3, H_4]$ şeklinde dört taşınım ısı aktarım katsayısı / iletim ısı aktarım katsayısı oranı verilmelidir. Başlangıç koşulunu veren F fonksiyonu iki değişkenli bir fonksiyon olmaktadır. Literatürde, ilgili soru çözümlerinde başlangıç koşulu olarak genellikle homojen T_0 sıcaklık dağılımı kabul edilse de, daha önce bahsedilen, $F(x, y)$ ve türevi için geçerli olan süreklilik kriterleri sağlandığı takdirde, *ctSlab2D* fonksiyonu herhangi bir başlangıç koşulu için çözüm yapabilmektedir.

2.4.1.3 Üç Boyutlu Levha (*ctSlab2D*)

Levhada ısı aktarımı probleminin üç boyutlu çözümü için, *ctSlab3D* fonksiyonu üretilmiştir. Tablo 2.3 ile fonksiyona sağlanması gereken parametreler verilmiştir.

Tablo 2.3: ctSlab3D fonksiyonu için parametrelerin açıklaması

```
>> help ctSlab3D
calculates 3D temperature for Slab type 1 - 9
usage:
ctSlab3D([typeX,typeY,typeZ],[x,y,z],t,alpha,[a,b,c],[H1,H2,H3,H4,H5,H6],F(x,y,z),n)
```

İki boyutlu çözümde geçerli olan çoğullama işlemi burada da söz konusudur. Burada üç tane *type* değişkeni girilmelidir. Üçüncü tip, z yönündeki sınır koşullarını vermektedir. Mekân değişkeni fonksiyona $[x, y, z]$ şeklinde sağlanmalıdır. Sınırlar ise $[a, b, c]$ şeklinde girilmelidir. Üç boyutlu cismin altı yüzü için $[H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6]$ taşınım ısı aktarım katsayısı / iletim ısı aktarım katsayısı oranları verilmelidir. Başlangıç koşulunu veren F fonksiyonu üç değişkenli bir fonksiyon olmaktadır. Literatürde ilgili soru çözümlerinde başlangıç koşulu olarak genellikle homojen T_0 sıcaklık dağılımı kabul edilmektedir. Önceden bahsedilmiş olan, $F(x, y, z)$ 'nin ve türevinin sağlaması gereken parçalı süreklilik kriterleri yerine geldiği takdirde, *ctSlab3D* fonksiyonu herhangi bir başlangıç koşulu için çözüm yapabilmektedir.

2.4.2 Yarı Sonsuz Levha İçin Fonksiyonlar (ctSemiSlab1D)

Yarı sonsuz levhada ısı aktarımı probleminin çözümü için, *ctSemiSlab1D* fonksiyonu üretilmiştir. Tablo 2.4 ile fonksiyona sağlanması gereken parametreler ve fonksiyonun çözümünü yaptığı sınır koşulları verilmiştir.

Tablo 2.4: ctSemiSlab1D fonksiyonu için parametrelerin açıklaması

```
>> help ctSemiSlab1D
calculates temperature for sphere type 1 - 3

Type 1:
Boundary condition at x = 0 : dX/dx+HX=0
All parameters are used
Type 2:
Boundary condition at x = 0 : dX/dx=0, constant q = 0
H is ignored
Type 2.5:
Boundary condition at x = 0 : dX/dx=q constant q is given instead
of Tenv
H is taken as k
Type3:
Boundary condition at x = 0 : X=0
H is ignored

usage:
ctSemiSlab1D(type,x,t,alpha,H(h/k),Tinit,Tenv(q for type 2.5))
```

Bu soru tipi için tek sınır bulunmakta ve bu sınır için üç tane sınır koşulu olmaktadır. Fonksiyona sağlanması gereken parametrelerden *type* sınır koşulunu, x sınırdan

itibaren derinliği, t başlangıç anından itibaren geçen süreyi, $alpha$ malzemenin ısıl yayınığını, H ortamın taşınım ısı aktarım katsayısının ısıl iletim katsayısına oranını, $Tinit$ homojen başlangıç sıcaklığını, $Tenv$ ortam sıcaklığını belirtmektedir.

Yüzeyin yalıtılmış olduğu, ikinci tip sınır koşulu aslında sabit ısı akışının gerçekleştiği durumun $q=0$ olan, bir özel durumdur. Genel durum için, $type=2.5$ ile belirtilen çözüm geliştirilmiş ve fonksiyona dâhil edilmiştir. Bu sınır koşulu için, H ile k , $Tenv$ ile de sabit ısı akışı q verilmektedir.

Bu geometrinin hesaplanabilir bir analitik çözümünü bulmakta bir takım güçlükler vardır. Literatüre paralel olarak, $ctSemiSlab1D$ fonksiyonu, $Tinit$ homojen başlangıç sıcaklığı olan durumlar için çözüm vermektedir.

2.4.3 Silindir İçin Fonksiyonlar (ctCylinder)

Silindirde ısı aktarımı probleminin çözümü için, $ctCylinder$ fonksiyonu üretilmiştir. Tablo 2.5 ile fonksiyona sağlanması gereken parametreler ve fonksiyonun çözümünü yaptığı sınır koşulları verilmiştir.

Tablo 2.5: ctCylinder fonksiyonu için parametrelerin açıklaması

```
>> help ctCylinder
calculates temperature for cylinder type 1 - 3

Type 1:
  Boundary condition at r = R : dR/dr+HR=0
  All parameters are used
Type 2:
  Boundary condition at r = R : dR/dr=0
  H is ignored
Type3:
  Boundary condition at r = R : R=0
  H is ignored

usage:
  ctCylinder(type,r,t,alpha,R,H,F,n)
```

Bu soru tipi için tek sınır bulunmakta ve bu sınır için üç tane sınır koşulu olmaktadır. Fonksiyona sağlanması gereken parametrelerden $type$ sınır koşulu tipini, r merkezden yüzeye doğru olan kalınlığı, t başlangıçtan itibaren geçen süreyi, $alpha$ malzemenin ısıl yayınığını, R silindirin yarıçapını, H ortamın ısıl taşınımı / malzemenin ısıl iletimi oranını vermektedir. F ilk durumdaki sıcaklığı r 'nin bir fonksiyonu olarak veren başlangıç koşuludur. Ders kitaplarında, homojen sıcaklık dağılımının olduğu ilk durumlar, yani $F(r)=T_0$ olduğu durumlar incelenmiştir. Heisler grafikleri de bu durumlar için oluşturulmuştur. $ctCylinder$ fonksiyonu, $F(r)$

fonksiyonunun ve türevinin, $0 < r < R$ içerisinde parçalı sürekli olduğu herhangi bir başlangıç koşulu için çözüm vermektedir.

2.4.4 Küre İçin Fonksiyonlar (ctSphere)

Kürede ısı aktarımı probleminin çözümü için, *ctSphere* fonksiyonu üretilmiştir. Tablo 2.6 ile fonksiyona sağlanması gereken parametreler ve fonksiyonun çözümünü yaptığı sınır koşulları verilmiştir.

Tablo 2.6: ctSphere fonksiyonu için parametrelerin açıklaması

```
>> help ctSphere
calculates temperature for sphere type 1 - 3

Type 1:
  Boundary condition at r = R : dR/dr+HR=0
  All parameters are used
Type 2:
  Boundary condition at r = R : dR/dr=0
  H is ignored
Type3:
  Boundary condition at r = R : R=0
  H is ignored

usage:
  ctSphere(type,r,t,alpha,R,H,F,n)
```

Bu soru tipi için tek sınır ve bu sınır için üç tane sınır koşulu bulunmaktadır. Fonksiyona sağlanması gereken parametrelerden *type* sınır koşulu tipini, *r* merkezden yüzeye doğru olan kalınlığı, *t* başlangıçtan itibaren geçen süreyi, *alpha* malzemenin ısı yayılımını, *R* kürenin yarıçapını, *H* ortamın taşınım ısı aktarım katsayısı / kürenin ısı iletim katsayısı oranını vermektedir. *F* ilk durumdaki sıcaklığı *r*'nin bir fonksiyonu olarak veren başlangıç koşuludur. Ders kitaplarında, homojen sıcaklık dağılımının olduğu ilk durumlar, yani $F(r)=T_0$ olduğu durumlar incelenmiştir. Heisler grafikleri de bu durumlar için oluşturulmuştur. *ctSphere* fonksiyonu, $F(r)$ fonksiyonunun ve türevinin, $0 < r < R$ içerisinde parçalı sürekli olduğu herhangi bir başlangıç koşulu için çözüm vermektedir.

2.5 GRAFİK HESAPLAYAN KODLAR

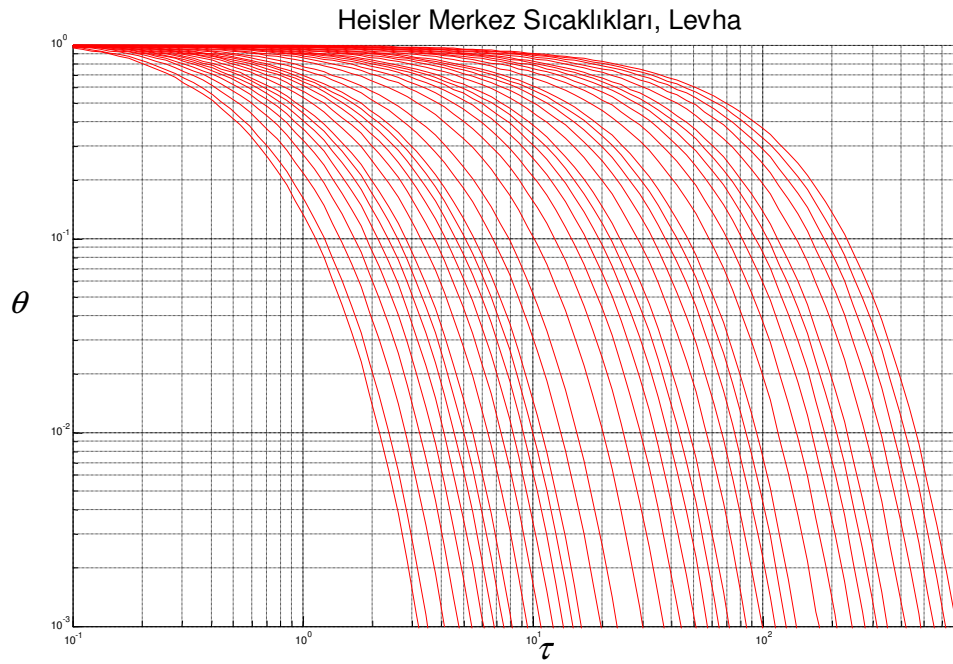
2.5.1 Heisler 1. Grafikleri

Literatürde Heisler orta nokta grafikleri olarak da geçmekte olan grafiklerin yüksek hassasiyet ile tekrar üretilmesi için, Heisler grafiklerinde sunulan aralıkta, *ctSlab1D*, *ctCylinder* ve *ctSphere* fonksiyonlarını kullanarak grafikler üretilmiştir. Üretilen bu

grafiklerin rahat okunabilmesi için, Ek-E bölümünde her bir grafiğin daha büyük hallerine yer verilmiştir.

2.5.1.1 Levha İçin Heisler Orta Nokta Grafikleri

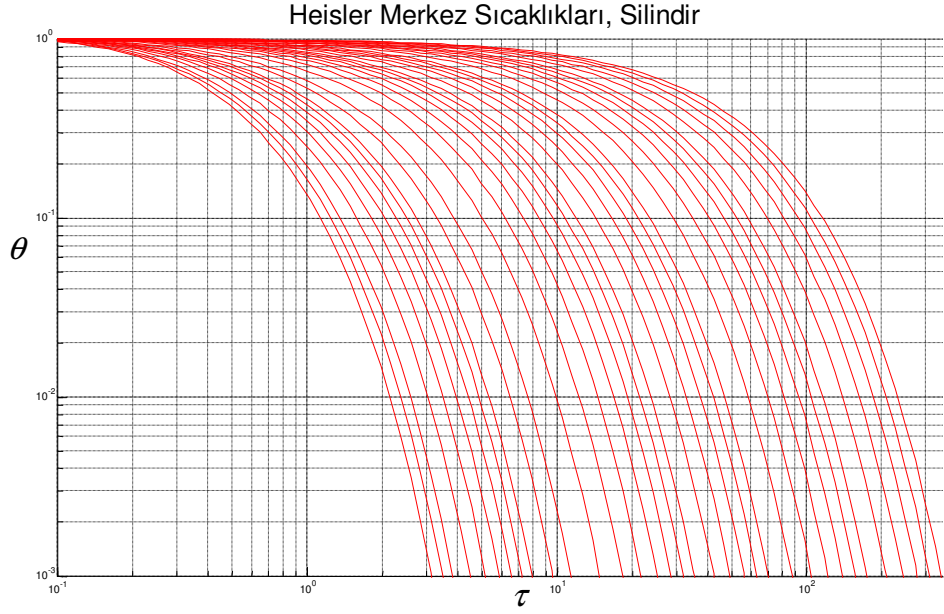
Heisler1Slab fonksiyonu ile çizdirilmektedir. Heisler grafikleri üzerinde verilen her bir $1/Bi$ değeri için çizim yapılmaktadır. Fourier sayısı'nı veren x eksenini $[0.1,750]$ aralığındadır. Çizim Şekil 2.1 ile verilmiştir.



Şekil 2.1: Heisler1Slab fonksiyonu ile üretilen, levha için Heisler'in merkez sıcaklığı grafiği

2.5.1.2 Silindir İçin Heisler Orta Nokta Grafikleri

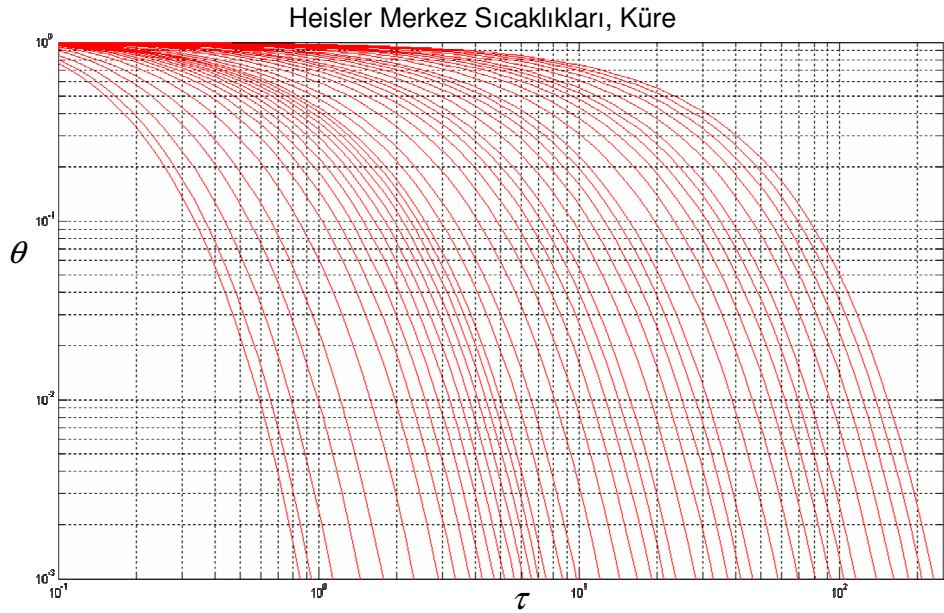
Heisler1Cylinder fonksiyonu ile çizdirilmektedir. Heisler grafikleri üzerinde verilen her bir $1/Bi$ değeri için çizim yapılmaktadır. Fourier sayısı'nı veren x eksenini $[0.1,350]$ aralığındadır. Çizim, Şekil 2.2 ile verilmiştir.



Şekil 2.2: Heisler1Cylinder fonksiyonu ile üretilen, silindir için Heisler'in merkez sıcaklığı grafiği

2.5.1.3 Küre İçin Heisler Orta Nokta Grafikleri

Heisler1Sphere fonksiyonu ile çizdirilmektedir. Heisler grafikleri üzerinde verilen her bir $1/Bi$ değeri için çizim yapılmaktadır. Fourier sayısı'nı veren x eksenini $[0.1,250]$ aralığındadır. Çizim, Şekil 2.3 ile verilmiştir.



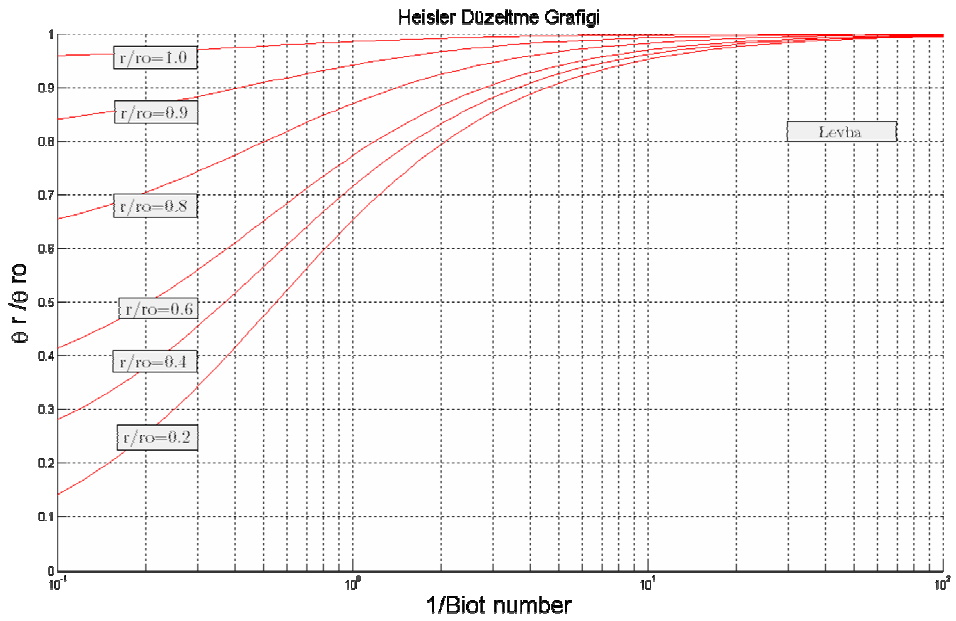
Şekil 2.3: Heisler1Sphere fonksiyonu ile üretilen, silindir için Heisler'in merkez sıcaklığı grafiği

2.5.2 Heisler 2. Grafikleri

Literatürde Heisler'in düzeltme grafikleri olarak da geçmekte olan grafikler yüksek hassasiyet ile tekrar üretilmiştir. Heisler'in merkez sıcaklıklar grafiklerinden okuma yapıldıktan sonra, söz konusu tablolar vasıtasıyla diğer kalınlıklardaki sıcaklıklar okunmaktadır.

2.5.2.1 Levha İçin Heisler Düzeltme Grafikleri

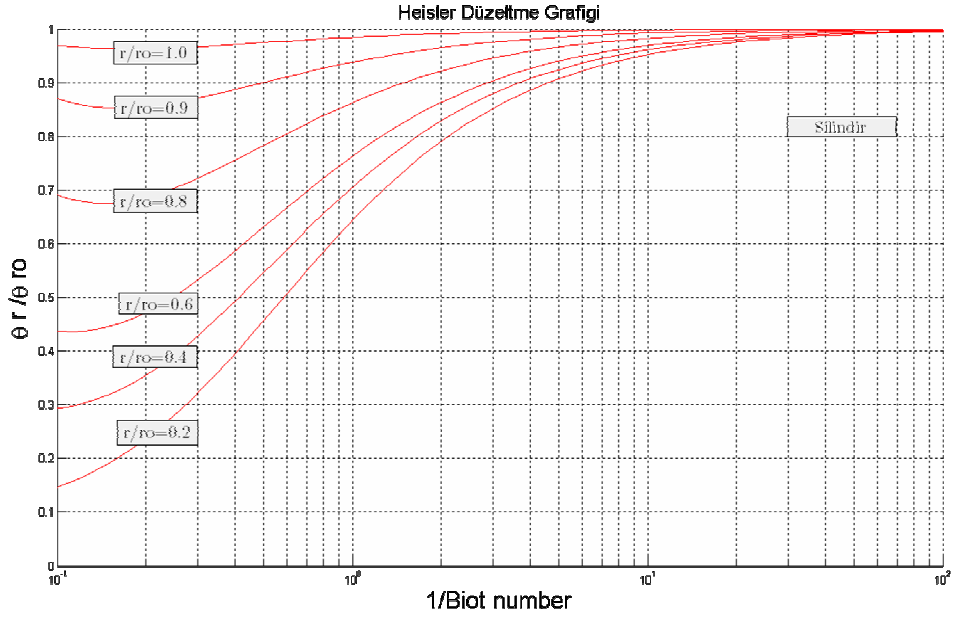
Levha için Heisler düzeltme grafiği, *Heisler2Slab* fonksiyonu ile çizdirilmektedir. Çizilmiş olan grafik, Şekil 2.4 ile verilmiştir.



Şekil 2.4: MATLAB fonksiyonları ile üretilen levha için Heisler düzeltme grafiği

2.5.2.2 Silindir İçin Heisler Düzeltme Grafikleri

Silindir için Heisler düzeltme grafiği *Heisler2Cylinder* fonksiyonu ile çizdirilmektedir. Çizilmiş olan grafik Şekil 2.5 ile verilmiştir.



Şekil 2.5: MATLAB fonksiyonları ile üretilen silindir için Heisler düzeltme grafiği

2.5.2.3 Küre İçin Heisler Düzeltme Grafikleri

Küre için düzeltme grafiği *Heisler2Sphere* fonksiyonu ile çizdirilmektedir. Çizilmiş olan grafik Şekil 2.6 ile verilmiştir.



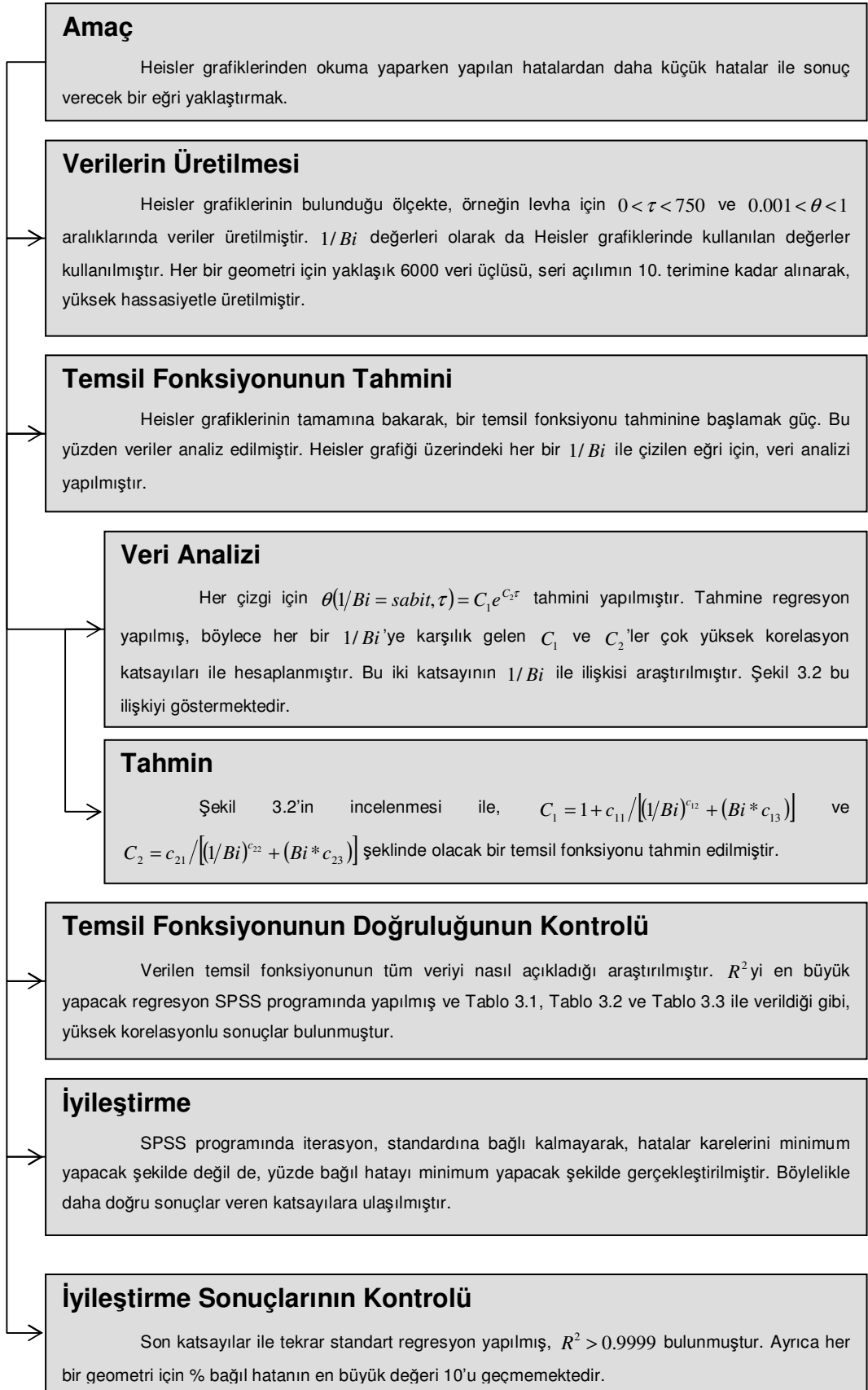
Şekil 2.6: MATLAB fonksiyonları ile üretilen küre için Heisler düzeltme grafiği

3 EĞRİ YAKLAŞTIRMA ÇALIŞMALARI

Bu çalışmanın bir diğer amacı da, lisans seviyesindeki öğrencilerin kolaylıkla hesaplayabilecekleri ve en fazla Heisler grafiklerinden görsel interpolasyonla veri okumak kadar hataya neden olacak bir temsil fonksiyonu bulmaktır. Söz konusu fonksiyonun olabildiğince basit olması hedeflenmiştir. Fakat temsil fonksiyonunun doğruluğunu arttırmaya, bu hedeften daha fazla önem verilmiştir.

Eğri yaklaşırma çalışmalarında veri olarak, MATLAB'da geliştirilmiş olan, ve $n = 10$ terim ile hesap yapan fonksiyonlar ile veriler üretilmiştir. Örnek veri olarak, her bir geometri için yaklaşık 6000 gözlem ele alınmıştır. Regresyonun doğruluğunu arttırmak için; Heisler grafiğinin verilerine paralel bir şekilde, değişik $1/B_i$ ve τ değerleri için, θ değerleri hesaplanmış, Heisler grafiklerinin ölçeği içerisinde kalmaya dikkat edilmiştir. Üretilen bu veriler ile doğrusal olmayan regresyon analizi yapılmış, analiz yapmak için SPSS v15.0 [8] programı kullanılmıştır.

Literatürdeki yaygın kullanımda uygulanabilir bir sonuç bulabilmek hedeflenmiştir. Bu sebeple, $\theta(1/B_i, \tau)$ şeklinde bir temsil fonksiyonu araştırılmıştır. Böylece soru çözümü yapan öğrenci, Heisler grafikleri kullanırken okuma yapacağı parametreler ile temsil fonksiyonunu hesaplayacaktır. Heisler grafiklerinden veri okuma sırasında karşılaşılan güçlüklerin bu şekilde aşılması hedeflenmiştir. Eğri yaklaşırma çalışmasının akış diyagramı, Şekil 3.1 ile verilmiştir.



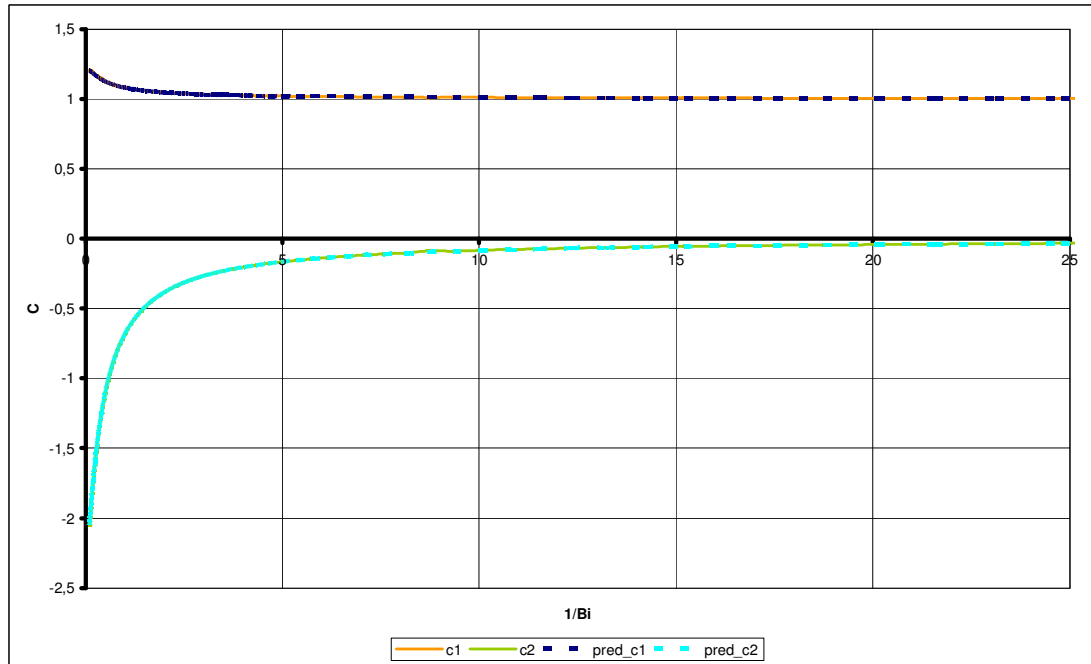
Şekil 3.1: Yapılan eğri yaklaştırmada izlenen yol

Eğri yaklaşımının en zor yanlarından biri, uygun temsil fonksiyonunu tahmin edebilmektir. Temsil fonksiyonunun tahmin edilmesi iki aşamada gerçekleştirilmiştir. Öncelikle, sabit Bi değerleri için, $\theta(1/Bi = \text{sabit}, \tau) = C_1 e^{C_2 \tau}$ eğrisini en az $R^2 = 0.9999$ ile sağlayan C_1 ve C_2 katsayıları hesaplanmıştır. Daha sonra bu katsayıların $1/Bi$ ile olan ilişkisi araştırılmıştır.

Katsayılar ile $1/Bi$ 'nin ilişkisini tahmin etmek için, her bir $1/Bi$ değeri için yapılan regresyonlar sonucunda oluşturulan Şekil 3.2'nin incelenmesi gereklidir. Böylelikle

$$C_1 \text{ katsayısı için, } C_1 = 1 + \frac{c_{11}}{(1/Bi)^{c_{12}} + (Bi * c_{13})} \text{ ve } C_2 = \frac{c_{21}}{(1/Bi)^{c_{22}} + (Bi * c_{23})} \text{ şeklinde}$$

bir yaklaşım uygun olmaktadır. Uygun bulunan bu yaklaşımda, c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{21} , c_{22} ve c_{23} yaklaşım katsayıları olmaktadır.



Şekil 3.2: $1/Bi$ ile C_1 ve C_2 katsayılarının ilişkisi ve eğri yaklaşım sonucu

Verilen formüllere dayanarak yapılan lineer olmayan regresyon analizi ile bulunan sonuçlar ve yaklaşımın eğri, Şekil 3.2 ile sunulmaktadır.

$\theta(1/Bi, \tau)$ olarak hedeflenmiş olan formül,

$$\theta(1/Bi, \tau) = \left[1 + \frac{c_{11}}{(1/Bi)^{c_{12}} + (Bi * c_{13})} \right] * \exp \left(\left[\frac{c_{21}}{(1/Bi)^{c_{22}} + (Bi * c_{23})} \right] \tau \right) \quad 3.1$$

halini almaktadır. Korelasyonu arttırmak için, (3.1) denkleminde uygun regresyon çalışması tekrar yapılarak, katsayılar iyileştirme yapılmıştır. Katsayıların başlangıç değeri olarak, Tablo 3.1 ile gösterildiği üzere, ilk regresyonun sonuçları verilmiştir.

Tablo 3.1: İkinci regresyonda iterasyon geçmişi^{(b)(c)(d)}

İterasyon Sayısı ^(a)	Σ Hata Kareleri	Parametreler					
		c11	c12	c13	c21	c22	c23
1.0	1711.304	-.137	.343	3.324	-.077	-3.194	3.680
1.1	1765.973	4.758	11.617	-188.446	1.767	134.278	-163.315
1.2	1804.815	1.930	4.688	-94.649	1.193	119.342	-137.199
1.3	1908.032	.199	.538	-36.754	.333	99.476	-96.149
1.4	2597.875	-.346	.468	-9.874	-.790	67.731	-31.714
...
15.1	.138	.641	-.061	2.813	-6.347	-.041	3.174
16.0	.138	.641	-.061	2.813	-6.347	-.041	3.174
16.1	.138	.641	-.061	2.813	-6.347	-.041	3.174

a Birincil iterasyon sayısı ondalığın solunda, ikincil iterasyon sayısı ise sağında gösterilmiştir.

b Hata karelerinin yakınsaması 1.00E-008 değerinden küçük olduğu için iterasyon durdu, 37 model ve 16 türev hesabı yapıldı.

c Türevler sayısal olarak hesaplandı.

d Değerler silindir için verilmiş olup, katsayılar optimize edilmiş son hali değildir.

Tablo 3.2: İkinci regresyon sonuçları, parametrelerin tahmini

Parametre	Tahmin	Standart S.	95% Güven Aralığı	
			Alt Sınır	Üst Sınır
c11	.641	.009	.623	.660
c12	-.061	.008	-.076	-.046
c13	2.813	.054	2.708	2.918
c21	-6.347	.023	-6.392	-6.301
c22	-.041	.002	-.045	-.037
c23	3.174	.013	3.149	3.200

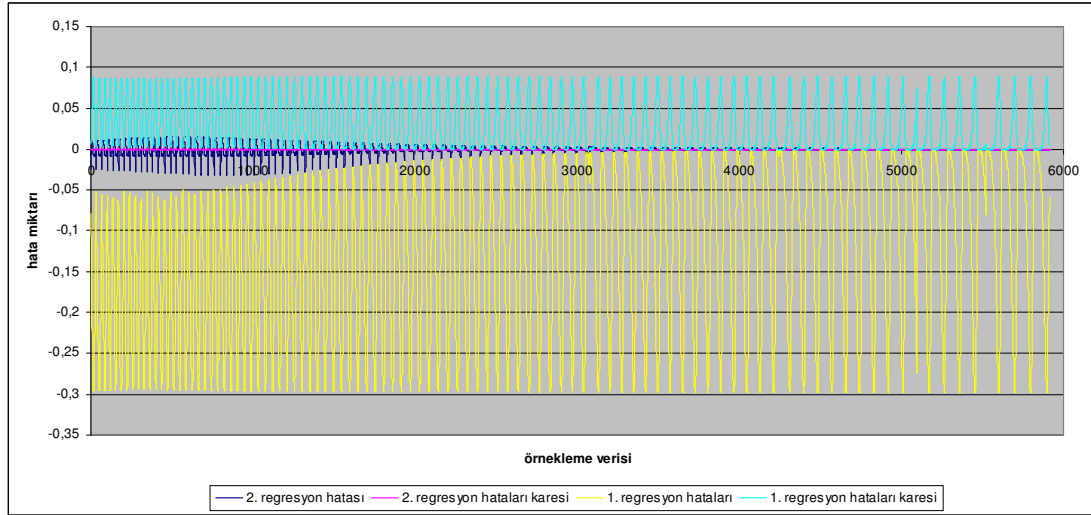
Tablo 3.3: İkinci regresyon sonuçları, R² (a)

Kaynak	Kareler Toplamı	Frekans	Karelerin Ort.
Regresyon	2689.953	6	448.326
Kalan	.138	5909	.000
Düzeltilmemiş Toplam	2690.091	5915	
Düzeltilmiş Toplam	826.031	5914	

Bağımlı değişken: theta
a R² = 1 - (Kalan Kareler Toplamı) / (Düzeltilmiş Kareler Toplamı) = 1.000.

Yapılan hesaplamalar ile katsayıların net değeri Tablo 3.2 ile verilmektedir. Ayrıca Tablo 3.3'te görülebileceği gibi, yapılmış olan eğri yaklaştırma çalışmasının korelasyonu oldukça yüksektir.

Şekil 3.3 ikinci regresyon ve ilk regresyon hatalarının karşılaştırılabilmesi için verilmiştir. Grafikte görüldüğü üzere ikinci regresyonun yapılması ile hata önemli ölçüde azaltılmıştır.



Şekil 3.3: İkinci regresyon ile hataların büyük ölçüde küçültülmesi

Büyük sayıdaki verilerin hatalar kareleri toplamını en aza indirmek için yapılan regresyonlar ile, çok yüksek korelasyonda katsayıları bulmak mümkün olmuştur. Fakat yüzde bağıl hatayı en aza indirmek amacı ile, parametreler üzerinde, tekrar bir iterasyon yapılmış ve katsayılar optimize edilmiştir. Her bir geometri için benzer şekilde optimizasyon çalışmaları yapılarak sonuçlar bulunmuştur.

3.1 LEVHA İÇİN EĞRİ YAKLAŞTIRMA SONUÇLARI

Daha önceden geliştirilmiş olan, levha için veriler üreten, Heisler1SlabValueExtractorV2 MATLAB fonksiyonu kullanılarak 5369 (Bi, τ, θ) üçlüsü üretilmiştir. Üretilen bu örnekleme verisi üzerinden yapılan regresyon sonucunda uygun temsil fonksiyonu aşağıdaki şekilde olmuştur:

$$\theta(1/Bi, \tau) = \left[1 + \frac{c_{11}}{(1/Bi)^{c_{12}} + (Bi * c_{13})} \right] * \exp\left(\left[\frac{c_{21}}{(1/Bi)^{c_{22}} + (Bi * c_{23})} \right] \tau \right) \quad 3.2$$

Bilinmeyen katsayılar ve regresyon analizi, Tablo 3.4 ile, yaklaştırılan eğrinin hatası ise, Şekil 3.4 ile verilmiştir. Tablo 3.5 ile de Heisler merkez grafiklerinin parçalı

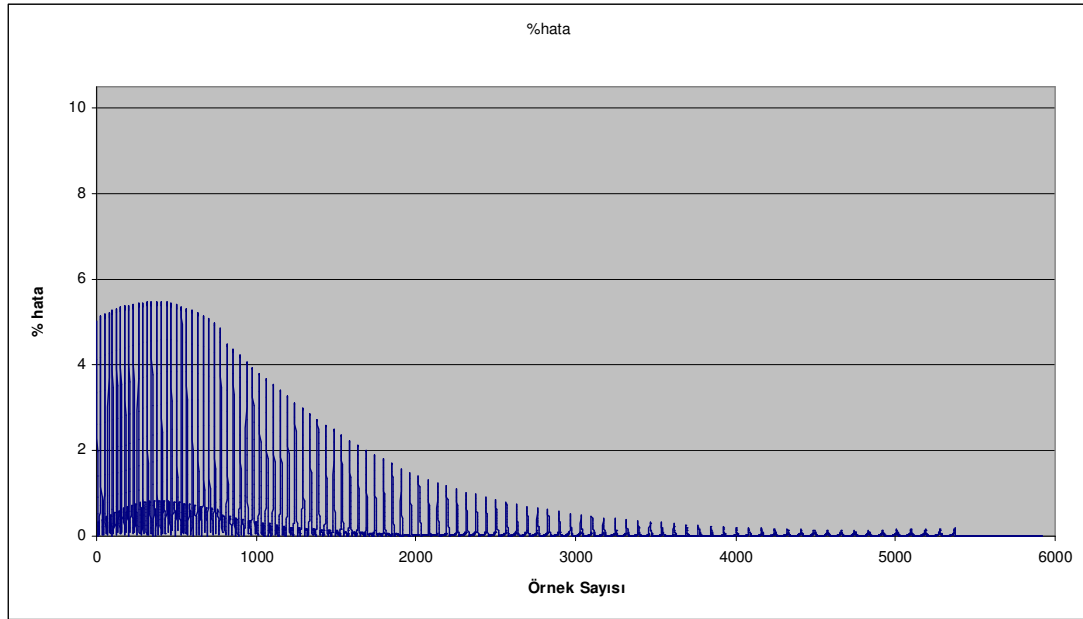
olarak verildiği τ aralıklarında eğri yaklaştırmasının yapacak olduğu en yüksek hatalar gösterilmiştir.

Tablo 3.4: Levha için regresyon sonuçları, parametrelerin tahmini

Parametre	Tahmin
c11	.343
c12	-.080
c13	2.054
c21	-2.797
c22	-.046
c23	2.800
$R^2=0.999903269$	

Tablo 3.5: Fourier sayısı aralıklarında eğri yaklaştırmasının yapacağı en yüksek hatalar (levha)

Aralık	[0-4]	[4-30]	[30-150]	[150-750]
En büyük % hata	5,386	0,872	0,128	0,185
Ortalama % hata	0,417	0,044	0,038	0,114



Şekil 3.4: Levha için yaklaştırılan eğrinin yüzde hatası

3.2 SİLİNDİR İÇİN EĞRİ YAKLAŞTIRMA SONUÇLARI

Silindir için veriler üreten, `Heisler1CylinderValueExtractorV2` MATLAB fonksiyonu kullanılarak 5915 (Bi, τ, θ) üçlüsü üretilmiştir. Üretilen bu örnekleme verisi üzerinden yapılan regresyon sonucunda uygun temsil fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi olmuştur:

$$\theta(1/Bi, \tau) = \left[1 + \frac{c_{11}}{(1/Bi)^{c_{12}} + (Bi * c_{13})} \right] * \exp\left(\left[\frac{c_{21}}{(1/Bi)^{c_{22}} + (Bi * c_{23})} \right] \tau \right) \quad 3.3$$

Bilinmeyen katsayılar ve regresyon analizi, Tablo 3.6 ile verilmiştir. Tablo 3.7 ile Heisler merkez grafiklerinin parçalı olarak verildiği τ aralıklarında eğri yaklaşımının yapacak olduğu en yüksek hatalar gösterilmiştir.

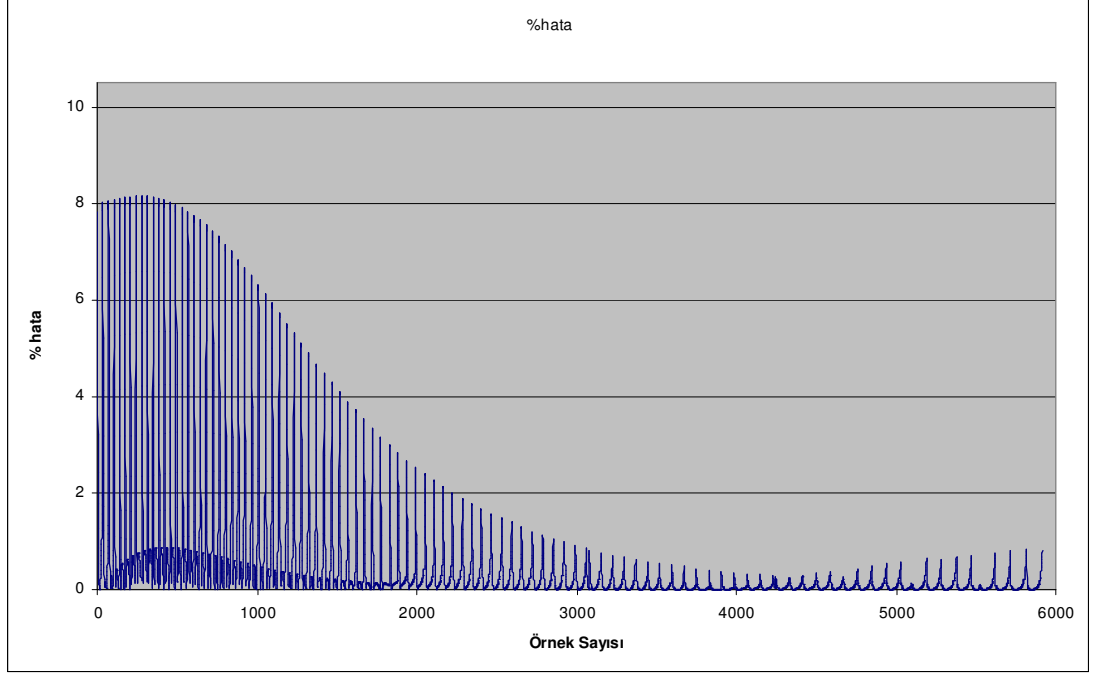
Tablo 3.6: Silindir için regresyon sonuçları, parametrelerin tahmini

Parametre	Tahmin
c11	.988
c12	-.139
c13	3.924
c21	-7.403
c22	-.077
c23	3.708
R ² =0.999814546	

Tablo 3.7: Fourier sayısı aralıklarında eğri yaklaşımının yapacağı en yüksek hatalar (silindir)

Aralık	[0-4]	[4-30]	[30-150]	[150-350]
En büyük % hata	7,984	1,664	0,491	0,648
Ortalama % hata	0,552	0,164	0,191	0,553

Yapılan yüzde hatanın grafiği ise Şekil 3.5 ile verilmiştir.



Şekil 3.5: Silindir için yaklaşılmış eğrinin yüzde hatası

3.3 KÜRE İÇİN EĞRİ YAKLAŞTIRMA SONUÇLARI

Daha önceden geliştirilmiş olan, küre için veriler üreten, Heisler1SphereValueExtractorV2 MATLAB fonksiyonu kullanılarak 5766 (Bi, τ, θ) üçlüsü üretilmiştir. Üretilen bu örnekleme verisi üzerinden yapılan regresyon sonucunda uygun temsil fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi olmuştur:

$$\theta(1/Bi, \tau) = \left[1 + \frac{c_{11}}{(1/Bi)^{c_{12}} + (Bi * c_{13})} \right] * \exp \left(\left[\frac{c_{21}}{(1/Bi)^{c_{22}} + (Bi * c_{23})} \right] \tau \right) \quad 3.4$$

Bilinmeyen katsayılar ve regresyon analizi, Tablo 3.8 ile verilmiştir. Tablo 3.9 ile Heisler merkez grafiklerinin parçalı olarak verildiği τ aralıklarında eğri yaklaştırmasının yapacak olduğu en yüksek hatalar gösterilmiştir.

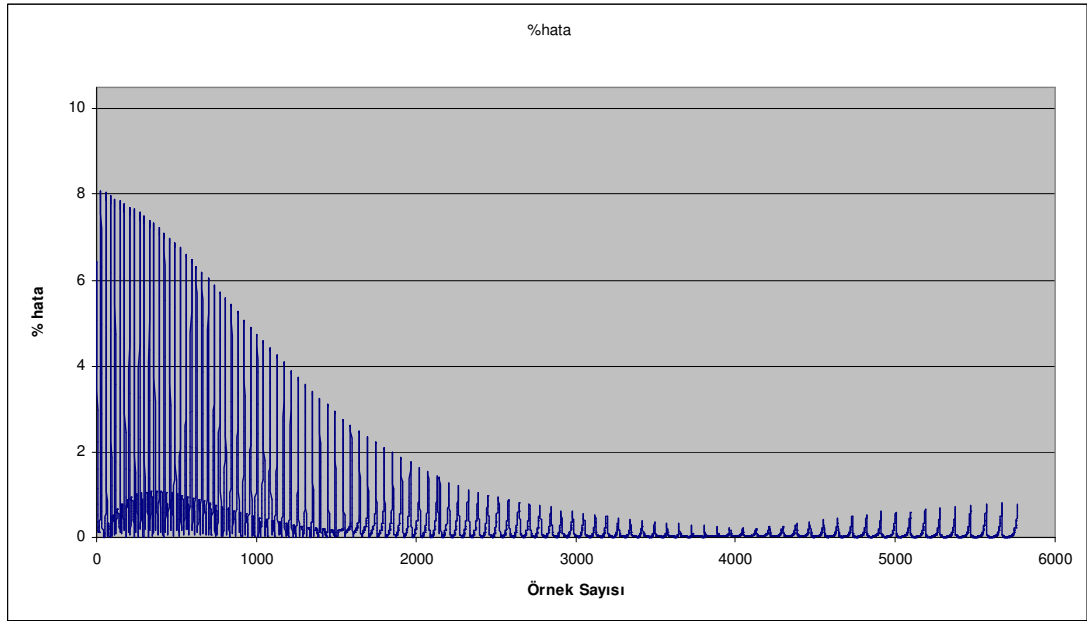
Tablo 3.8: Küre için regresyon sonuçları, parametrelerin tahmini

Parametre	Tahmin
c11	1.990
c12	-.181
c13	6.516
c21	-13.772
c22	-0.099
c23	4.599
$R^2 = 0.999881474$	

Tablo 3.9: Fourier sayısı aralıklarında eğri yaklaşımının yapacağı en yüksek hatalar (küre)

Aralık	[0-3]	[3-10]	[10-50]	[50-250]
En büyük % hata	7.898	1.103	1.043	0.809
Ortalama % hata	0.474	0.187	0.165	0.379

Yapılan yüzde hatanın grafiği ise Şekil 3.6 ile verilmiştir.



Şekil 3.6: Küre için yaklaşılmış eğrinin yüzde hatası

Bulunan tüm eğriler için Web arayüzünde karşılaştırmalı sonuçlar verilmektedir. Böylece kullanıcı Heisler grafiklerini okumayı veya yaklaşılmış eğrileri hesaplamayı tercih ederken ne kadar hata yapmış olduğunu görebilmektedir. Yapılan incelemelerde, çoğu zaman yaklaşılmış olan eğriyi kullanmak, Heisler grafiklerinden daha doğru sonuçlar vermektedir. Kullanım kolaylığı sağlayacak şekilde, her bir geometriye aynı formülle gösterilen eğri yaklaşılabilmektedir.

Geometriden geometriye sadece katsayılar değişmektedir. Toplu sonuçlar ve eğri formülü, Tablo 3.10 ile verilmiştir.

Tablo 3.10: Yaklaşdırılan eğri formülü ve geometrilere göre katsayılar

Formül	$\theta(1/Bi, \tau) = \left[1 + \frac{c_{11}}{(1/Bi)^{c_{12}} + (Bi * c_{13})} \right] * \exp\left(\left[\frac{c_{21}}{(1/Bi)^{c_{22}} + (Bi * c_{23})} \right] \tau \right)$						
Geometri	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	En fazla mutlak % hata
Levha	0.3428	-0.0800	2.0540	-2.7968	-0.0457	2.7996	5.3862
Silindir	0.9880	-0.1394	3.9243	-7.4028	-0.0767	3.7083	7.9839
Küre	1,9907	-0,1813	6,5164	-13,7720	-0,0988	4,5990	7,898

3.4 ALTERNATİF YÖNTEMLE SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

Literatürde Heisler grafiklerine alternatif olması adına seri açılımının ilk terimin hesabına dair formüller ve tablolar verilmektedir. Burada, merkez sıcaklığı için,

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} \approx C_B \exp(-A_B^2 \tau) \quad 3.5$$

formülü kullanılarak sonuçlar üretilmektedir. Bu yaklaşım, $\tau > 0.2$ iken geçerli olmaktadır ve $\tau < 0.2$ iken, oldukça büyük hatalara yol açtığından, kullanımı tavsiye edilmemektedir. Yaklaşdırılmış olan eğri için böyle bir kısıt söz konusu değildir.

Verilen (3.5) denkleminde geçen, A_B ve C_B değerleri için, Biot sayısı ve geometri ile değişen katsayılar verilmektedir. Çengel'in (2003) ders kitabından alınan Tablo 3.11 ile bu katsayılar verilmektedir [9].

Tablo 3.11: A_B ve C_B katsayıları

Bi	Levha		Silindir		Küre	
	A_B	C_B	A_B	C_B	A_B	C_B
0,01	0,0998	1,0017	0,1412	1,0025	0,1730	1,0030
0,02	0,1410	1,0033	0,1995	1,0050	0,2445	1,0060
0,04	0,1987	1,0066	0,2814	1,0099	0,3450	1,0120
0,06	0,2425	1,0098	0,3438	1,0148	0,4217	1,0179
0,08	0,2791	1,0130	0,3960	1,0197	0,4860	1,0239
0,1	0,3111	1,0161	0,4417	1,0246	0,5423	1,0298
0,2	0,4328	1,0311	0,6170	1,0483	0,7593	1,0592
0,3	0,5218	1,0450	0,7465	1,0712	0,9208	1,0880
0,4	0,5932	1,0580	0,8516	1,0931	1,0528	1,1164
0,5	0,6533	1,0701	0,9408	1,1143	1,1656	1,1441
0,65	0,7051	1,0814	1,0184	1,1345	1,2644	1,1713
0,7	0,7506	1,0918	1,0873	1,1539	1,3525	1,1978
0,8	0,7910	1,1016	1,1490	1,1724	1,4320	1,2236
0,9	0,8274	1,1107	1,2048	1,1902	1,5044	1,2488
1	0,8603	1,1191	1,2558	1,2071	1,5708	1,2732
2	1,0769	1,1785	1,5995	1,3384	2,0288	1,4793
3	1,1925	1,2102	1,7887	1,4191	2,2889	1,6227
4	1,2646	1,2287	1,9081	1,4698	2,4556	1,7202
...
100	1,5552	1,2731	2,3809	1,6015	3,1102	1,9990

Tabloya dâhil edilmeyen Bi sayıları için, tablodan veriler okunurken interpolasyon yapılmaktadır. Böylece alternatif yöntemi kullanırken yapılan hata artmaktadır. Yaklaştırılmış olan eğriyi kullanmakta ise benzer hatayı arttırıcı durumlar söz konusu olmamaktadır.

Verilen denklem ve tablo verileri kullanılarak üretilen sonuçlar ve eğri yaklaştırmanın sonuçları, MATLAB programının yüksek hassasiyetli sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalara, yaklaştırılan eğrilerden elde edilen değerler de eklenmiştir. Sonuçlar Tablo 3.12 ile gösterilmektedir.

Tablo 3.12: Seri açılımın birinci terimini hesaplayan eşitliklerle, yaklaşırlan eğri sonuçlarının karşılaştırılması

τ	Bi	Geometri	θ			% Mutlak Hata	
			MATLAB ^(a)	Regresyon	1. Terim	Regresyon	1. Terim
0,20	0,01	levha	0,9994	0,9997	0,9997	0,0283	0,0320
		silindir	0,9983	0,9985	0,9985	0,0202	0,0185
		küre	0,9969	0,9967	0,9970	0,0223	0,0084
10,00	0,65	levha	0,0054	0,0055	0,0075	1,4555	39,1922
		silindir	0,00002	0,0000	0,0000	0,87751	106,59532
		küre	0,00000004	0,00000004	0,00000013	1,5249	216,9424
1,00	3,00	levha	0,2920	0,2915	0,2919	0,1630	0,0120
		silindir	0,05789	0,0579	0,0579	0,00467	0,01496
		küre	0,00860751	0,00875480	0,00860879	1,7111	0,0148

^(a) ilk 10 terim hesaba dahil edilmiştir.

Görüldüğü üzere, eğri yaklaşırma sonuçları çoğu zaman seri açılımın birinci terimi için verilen eşitlikleri geçmektedir.

4 HESAPLAMALARIN SUNULMASI İÇİN WEB ARAYÜZÜ

Karmaşık hesaplarından dolayı, ısı aktarımı problemlerinin çözümünde öğrenciler güçlük çekmektedir. Bu güçlüklerin aşılabilmesi için, kullanımı ve ulaşılması kolay bir kaynak sunmak amaç edilmiştir. Söz konusu amacı güden başka bir çalışma, Zheng ve Keith tarafından yapılmıştır [10]. JAVA Applet [11] teknolojisi kullanılarak geliştirilen çalışmada, üç temel geometri için ısı aktarımı probleminin bir simülasyonu yapılmaktadır. Aynı çalışmada, Heisler grafikleri için okuma yapılabilecek bir arayüz de sunulmuştur. Fakat homojen olmayan ilk sıcaklık dağılımı koşulları için bir çözüm verilmemektedir.

Kullanımı arttırmak ve kolaylaştırmak için yapılan hesaplamaların sunulduğu bir web arayüzü geliştirilmiştir. Apache Httpd web sunucusu [12] üzerinde yapılan geliştirmeler ile, Matlab Web Server [13] çalıştırılmakta, ayrıca dinamik web içeriği oluşturulmasında PHP [14] kullanılmaktadır. Apache üzerinde MatlabServer kullanabilmek için yapılması gereken uyarlamalar, The MathWorks tarafından tarif edilmektedir [15].

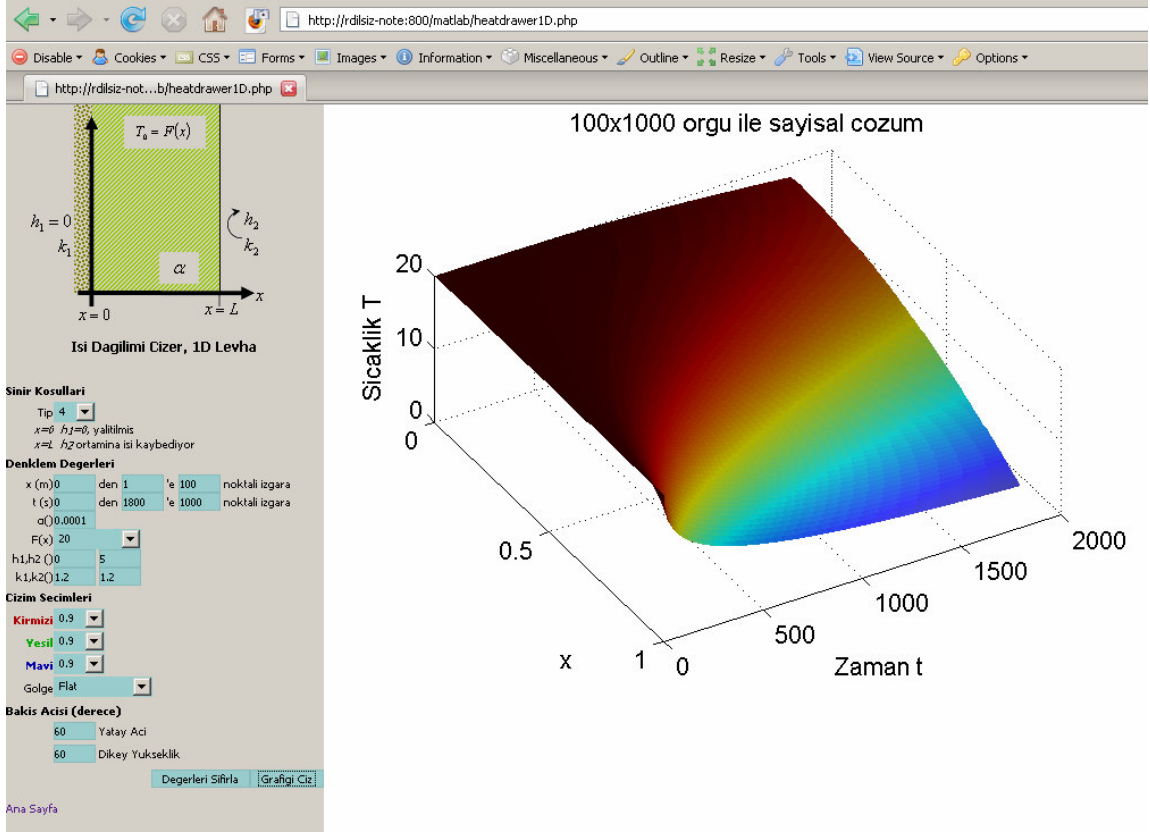
Mühendislik öğrencilerinin ve akademisyenlerin kullanımına sunulması planlanan Web arayüzünün giriş sayfası, Şekil 4.1 ile verilmiştir.



Şekil 4.1: Geliştirilen web bileşenlerinin listelendiği ana sayfa

4.1 SICAKLIK DAĞILIMI GEÇMİŞİ GRAFİĞİ

Kullanıcıya ısı aktarımı probleminde zamana bağlı olarak sıcaklığın değişimini daha iyi kavratmak için geliştirilmiş olan bir arayüzdür. Zamanın geçmesi ile birlikte, tek boyutlu levha üzerinde sıcaklığın nasıl dağılacağını göstermektedir. Isı aktarımı problemi, arayüzün sol tarafında tanımlanmakta ve grafik sağ tarafta çizdirilmektedir. Arayüzün tanımı ve örnek bir grafik Şekil 4.2 ile verilmiştir.



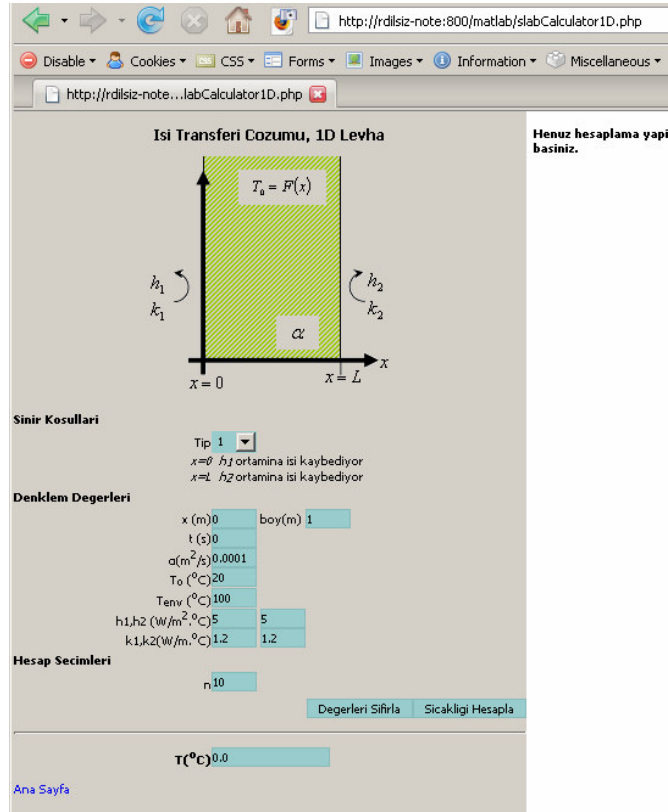
Şekil 4.2: Zaman ile sıcaklık dağılımının değişimini gösteren arayüzün kullanımı

Kullanıcıya gösterilen grafiğin hem küçük çözünürlükte hem de büyük çözünürlükte iki versiyonu oluşturulmaktadır. Kullanıcı düşük çözünürlükteki grafiği gördükten sonra, büyük çözünürlükteki grafiği, üzerine tıklayarak açabilmektedir.

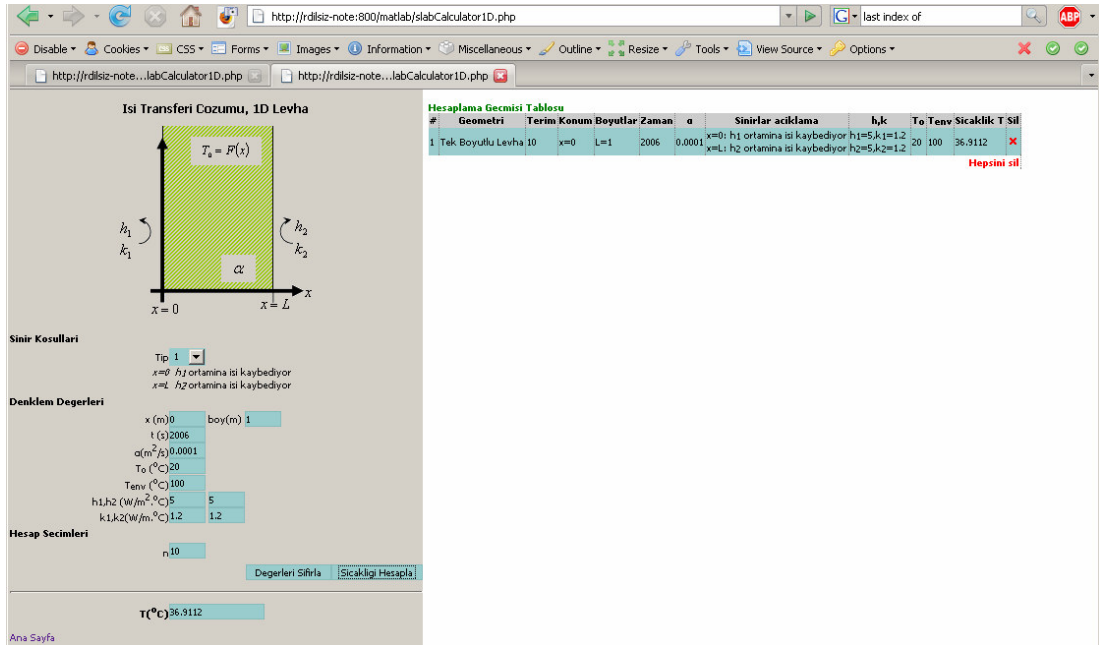
4.2 LEVHA İÇİN WEB ARAYÜZÜ ÇÖZÜMLERİ

4.2.1 Tek Boyutlu Levha İçin Web Arayüzü Çözümleri

Tek boyutlu levha için problem çözümlerin yapılabileceği, öğrencilerin kolaylıkla kullanabileceği web arayüzü Şekil 4.3 ile gösterildiği gibi tasarlanmıştır.



Şekil 4.3: Web arayüzünden tek boyutlu levha hesabı, veri girişi ekranı



Şekil 4.4: Web arayüzünde tek boyutlu levha hesabı sonuçları

Yapılan hesaplar ise, Şekil 4.4 de görüldüğü üzere, web arayüzünün sağ bölümünde gösterilmektedir. Böylece kullanıcı, daha önce yaptığı hesapları not almadan, karşılaştırmalı veriler elde edebilecektir. Örneğin hesaplanan terim sayısını veya sınır

koşullarını değiştirerek istenilen noktadaki sıcaklığa nasıl etkilediğini kolaylıkla görebilecektir.

Ek-B'de yer verilmiş olan örnek soru 6 şöyledir:

Kalınlığı $2L = 0.4m$ ve özellikleri $k = 1.2W/m^{\circ}C$, $C_p = 1kJ/kg^{\circ}C$ ve $\rho = 2000kg/m^3$ olan bir beton duvar, homojen sıcaklığı $T_0 = 20^{\circ}C$ iken $T_{\infty} = 0^{\circ}C$ sıcaklığında bir ortama bırakılıyor. Bu temastan 5 saat ve 50 saat sonra duvar ortasında ve yüzeydeki sıcaklığı analitik olarak hesap ediniz. Ortam taşınım katsayısı $h = 6W/m^2^{\circ}C$ olarak verilmektedir.

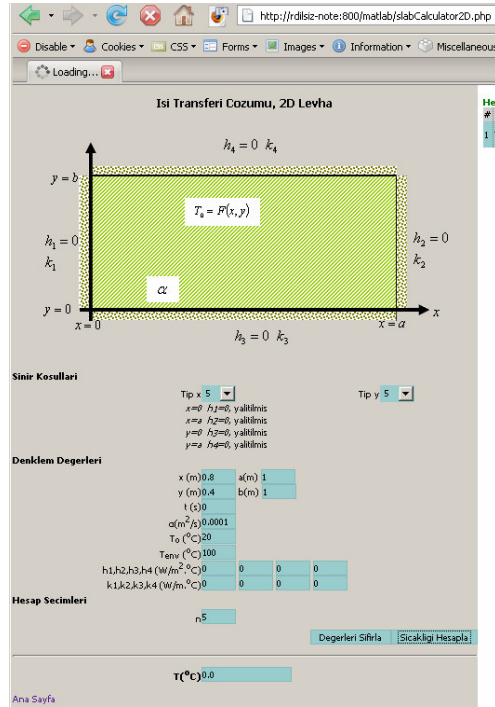
Tablo 4.1: Örnek soru 6 için, kaynak ile web arayüzü sonuçlarının karşılaştırılması

	MATLAB	S. Kakaç	% hata
$T_w, t = 5sa$	11.85	12.08	1.94
$T_c, t = 5sa$	18.20	18.12	0.43
$T_c, t = 50sa$	3.03	2.84	6.27
$T_w, t = 50sa$	1.979	1.873	5.35

Web arayüzü kullanılarak, 10. terim hassasiyetinde, hesaplar yapıldığında, kaynaktaki sonuçların %6'lara varan hatalar yaptığı görülmektedir. Benzer soru çözümlerinin örnekleri, Ek-B bölümünde verilmiştir.

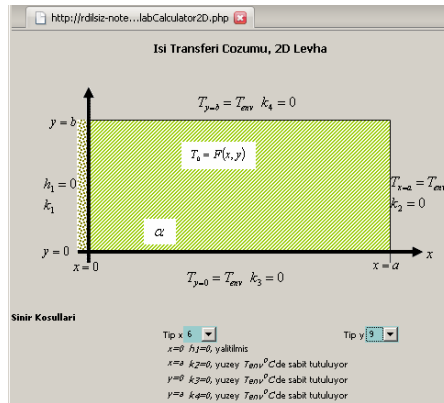
4.2.2 İki Boyutlu Levha İçin Web Arayüzü Çözümleri

İki boyutlu levha için problem çözümlerinin yapılabileceği, öğrencilerin kolaylıkla kullanabileceği web arayüzü Şekil 4.5 ile gösterildiği gibi tasarlanmıştır.

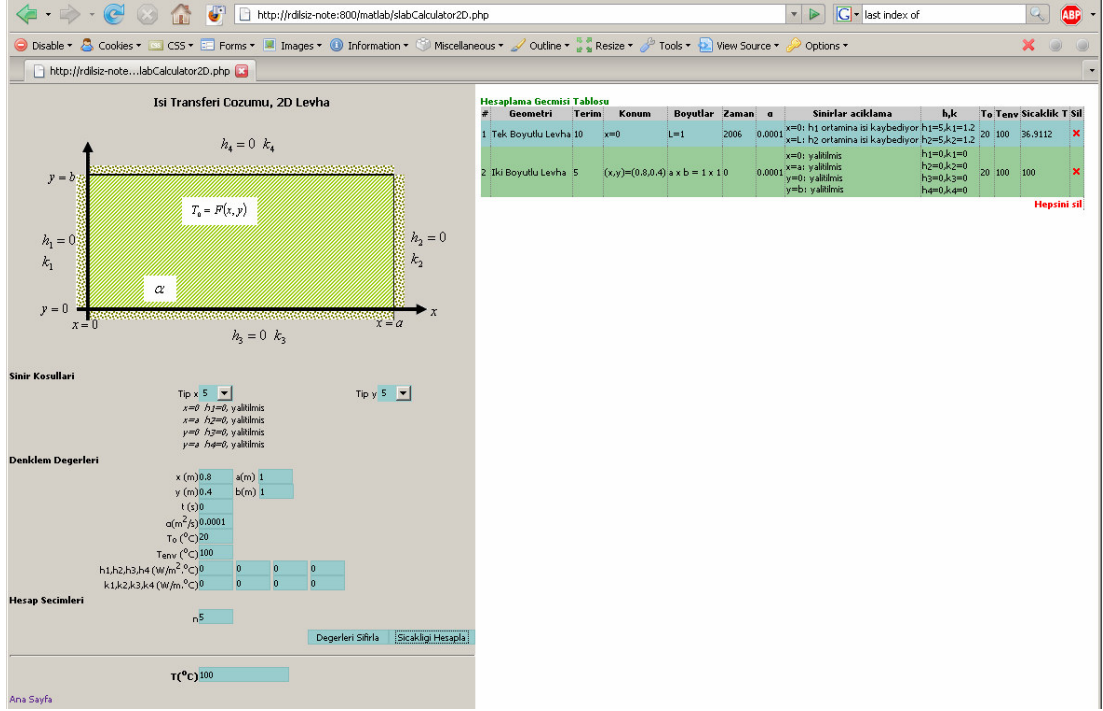


Şekil 4.5: Web arayüzünden iki boyutlu levha hesabı, veri girişi ekranı

Anlaşılabilirliği arttırmak için, farklı bir sınır koşulu seçildiğinde, temsil resim de güncellenmektedir. Şekil 4.6 ile gösterildiği gibi, kullanıcı, sınır koşullarını hem doğru şekilde seçebilecek, hem de soruyu daha iyi kavrayabilecektir.



Şekil 4.6: İki boyutlu levha hesabı arayüzünde, sınır koşullarının değiştirilmesi

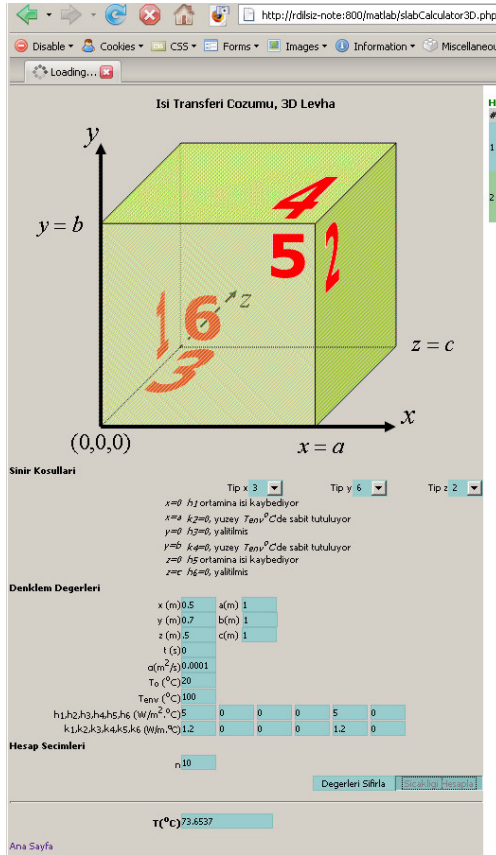


Şekil 4.7: Web arayüzünde iki boyutlu levha hesabı sonuçları

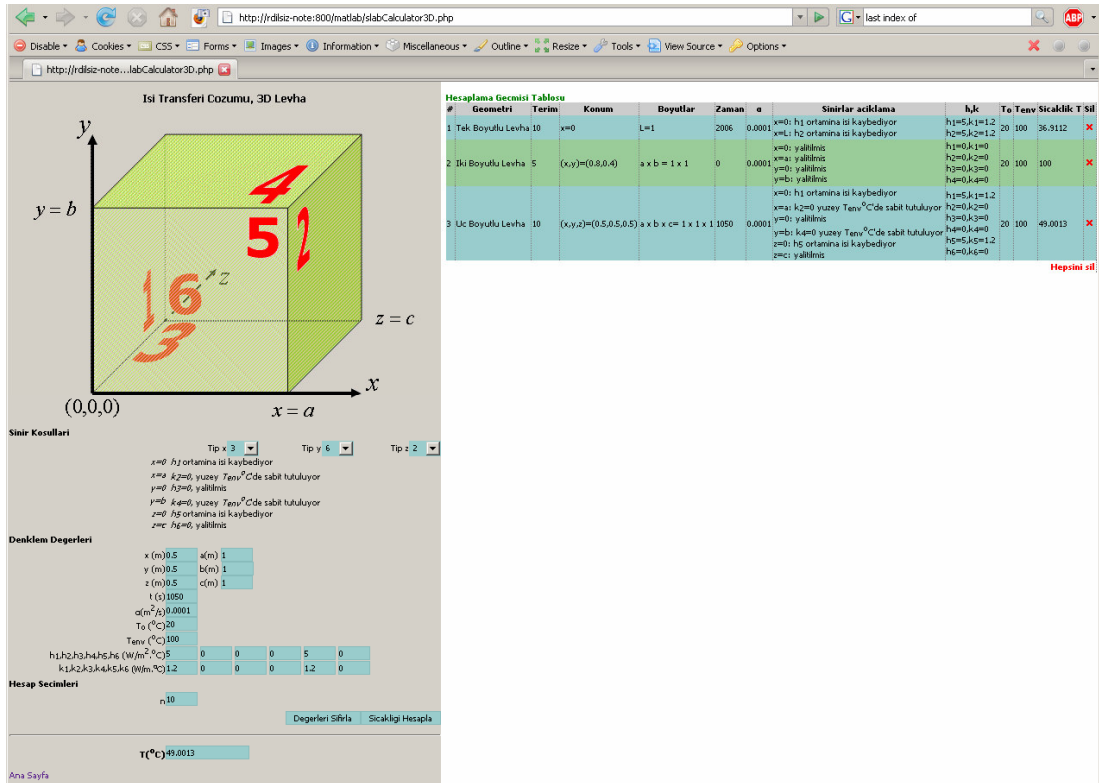
Yapılan hesabın sonucu, Şekil 4.7 ile verilmiştir. Web arayüzünün sağ bölümünde görüldüğü üzere, diğer geometrilerde olduğu gibi, yapılmış hesaplamalar listelenmektedir.

4.2.3 Üç Boyutlu Levha İçin Web Arayüzü Çözümleri

Üç boyutlu levha için problem çözümlerinin yapılabileceği web arayüzü Şekil 4.8 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.8: Web arayüzünden üç boyutlu levha hesabı, veri giriş ekranı

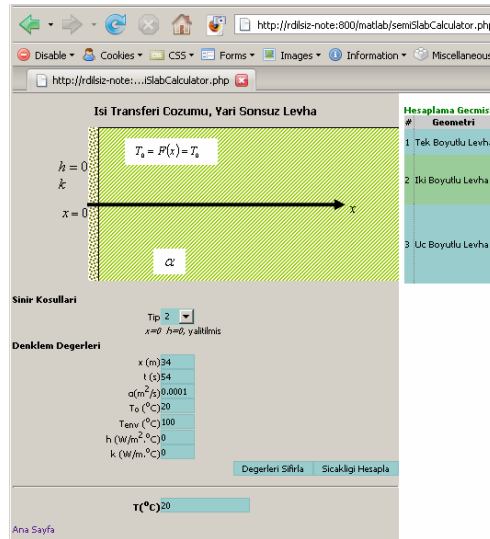


Şekil 4.9: Web arayüzünde üç boyutlu levha hesabı sonuçları

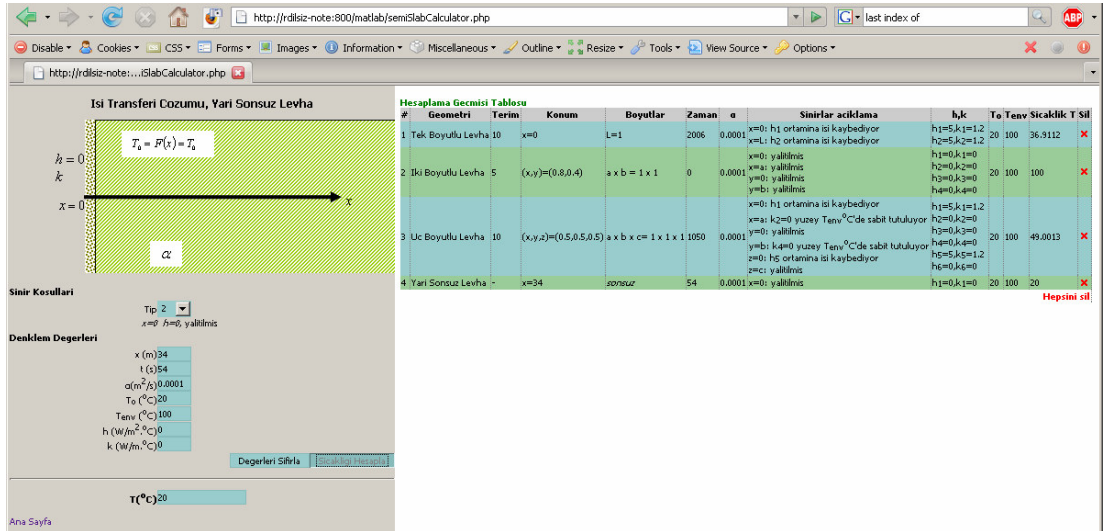
Yapılan hesabın sonucu, Şekil 4.9 ile verilmiştir. Web arayüzünün sağ bölümünde görüldüğü üzere, diğer geometrilere olduğu gibi, yapılmış hesaplamalar listelenmektedir.

4.3 YARI SONSUZ LEVHA İÇİN WEB ARAYÜZÜ ÇÖZÜMLERİ

Yarı-sonsuz levha için problem çözümlerinin yapılabileceği web arayüzü Şekil 4.10 ile gösterilmiştir. Dikkat edilmelidir ki, istenilenler arasında, diğer geometrilere olduğu gibi, n terim sayısı bulunmamaktadır. Çünkü sadece bu geometri için, değişkenlere ayırma ve sonrasında seriye açılım yapılmadan, analitik çözüm bulunmaktadır.



Şekil 4.10: Web arayüzünden yarı-sonsuz levha hesabı, veri giriş ekranı



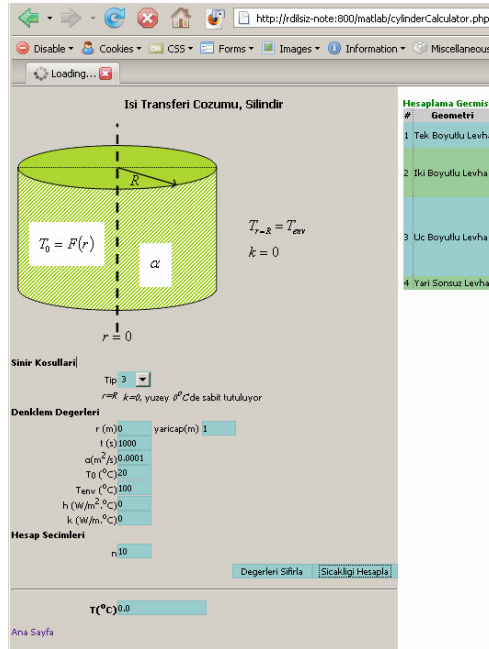
Şekil 4.11: Web arayüzünden yarı-sonsuz levha hesabı sonuçları

Yapılan hesabın sonucu, Şekil 4.11 ile verilmiştir. Web arayüzünün sağ bölümünde yapılmış hesaplamalar alt alta listelenmektedir.

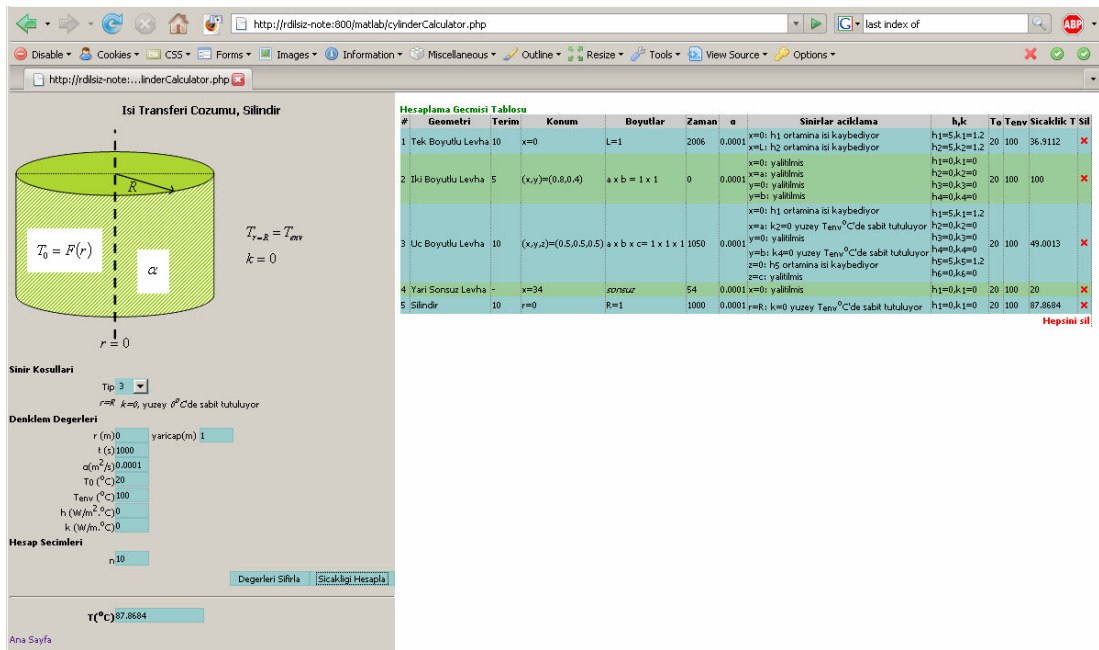
Yarı sonsuz levha için literatür ile karşılaştırılmalı olarak çözülmüş bir örnek, Ek-B'de soru 2 olarak verilmiştir.

4.4 SİLİNDİR İÇİN WEB ARAYÜZÜ ÇÖZÜMLERİ

Silindir problem çözümlerinin kolayca yapılabileceği web arayüzü Şekil 4.12 ile gösterilmiştir. İçi dolu silindirde bulunan tek sınır, silindirin dış yüzeyi olmaktadır. Bu cidarın üç farklı sınır koşulu için soru verilerinin girişi yapıldıktan sonra istenilen hassasiyetle silindirin içindeki sıcaklık hesaplanabilmektedir.

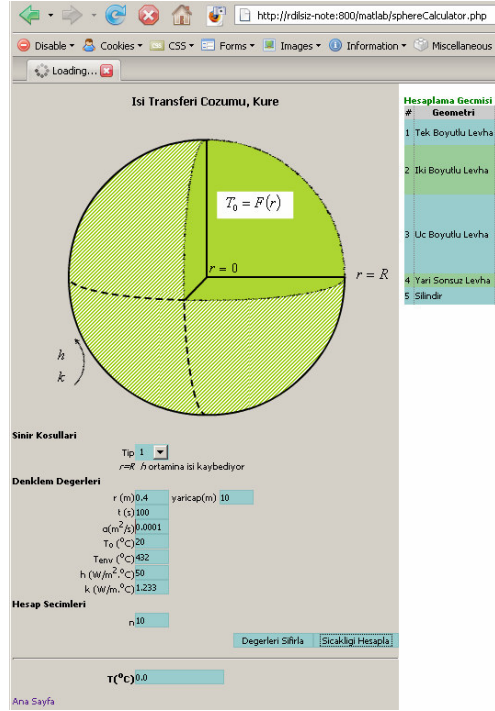


Şekil 4.12: Web arayüzünden silindirik hesaplama, veri giriş ekranı

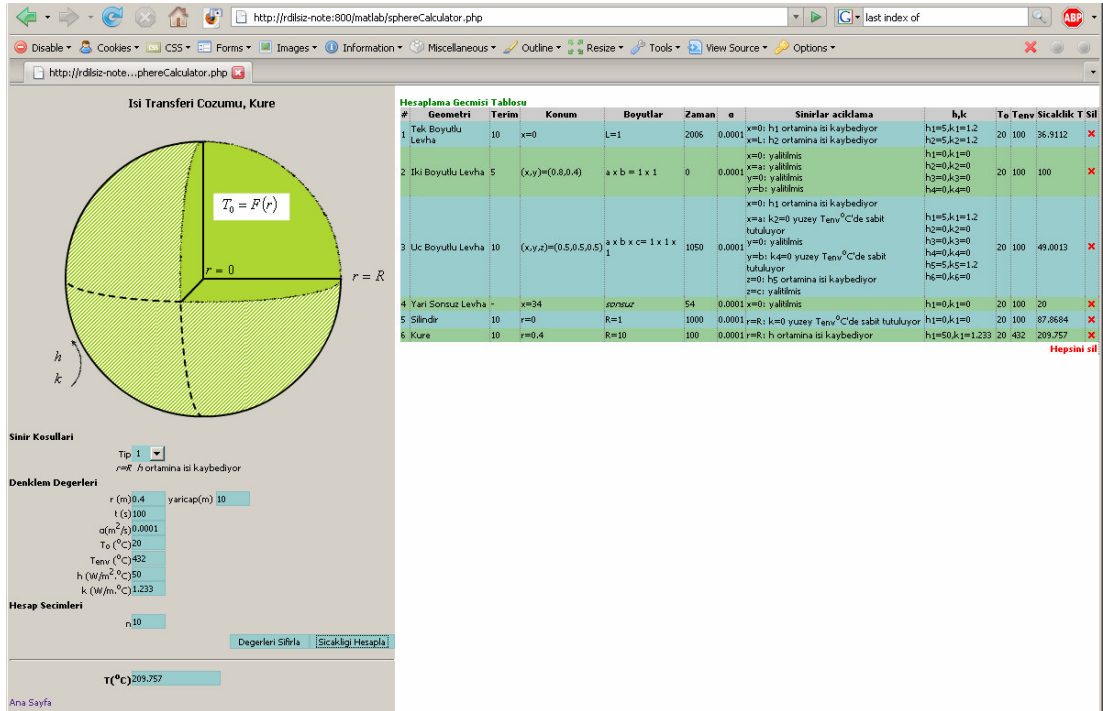


4.5 KÜRE İÇİN WEB ARAYÜZÜ ÇÖZÜMLERİ

Küre için problem çözümlerinin kolayca yapılabileceği web arayüzü Şekil 4.14 ile gösterilmiştir. İçi dolu kürede bulunan tek sınır, kürenin yüzeyidir. Bu yüzey için geçerli olan üç farklı sınır koşuluna göre, soru verilerinin girişi yapıldıktan sonra istenilen hassasiyetle kürenin içinde herhangi bir noktadaki sıcaklık hesaplanabilmektedir.



Şekil 4.14: Web arayüzünden küre hesabı, veri giriş ekranı



Şekil 4.15: Web arayüzünden küre hesabı sonuçları

Hesapların verildiği listeye, küre için yapılan hesap eklenmiş ve Şekil 4.15 ile gösterildiği üzere, web arayüzünün sağında alt alta bütün sonuçlar listelenmiştir. İlgili olmayan sonuçlar, her bir satırın sağında bulunan kırmızı “X” şeklinde verilen silme düğmesi ile silinebilir. İstenirse “Hepsini Sil” düğmesi ile yeni bir oturuma başlanarak hesaplar yapılabilir.

Silindir için literatür ile karşılaştırılmalı olarak çözülmüş bir örnek, Ek-B’de soru 4 olarak verilmiştir.

4.6 HEİSLER GRAFİKLERİNDEN VERİ OKUMA

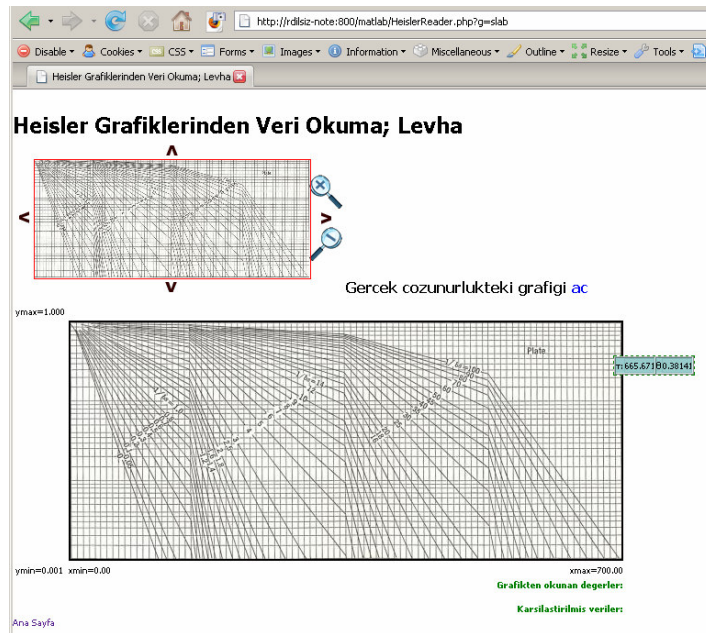
Heisler grafiklerinin bahsedilen okuma zorluklarını aşabilmek, daha yüksek hassasiyetle veri okuyabilmek için de bir web arayüzü tasarlanmıştır. Bu arayüz oluşturulurken, üç temel geometri için hazırlanmış, Heisler’in merkez sıcaklık grafikleri kullanılmıştır. Söz konusu grafikler, yüksek çözünürlükle, mümkün olan en net kaynaktan elektronik ortama aktarılmıştır. Bu grafiklere yaklaşıp daha hassas gösterebilecek bir Web sayfası geliştirilmiştir. İlgilenilen alanı yaklaştırarak göstermekle kalınmayarak, grafiklerin veri aralıkları da sisteme yüklenmiş ve böylece okuma işi de elektronik ortama taşınmıştır. Böylece kullanıcının grafiğe istediği kadar yaklaşabileceği, ihtiyacı olan $1/Bi$ değeri için bilgisayarının faresi ile

grafikte tıklama yaparak yüksek hassasiyetle θ okuyabileceği arayüz hazırlanmıştır. Bu arayüz kullanılarak okunan değerler için, $n = 10$ terime kadar yapılan hesapların karşılaştırılmasını yapabilecek ek geliştirmeler yapılmıştır. Söz konusu geliştirmeler ile okuma ne kadar hassas olsa da, grafik verilerinin hatalı olmasından kaynaklanan hataların bulunacağına altı çizilebilmiştir. Okunan ve hesaplanan değerler arasındaki hatalar yüzde olarak sonuçlar tablosunda verilmiştir.

Aynı arayüz üzerinde, daha önce bahsedilmiş olan eğri yaklaşırma çalışmasının sonuçları entegre edilmiştir. Arayüzden veri okunurken kullanıcıya, ilgili τ ve $1/Bi$ için yaklaşırılan eğride hangi değerin hesaplanacağı verilmektedir. Böylece kullanıcı Heisler grafiği ve eğri yaklaşırma sonuçlarının çabuk bir karşılaştırmasını yapabilecektir. Aynı zamanda, bu iki değer, MATLAB sonuçları ile karşılaştırılmakta, yüzde bağıl hataları verilmektedir. Kullanıcı hangi yöntemle ne kadar hata yapıyor olacağını daha kolay bir şekilde görebilecektir.

4.6.1 Heisler Merkez Sıcaklığı Levha Grafiği

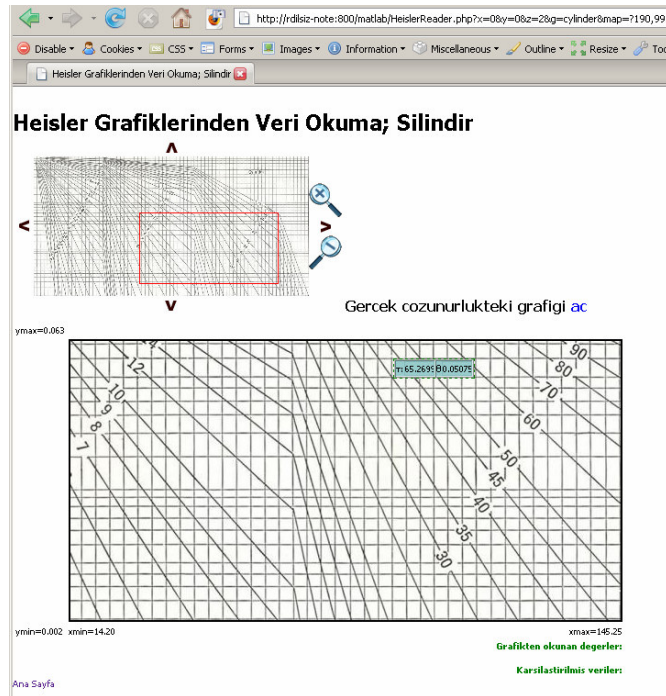
Levha için verilen merkez sıcaklığı grafiği, elektronik ortama aktarılmış, ve x yönünde bulunan kırıklı aralıkların değerleri sisteme yüklenmiştir. Böylece Şekil 4.16 ile verilen arayüzden okuma yapılırken, istenilen τ Fourier sayısı için veri okumak mümkün olmaktadır.



Şekil 4.16: Web arayüzünden levha için Heisler grafiğinin hassasiyetle okunması

4.6.2 Heisler Merkez Sıcaklığı Silindir Grafiği

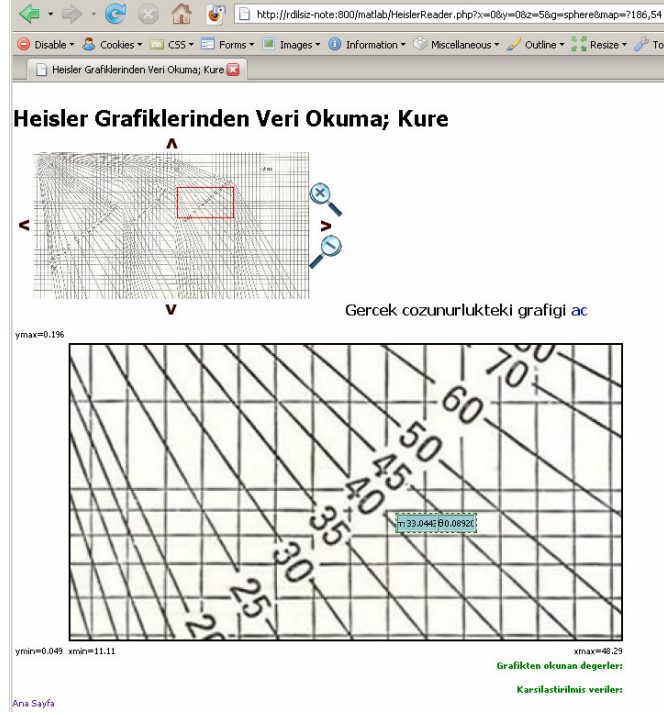
Silindir için verilen merkez sıcaklığı grafiği, elektronik ortama aktarılmış, ve x yönünde bulunan kırıklı aralıkların değerleri sisteme yüklenmiştir. Böylece Şekil 4.17 ile verilen arayüzden okuma yapılırken, istenilen τ Fourier sayısı için veri okumak mümkün olmaktadır. Ayrıca arayüzdeki büyüteç işareti kullanılarak istenildiği kadar grafiğe yaklaşılabilmektedir. Fare ile yaklaştırılmış grafik üzerinde gezilirken, y yönünde logaritmik ve x yönünde kırıklı bir ölçekle verilen grafik üzerinde, o anda hangi (τ, θ) koordinatta bulunulduğu verilmektedir. Bu kullanıcıya yüksek bir hassasiyetle ve çabuk bir okuma sağlamaktadır.



Şekil 4.17: Web arayüzünden silindir için Heisler grafiğinin hassasiyetle okunması

4.6.3 Heisler Merkez Sıcaklığı Küre Grafiği

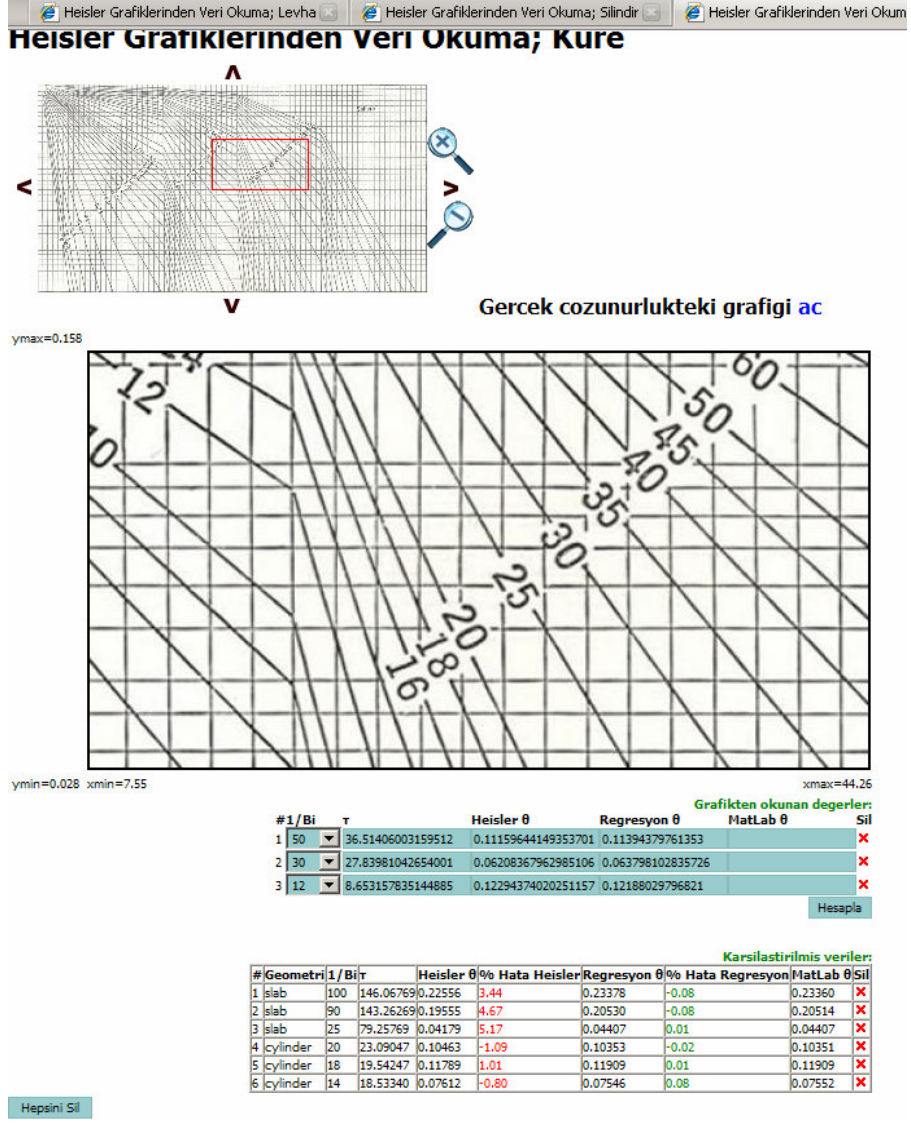
Küre için verilen merkez sıcaklığı grafiği, elektronik ortama aktarılmıştır. Şekil 4.18 ile ilgili grafiğe yaklaşılarak veri okumak gösterilmektedir.



Şekil 4.18: Web arayüzünden küre için Heisler grafiğinin hassasiyetle okunması

4.6.4 Okunan Değerlerin Karşılaştırılması

Farklı geometriler için yapılan yüksek hassasiyetli okumaların her biri, sitede saklanmakta ve bir liste halinde kullanıcıya sunulmaktadır. Bu liste istenildiği takdirde, “Hesapla” düğmesi kullanılarak, MATLAB çözümleri ile karşılaştırılabilmektedir. Karşılaştırma tablosunda, MATLAB sonuçlarının yanında, yüzde hataya da yer verilmektedir.



Şekil 4.19: Web arayüzünden okunan değerlerin hesaplamalarla karşılaştırılması

Tablo 4.2: Web arayüzünden okunan değerlerin hesaplamalarla karşılaştırılması

#	Geometri	1/Bi	T	Heisler θ	% Hata Heisler	Regresyon θ	% Hata Regresyon	MatLab θ	Sil
1	slab	100	146.06769	0.22556	3.44	0.23378	-0.08	0.23360	×
2	slab	90	143.26269	0.19555	4.67	0.20530	-0.08	0.20514	×
3	slab	25	79.25769	0.04179	5.17	0.04407	0.01	0.04407	×
4	cylinder	20	23.09047	0.10463	-1.09	0.10353	-0.02	0.10351	×
5	cylinder	18	19.54247	0.11789	1.01	0.11909	0.01	0.11909	×
6	cylinder	14	18.53340	0.07612	-0.80	0.07546	0.08	0.07552	×
7	sphere	50	36.51406	0.11160	1.66	0.11394	-0.41	0.11348	×
8	sphere	30	27.83981	0.06208	2.34	0.06380	-0.35	0.06357	×
9	sphere	12	8.65316	0.12294	-0.70	0.12188	0.17	0.12209	×

Farklı geometriler için yapılan okumaların bir listesi ve bu değerlerin MATLAB sonuçları Tablo 4.2 ve Şekil 4.19 ile verilmiştir. Tablo verilerine bakıldığında, Heisler grafiklerinden okumada yaklaşık %5'lere varan hatalar görülmektedir. Yaklaştırılan eğrinin sonuçları ise Heisler grafiklerinden daha başarılı olmaktadır.

5 SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Zamana bağlı ısı aktarımı probleminin çözümü için sunulan Heisler grafiklerinden okuma yönteminde hataya açık noktalar bulunmaktadır. Bunları ortadan kaldırmak için zamana bağlı ısı aktarımı probleminin çözümü için geçerli olan çözüm tekniklerinden, değişkenlere ayırma yöntemi seçilmiş ve analitik çözüme ulaşılmıştır. Söz konusu yöntem kullanılarak ısı aktarımı probleminin çözümünü yapan fonksiyonların sayısal analiz programında gerçekleşmesi sağlanmıştır. Fonksiyonlar literatürde verilmeyen, homojen sıcaklık dağılımı olmayan başlangıç koşullarında da çözüm yapabilecek şekilde elde edilmiştir.

Literatürde analitik çözümün zorluğunu ve Heisler grafiklerinin yaklaşıtlımını iyileştirmek için yapılan çalışmalar incelenip, bu çalışmada üretilen fonksiyonlarla karşılaştırmalı sonuçlar verilmiştir.

Hesabı kolay bir temsil fonksiyonu araştırılmış ve Biot ve Fourier sayılarını parametre olarak boyutsuz sıcaklığı veren bir fonksiyon bulunmuştur. Her bir geometri için aynı fonksiyon, farklı katsayılar ile hesaplanabilmektedir. Katsayılar lineer olmayan regresyon yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Regresyonu yapılan veri ise, her bir geometri için yaklaşık 6000 adet $1/Bi$ τ ve θ üçlüsüdür. Bu veriler MATLAB'da geliştirilen fonksiyonları kullanarak, seriye açılımın ilk on terimini hesaba dâhil ederek yüksek hassasiyetle hesaplanmış verilerdir. Regresyon sonuçlarında yüksek korelasyon gözlenmiş, her bir geometri için, $R^2 > 0.9998$ ile yaklaşıtlım yapılmıştır.

Ek-B bölümünde verilmiş olan literatürden örnek soru çözümlerinde, seri açılımın ilk on terimini dikkate alan MATLAB sonuçlarını doğru kabul ederek yaklaşıtlırılan eğrinin sonuçları kaynakların sonuçları ile karşılaştıtlırılmıştır. Bu karşılaştıtlırmaların özet olarak sonucu Tablo 5.1 ile verilmektedir. İlgili tabloda, yaklaşıtlırılan eğrinin, gerçek değerlere yaklaşmakta daha başarılı olduğu görülmektedir.

Tablo 5.1: Örnek Soru çözümlerinde yaklaştırılan eğrinin doğruluğu

Örnek Soru	Geometri	τ	1/Bi	MATLAB θ	Eğri θ	Eğri % Mutlak Hata	Kaynak θ	Kaynak % Mutlak Hata
#4 ^(a)	küre	0.2	2.01	0.86	0.853	0.77	0.85	1.16
#6, 5 saat ^(b)	levha	0.3	1	0.91	0.912	0.193	0.906	0.443
#6, 50 saat ^(b)	levha	2.7	1	0.152	0.152	0.488	0.142	6.454
#7 ^(c)	levha	5.2	5.13	0.402	0.402	0.041	0.4	0.423

^(a) sorunun çözümü sayfa 73, Tablo B.4 ile verilmiştir.

^(b) sorunun çözümü sayfa 75, Tablo B.6 ile verilmiştir.

^(c) sorunun çözümü sayfa 77, Tablo B.8 ile verilmiştir.

Bu çalışmaların sonuçları web arayüzü ile kullanıcıya sunulurken, kullanımı yaygınlaştırılmış ve kolaylaştırılmıştır.

Heisler grafikleri yüksek hassasiyetle tekrar üretilmiştir. Üretilmiş olan bu grafikler, logaritmik ölçekleri ile, Heisler grafiklerinin verilmiş olduğu Biot ve Fourier sayıları için çizilmiş ve Ek-E’de verilmiştir.

Heisler grafiklerinin de çözümlerde kullanılabilmesi için bu grafiklerden milimetrik okuma yapacak bir arayüz geliştirilmiş, grafikten okunan verilerin çalışma sonucu verileri ile karşılaştırılması yapılmıştır. Yapılan karşılaştırmalarda, grafiklerin en yüksek hassasiyetle okunabilmesi durumunda bile %5’lere varan hatalar yapılabildiği bulunmuştur. Aynı Web sayfasında, temsil fonksiyonunun çıktıları ile bir karşılaştırmaya yer verilmiş, çoğu zaman temsil fonksiyonunun Heisler grafiklerinden daha hassas sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Sonuç olarak zamana bağlı ısı aktarımı probleminin çözümü bir hesap tablosu programı ile elde edilebilecek hale getirilmiş ve literatür ile yapılan karşılaştırmalarda uygun sonuçlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **Heisler, M. P.** 1947. Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating, *Transactions of American Society of Mechanical Engineers*, **69**, 227-236.
- [2] **Gröber, H., Erk, S. ve Grigull, U.** 1961 Fundamentals of Heat Transfer, McGraw-Hill, New York.
- [3] **Grigull, U. ve Sandner, H.** 1984 Heat Conduction, Hemisphere, Washington DC.
- [4] **Wiggins, Edwin G.** 1987 Electronic Heisler Charts, *Computers in Education Division of ASEE*, **7**, 45-49.
- [5] **Wiggins, Edwin G.** 1988 Better Electronic Heisler Charts, *Computers in Education Division of ASEE*, **8**, 76-78.
- [6] **Campo, A.** 1997 Rapid Determination of Spatio-Temporal Temperatures and Heat Transfer In Simple Bodies Cooled by Convection: Usage of Calculators in Lieu of Heisler-Gröber Charts, *International Community of Heat and Mass Transfer*, **24**, 553-564.
- [7] **The Mathworks Inc**, 2004 MATLAB. Massachusetts.
- [9] **Çengel, Y. A.** 2003 Heat transfer : a practical approach 2nd edition, McGraw-Hill, Boston.
- [8] **SPSS Inc**, 2006 SPSS 15.0 for Windows. Chicago.
- [10] **Zheng, H ve Keith, J.M.** 2004 JAVA-Based Heat Transfer Visualization Tools, *Chemical Engineering Education*, **38**, 282-285.
- [11] **The Sun Microsystems**, 1994 Java Applet. Santa Clara.
- [12] **The Apache Software Foundation**, 2007 The Apache HTTP Server Project. Forest Hill.
- [13] **The Mathworks Inc**, 2001 MATLAB Web Server. Massachusetts.
- [14] **Zend Technologies / The PHP Group**, 2004 PHP 5. Ramat Gan.
- [15] **The Mathworks Inc**, 2001 MATLAB Web Server For Use With MATLAB, Massachusetts.
- [16] **Lienhard IV, J. H ve Lienhard V, J. H.**, 2006 A Transfer Heat Book Third Edition, Phlogiston, Cambridge Massachusetts.
- [17] **Bejan, A.**, 1993. Heat Transfer, John Wiley & Sons. New York.
- [18] **Jakob, T. L. M.** 1959 Heat Transfer Volume I, John Wiley & Sons, New York.
- [19] **Kakaç, S.** 1980. Örneklerle Isı Transferi, Saim Toraman Matbaası, Ankara.
- [20] **Pitts, D.R. ve Sissom, L.E.** 1977 Schaums Outline Of Theory and Problems of Heat Transfer, McGraw-Hill, New York
- [21] **Holman J.P.**, 1999 Heat Transfer Eighth Edition, McGraw-Hill, New York.
- [22] **Hagen, K.D.**, 1999 Heat Transfer with Applications, Prentice Hall, New Jersey.
- [23] **Croft, D. R. ve Lilley, D. G.**, 1977 Calculations Using Finite Difference Equations, Applied Science, London.
- [24] **Holman J.P.**, 1968 Heat Transfer Second Edition, McGraw-Hill, New York.

[25] **Özışık M.N.**, 1980 Heat Conduction, John Wiley and Sons, New York.

EKLER

A LİTERATÜRDEKİ DERS KİTAPLARINDAKİ GRAFİKLER

J. H. Lienhard ve J. H. Lienhard'ın ders kitabından yapılan taramalar aşağıda verilmiştir [16].

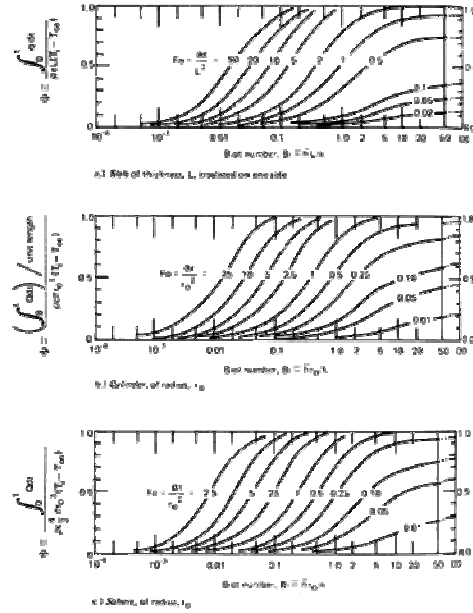
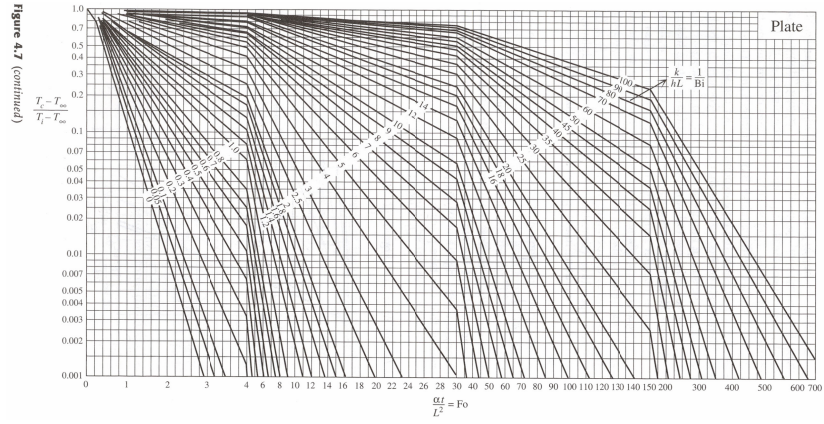


Figure 3.10 The heat removal from suddenly-cooled bodies as a function of B and time.

Şekil A.1: J. H. Lienhard ve J. H. Lienhard, Gröber grafikleri

A. Bejan'ın ders kitabından yapılan taramalar aşağıda verilmiştir [17].



Şekil A.2: A. Bejan (sf. 160), Heisler merkez sıcaklık grafiği (levha)

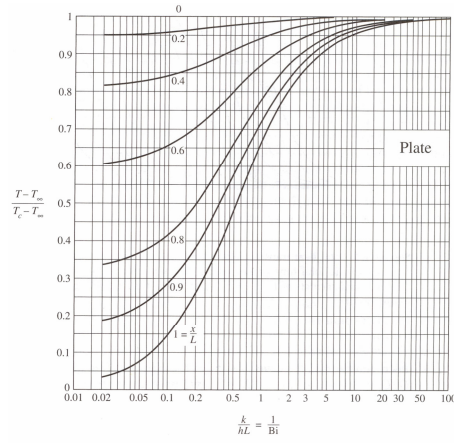


Figure 4.8 Relationship between the temperature in any plane (x) and the temperature in the midplane ($x = 0$, Fig. 4.7) of a plate immersed suddenly in a fluid of a different temperature ($L =$ plate half-thickness). (Drawn after Heisler [2].)

Şekil A.3: A. Bejan (sf. 161), Heisler düzeltme grafiği (levha)

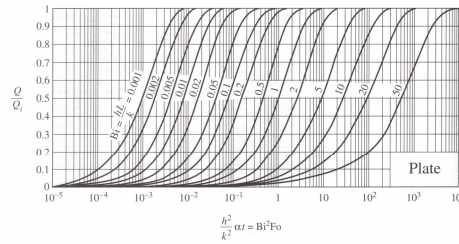
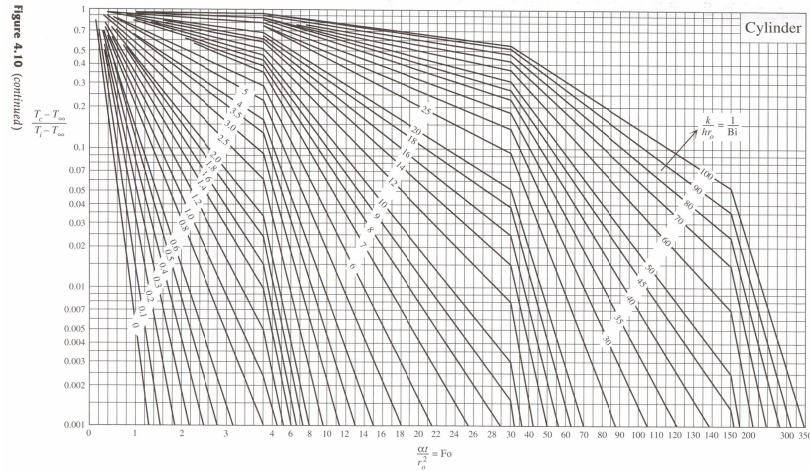


Figure 4.9 Total heat transfer between a plate and the surrounding fluid, as a function of the total time of exposure t . (Drawn after H. Gröber, S. Erk, and U. Grigull, *Fundamentals of Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1961; used with permission.)

Şekil A.4: A. Bejan (sf. 162), Gröber grafikleri (levha)



Şekil A.5: A. Bejan (sf. 165), Heisler merkez sıcaklık grafiği (silindir)

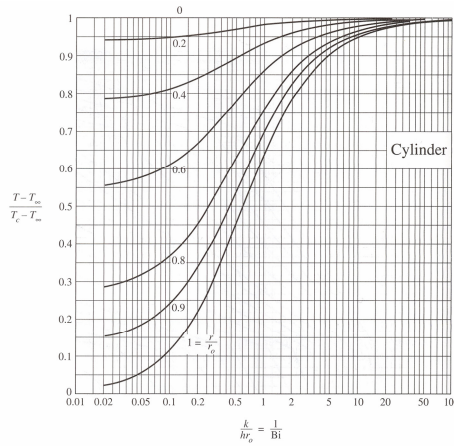


Figure 4.11 Relationship between the temperature at any radius (r) and the temperature on the centerline ($r = 0$, Fig. 4.10) of a long cylinder immersed suddenly in a fluid of a different temperature. (Drawn after Heisler [2].)

Şekil A.6: A. Bejan (sf. 166), Heisler düzeltme grafiği (silindir)

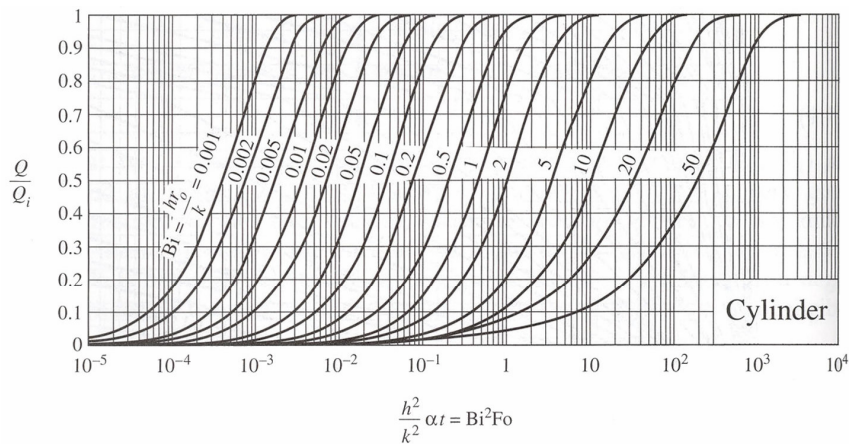


Figure 4.12 Total heat transfer between a long cylinder and the surrounding fluid, as a function of the total time of exposure t . (Drawn after H. Gröber, S. Erk, and U. Grigull, *Fundamentals of Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1961; used with permission.)

Şekil A.7: A. Bejan (sf. 166), Gröber grafiği (silindir)

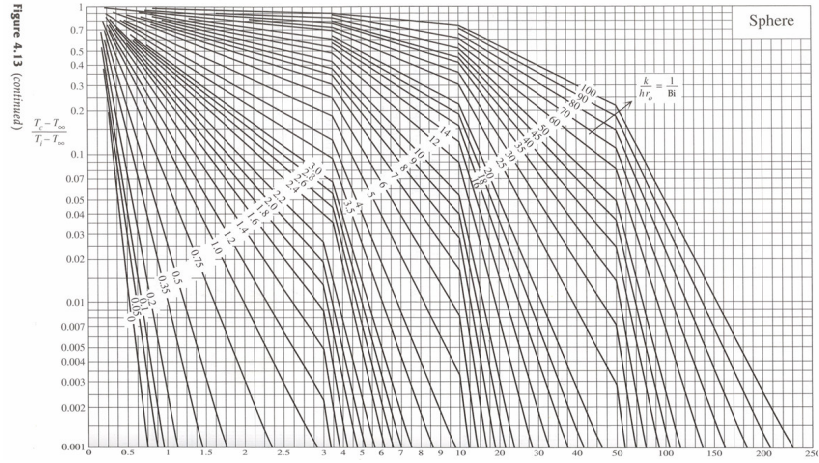


Figure 4.13 (continued)

Şekil A.8: A. Bejan (sf. 168), Heisler merkez sıcaklık grafiği (küre)

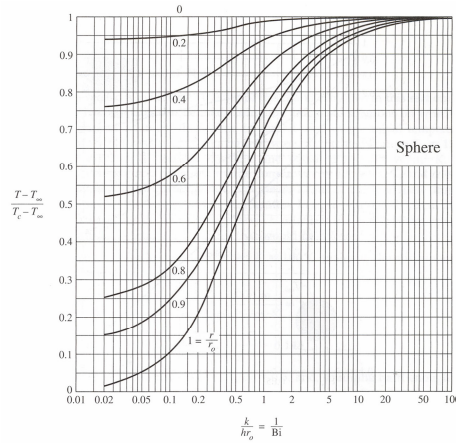


Figure 4.14 Relationship between the temperature at any radius (r) and the temperature in the center ($r = 0$, Fig. 4.13) of a sphere immersed suddenly in a fluid of a different temperature. (Drawn after Heisler [2].)

Şekil A.9: A. Bejan (sf. 169), Heisler düzeltme grafiği (küre)

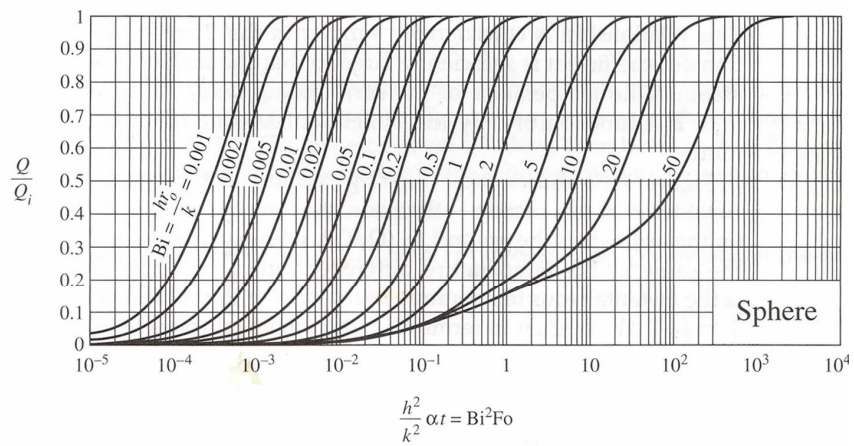
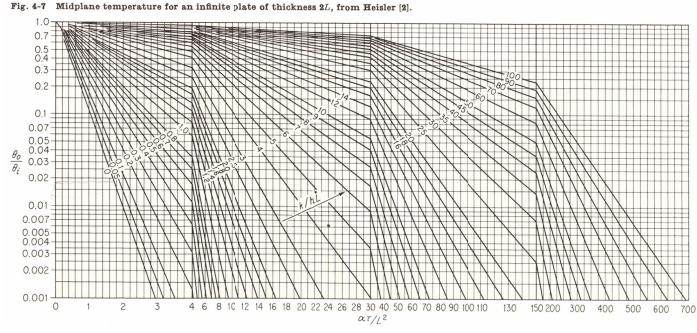


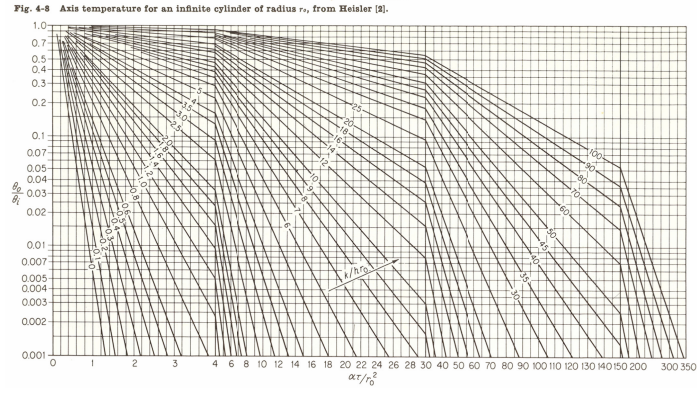
Figure 4.15 Total heat transfer between a sphere and the surrounding fluid, as a function of the total time of exposure t . (Drawn after H. Gröber, S. Erk, and U. Grigull, *Fundamentals of Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1961; used with permission.)

Şekil A.10: A. Bejan (sf. 169), Gröber grafiği (küre)

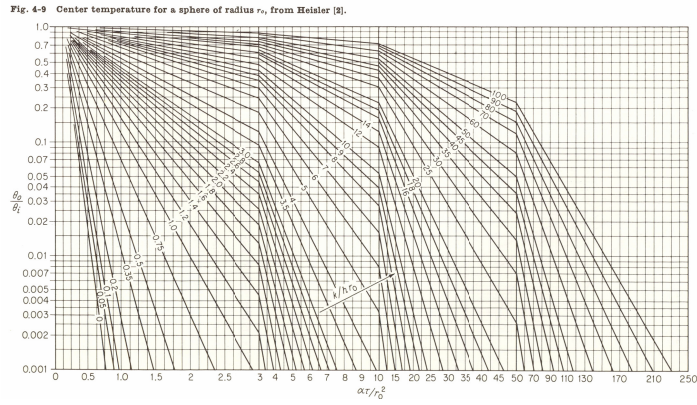
J. P. Holman (1968)'ın ders kitabından yapılan taramalar aşağıda verilmiştir [24].



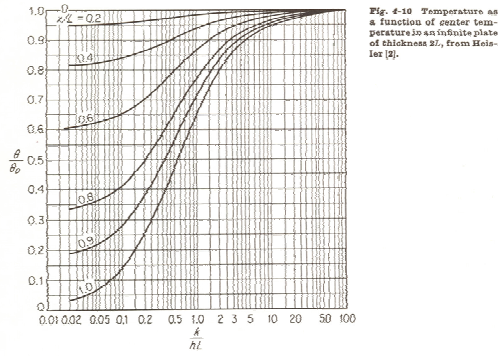
Şekil A.11: J. P. Holman (sf. 83), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (levha)



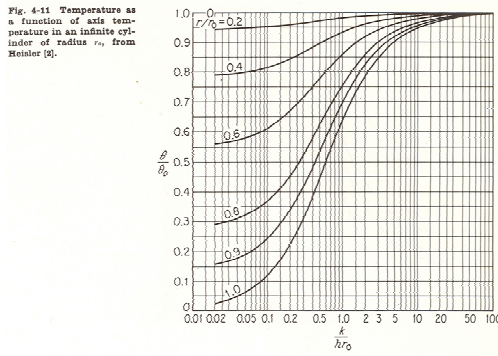
Şekil A.12: J. P. Holman (sf. 84), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (silindir)



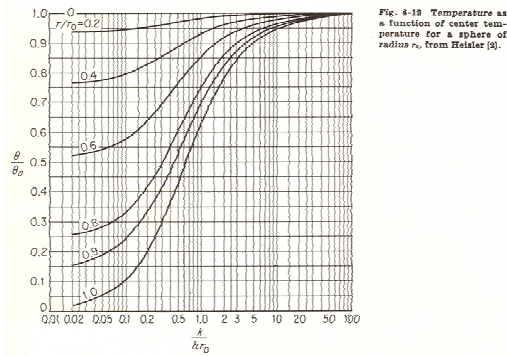
Şekil A.13: J. P. Holman (sf. 85), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (küre)



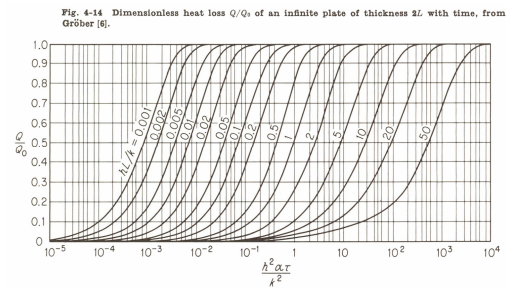
Şekil A.14: J. P. Holman (sf. 86), Heisler düzeltme grafiği (levha)



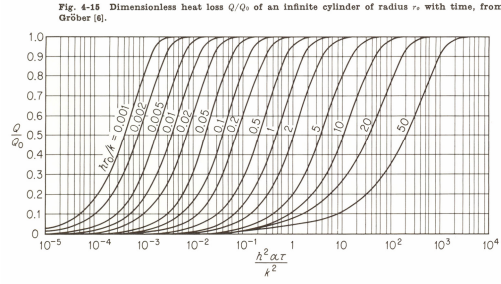
Şekil A.15: J. P. Holman (sf. 87), Heisler düzeltme grafiği (silindir)



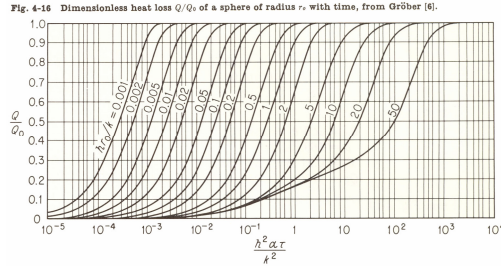
Şekil A.16: J. P. Holman (sf. 88), Heisler düzeltme grafiği (küre)



Şekil A.17: J. P. Holman (sf. 90), Gröber grafiği (levha)

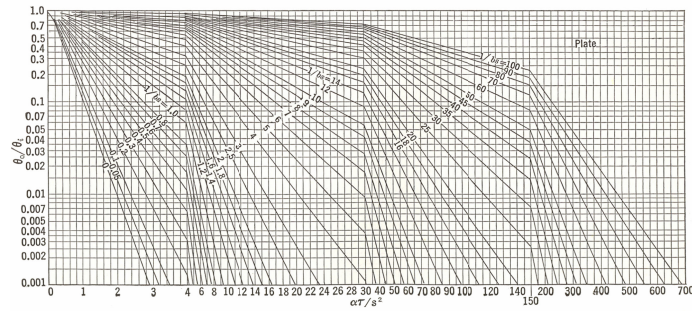


Şekil A.18: J. P. Holman (sf. 90), Gröber grafiği (silindir)

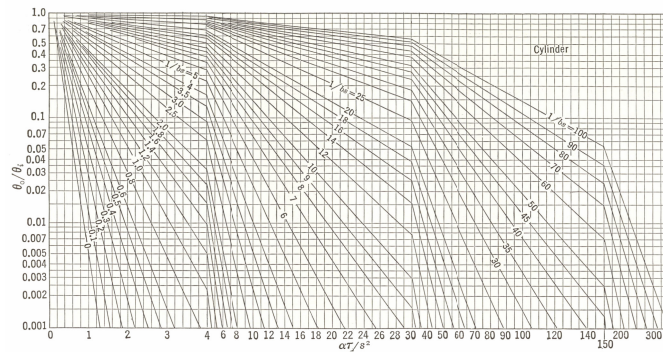


Şekil A.19: J. P. Holman (sf. 91), Gröber grafiği (küre)

L. M. Jacob'un ders kitabından yapılan taramalar aşağıda verilmiştir [18].



Şekil A.20: L. M. Jacob (sf. 285), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (levha)



Şekil A.21: L. M. Jacob (sf. 286), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (silindir)

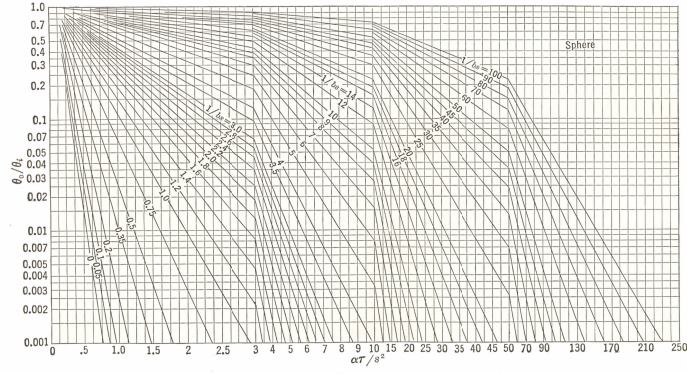


Fig. 13-17. θ_0/θ_i versus $\alpha\tau/s^2$ for sphere according to Eq. 13-70.
Courtesy Dr. M. P. Heisler [1947].

Şekil A.22: L. M. Jacob (sf. 287), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (küre)

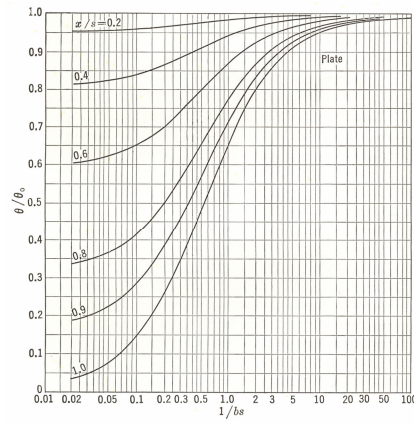


Fig. 13-18. θ/θ_0 versus $1/b_s$ for plane plate from Eq. 13-49.
Courtesy Dr. M. P. Heisler [1947].

Şekil A.23: L. M. Jacob (sf. 288), Heisler düzeltme grafiği (levha)

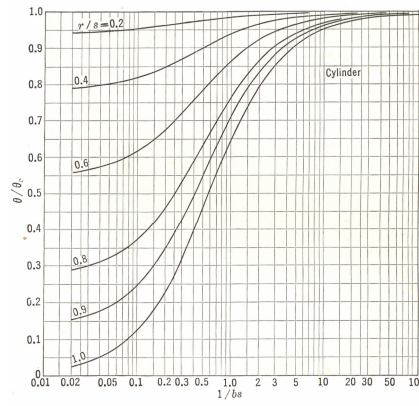


Fig. 13-19. θ/θ_0 versus $1/b_s$ for cylinder from Eq. 13-65.
Courtesy Dr. M. P. Heisler [1947].

Şekil A.24: L. M. Jacob (sf. 289), Heisler düzeltme grafiği (silindir)

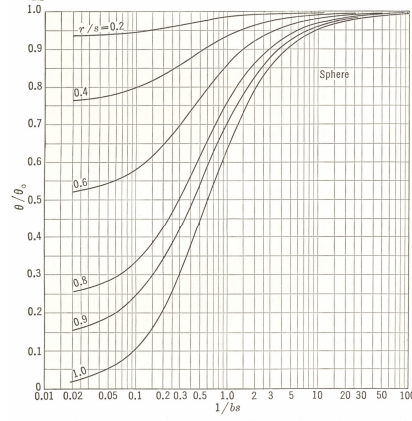
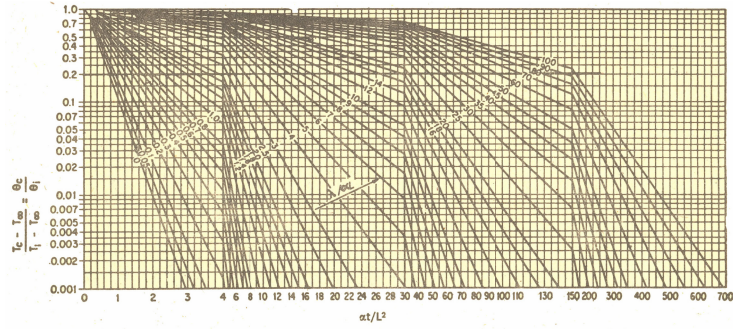


FIG. 13-20. θ/θ_s versus $1/bi$ for sphere from Eq. 13-78.
Courtesy Dr. M. P. Heisler [1947].

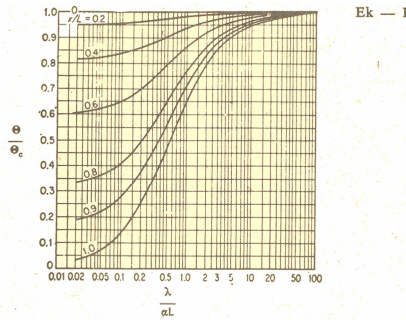
Şekil A.25: L. M. Jacob (sf. 290), Heisler düzeltme grafiği (küre)

S. Kakaç'ın ders kitabından yapılan taramalar aşağıda verilmiştir [19].



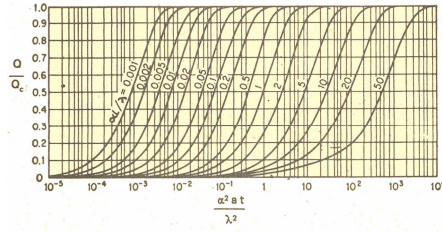
Şekil 108: L kalınlığında sonsuz bir levhanın izole edilmiş yüzeyindeki sıcaklık ($x/L = 0$) veya 2L kalınlığındaki bir levhanın merkezindeki sıcaklık.

Şekil A.26: S. Kakaç (sf. 274), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (levha)



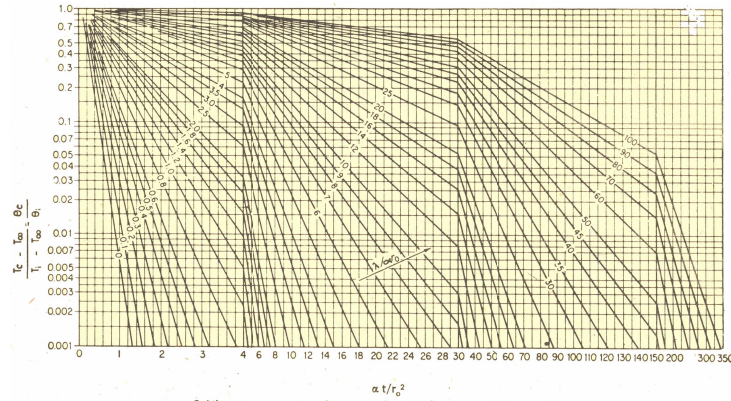
Şekil 109: 2L kalınlığındaki sonsuz bir levhanın merkezindeki sıcaklık ile herhangi bir x/L noktasındaki sıcaklık arasındaki bağıntı.

Şekil A.27: S. Kakaç (sf. 275), Heisler düzeltme grafiği (levha)



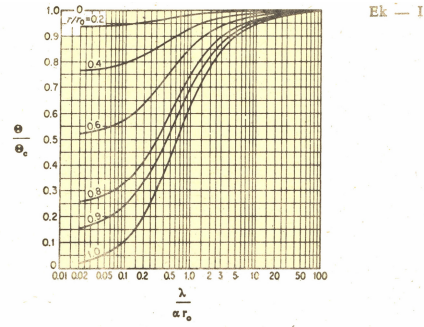
Şekil 110: Levha için ısı transferi miktarı hesabı.

Şekil A.28: S. Kakaç (sf. 275), Gröber grafiği (levha)



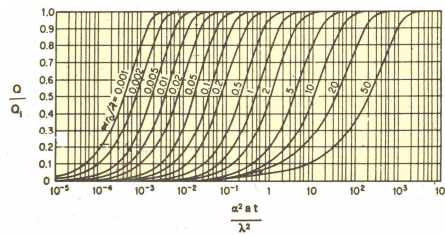
Şekil 111 : r_0 yarıçapında sonsuz bir silindir merkezindeki sıcaklık.

Şekil A.29: S. Kakaç (sf. 276), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (silindir)



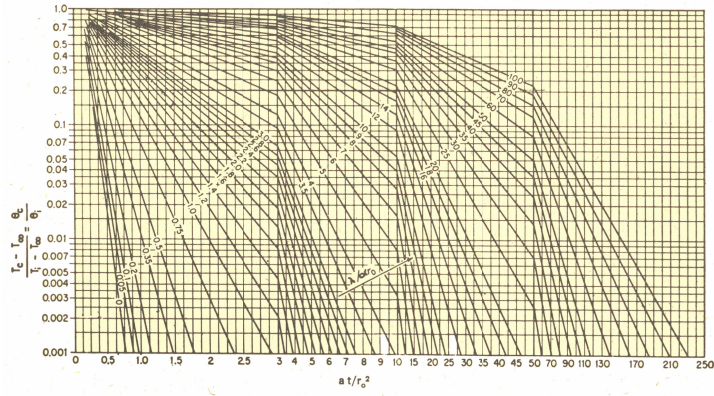
Şekil 112 : r_0 yarıçapında sonsuz bir silindirin merkezindeki sıcaklık ile r/r_0 noktasındaki sıcaklık arasında bağlantı.

Şekil A.30: S. Kakaç (sf. 277), Heisler düzeltme grafiği (silindir)



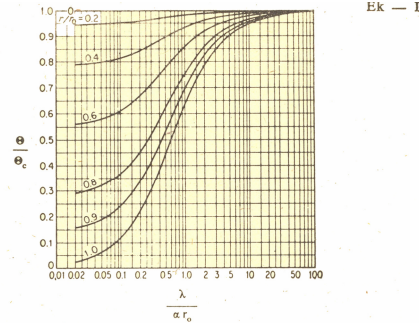
Şekil 113 : Silindir için ısı transferi hesabı.

Şekil A.31: S. Kakaç (sf. 277), Gröber grafiği (silindir)



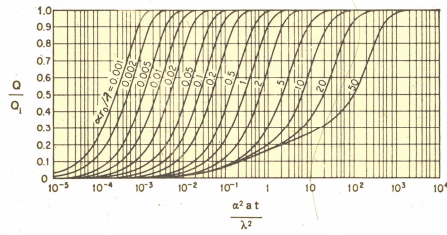
Şekil 114) r_0 yarıçapında bir kürenin merkezindeki sıcaklık.

Şekil A.32: S. Kakaç (sf. 278), Heisler merkez sıcaklığı grafiği (küre)



Şekil 115: r_0 yarıçapında bir kürenin merkezindeki sıcaklık ile r/r_0 noktasındaki sıcaklık arasında bağıntı.

Şekil A.33: S. Kakaç (sf. 279), Heisler düzeltme grafiği (küre)



Şekil 116: Küre için ısı transferi hesabı.

Şekil A.34: S. Kakaç (sf. 279), Gröber grafiği (küre)

Pitts, D.R. ve Sissom, L.E.'nin ders kitabından yapılan taramalar aşağıda verilmiştir [20].

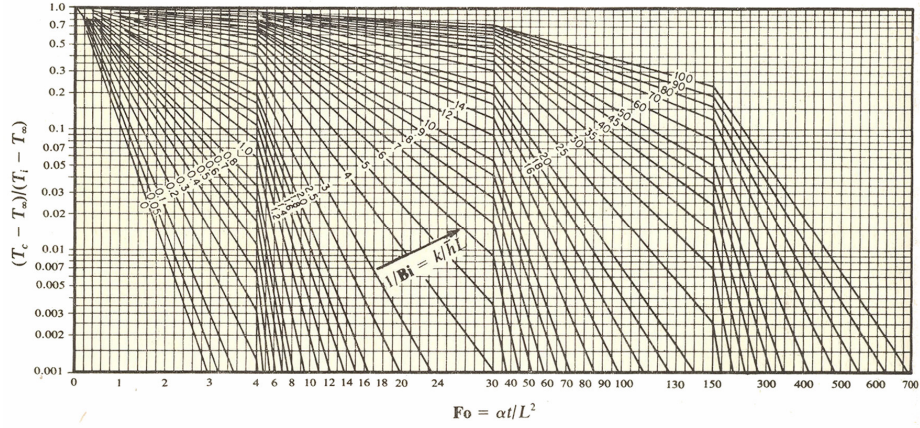


Fig. 4-6. Centerline temperature for a slab. [From M. P. Heisler, *Trans. ASME*, 69: 227 (1947).]

Şekil A.35: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 80), Heisler merkez grafiği (levha)

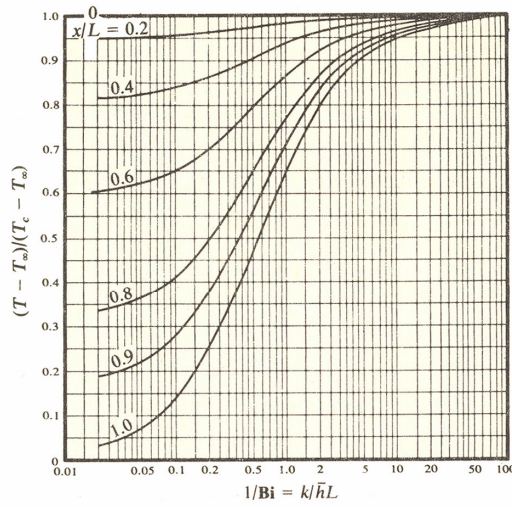


Fig. 4-7. Correction chart for a slab. [From M. P. Heisler, *Trans. ASME*, 69: 227 (1947).]

Şekil A.36: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 81), Heisler düzeltme grafiği (levha)

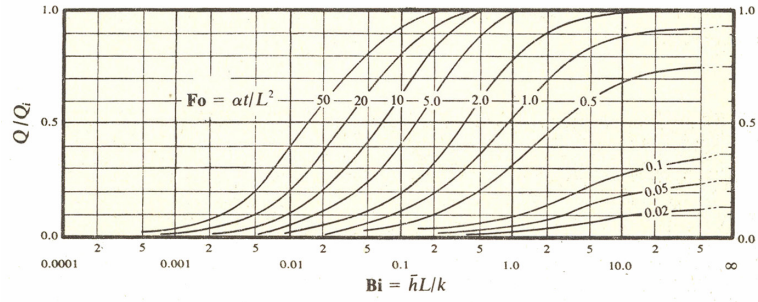


Fig. 4-8. Total heat flow, slab. (From H. Gröber, S. Erk, and U. Grigall, *Grundgesetze der Wärmeübertragung*, 3d ed., Springer-Verlag, Berlin, 1955, by permission.)

Şekil A.37: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 81), Gröber grafiği (levha)

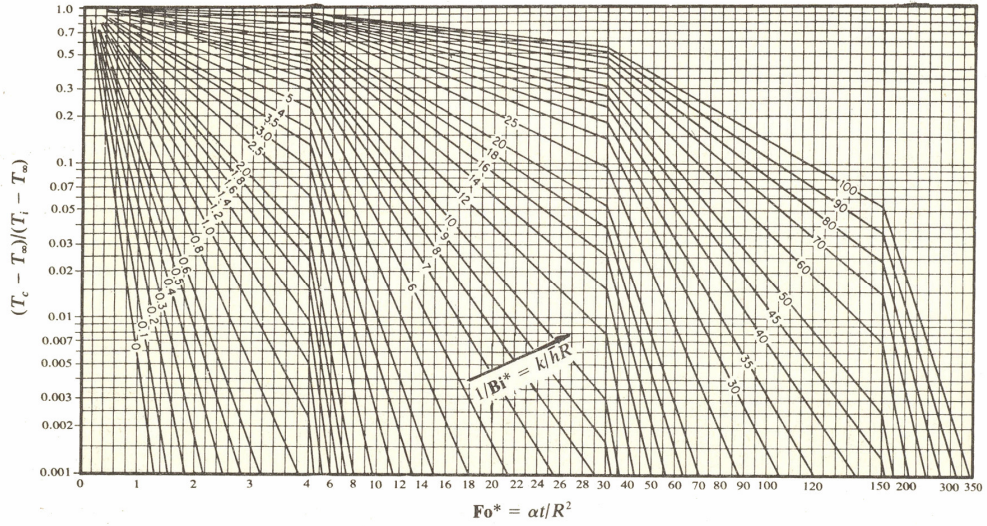


Fig. 4-9. Centerline temperature for a solid cylinder. [From M. P. Heisler, *Trans. ASME*, 69: 227 (1947).]

Şekil A.38: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 82), Heisler merkez grafiği (silindir)

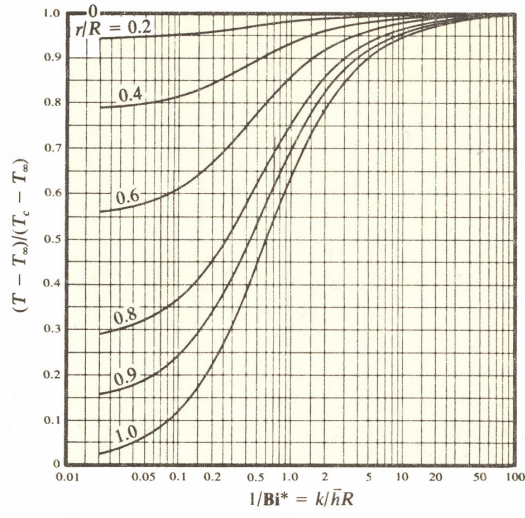


Fig. 4-11

Şekil A.39: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 83), Heisler düzeltme grafiği (silindir)

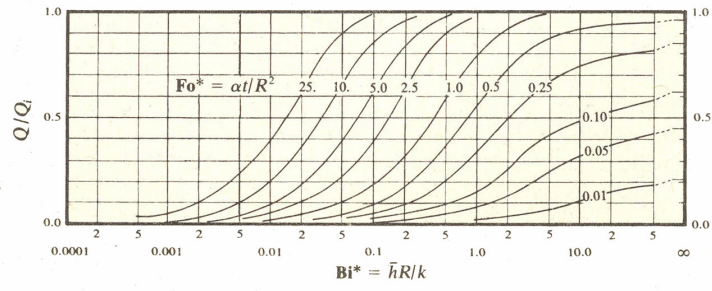


Fig. 4-10. Total heat flow, solid cylinder. (From H. Gröber, S. Erk, and U. Grigall, *Grundgesetze der Wärmeübertragung*, 3d ed., Springer-Verlag, Berlin, 1955, by permission.)

Şekil A.40: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 82), Gröber grafiği (silindir)

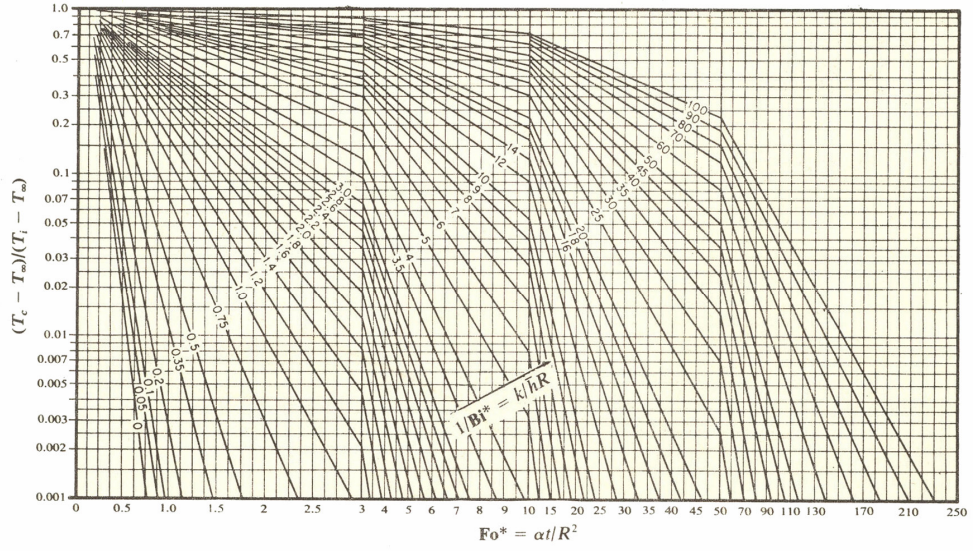


Fig. 4-12. Centerline temperature of a solid sphere. [From M. P. Heisler, *Trans. ASME*, 69: 227 (1947).]

Şekil A.41: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 83), Heisler'in merkez grafiği (küre)

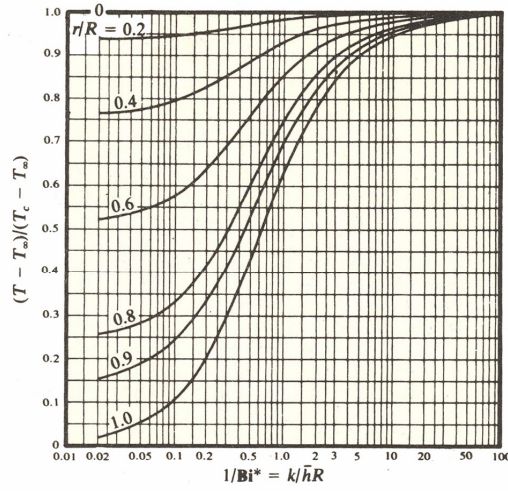


Fig. 4-13. Correction chart for a solid sphere. [From M. P. Heisler, *Trans. ASME*, 69: 227 (1947).]

Şekil A.42: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 84), Heisler düzeltme grafiği (küre)

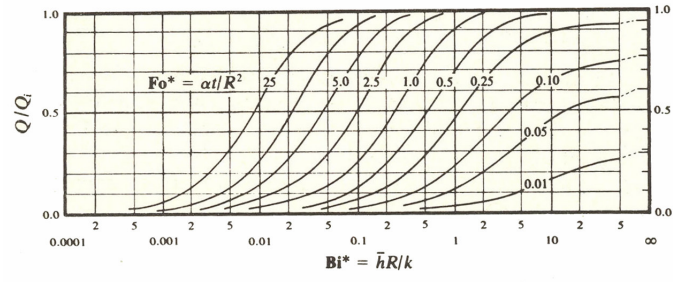


Fig. 4-14. Total heat flow, solid sphere. (From H. Gröber, S. Erk, and U. Grigall, *Grundgesetze der Wärmeübertragung*, 3d ed., Springer-Verlag, Berlin, 1955, by permission.)

Şekil A.43: Pitts, D.R. ve Sissom, L.E. (sf. 84), Gröber grafiği (küre)

B LİTERATÜRLE KARŞILAŞTIRMALI ÖRNEK SORU ÇÖZÜMLERİ

Silindir İçin Örnek Soru

Soru 1

(J.P. Holman (1999) [21] sayfa 665 örnek C-1)

Uzun, 5cm çapındaki çelik silindir, ilk halde 250°C 'dedir. Birden $T_\infty = 80^\circ\text{C}$ ve $h = 500\text{W}/\text{m}^2$ ile verilen ortamda taşınım yolu ile soğumaya bırakılıyor. 1 dakika sonra, merkezden 1.2cm uzaklıktaki sıcaklığı bulunuz. $\rho = 7800\text{kg}/\text{m}^3$, $C_p = 0.48\text{kJ}/\text{kg}^\circ\text{C}$ ve $k = 35\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}$.

Kaynakta sonuç, ilgili tablolardan iki kere interpolasyon yapılarak $\frac{\theta}{\theta_i} = 0.5817$ ve

$T(1.2\text{cm}, 1\text{min}) = 178,9^\circ\text{C}$ olarak verilmiştir.

Tablo B.1'de görüldüğü üzere, $\frac{\theta}{\theta_i} = 0.5117$ bulunmuştur. Kaynakta bulunan değerlerin fark etmesinin sebebi, bu değeri bulmadan önce iki kere interpolasyon yapılıyor olmasıdır. Böylece sıcaklık değeri de kaynaktan yaklaşık %12 saparak, $T(1.2\text{cm}, 1\text{min}) = 163,02^\circ\text{C}$ bulunmaktadır.

Tablo B.1: Örnek soru 1 için MATLAB programı çıktıları

```
>>help ctCylinder
type = 1;
r = 1.2e-2;
t = 1*60;
k=35;
ro=7800;
c=480;
alpha = k/(ro*c);
R=(5/2)*1e-2;
h=500;
H=h/k;
F=@(r)1;
n=10;
Ts=80;
To=250;
Teta=ctCylinder(type,r,t,alpha,R,H,F,n)
T=To+(Ts-To)*Teta
calculates temperature for cylinder type 1 - 3
Type 1:
Boundary condition at r = R : dR/dr+HR=0
All parameters are used
Type 2:
Boundary condition at r = R : dR/dr=0
H is ignored
Type3:
Boundary condition at r = R : R=0
H is ignored
usage:
ctCylinder(type,r,t,alpha,R,H,F,n)
Teta = 0.51166825625172
T = 1.630163964372075e+002
>>
```

Yarı Sonsuz Levha İçin Örnek Sorular

Soru 2

(J.P. Holman (1999) [21] sayfa 147 örnek 4-2)

Büyük çelik bloğu, $k = 45W/m^{\circ}C$, $\alpha = 1.4 \times 10^{-5} m^2/s$ özelliklerinde olup ilk halde $T_0 = 35^{\circ}C$, homojen sıcaklık dağılımına sahiptir. (a) Yüzey sıcaklığının $T_{\infty} = 250^{\circ}C$ 'ye çıkartıldığı durumda $x = 2.5cm$ derinliğindeki, $t = 0.5dk$ anındaki sıcaklığı bulunuz.

Kaynakta sonuç, hata fonksiyonu erf 'nin değerlerinin verildiği tablolardan bakılarak, $T(2.5cm, 0.5dk) = 118.5^{\circ}C$ olarak bulunmaktadır.

Tablo B.2 ile verildiği üzere, $T = 118.499^{\circ}C$ bulunmaktadır. Hata fonksiyonunun verildiği tablolar nispeten daha doğru olduğundan ve ilgili tablodan interpolasyon yapmadan okuma yapılması itibari ile iki çözüm birbirine yakın çıkmaktadır. Ders kitaplarında, erf 'nin değeri, ilgili tablolardan okuma, gerekli olduğu noktalarda interpolasyon yapma yolu ile verildiği için, değerlerin tablolar üzerine isabet etmediği örnek sorularda daha hatalı sonuçlar elde edilmesi kaçınılmaz olacaktır.

Tablo B.2: Örnek soru 2 için MATLAB programı çıktıları

```
>> help ctSemiSlab1D
type = 3;
x=2.5e-2;
t=0.5*60;
alpha=1.4e-5;
H=0;
Tinit=35;
Tenv=250;
T=ctSemiSlab1D(type,x,t,alpha,H,Tinit,Tenv)
calculates temperature for sphere type 1 - 3
Type 1:
Boundary condition at x = 0 : dX/dx+HX=0
All parameters are used
Type 2:
Boundary condition at x = 0 : dX/dx=0, constant q = 0
H is ignored
Type 2.5:
Boundary condition at x = 0 : dX/dx=0 constant q is given instead
of Tenv
H is taken as k
Type3:
Boundary condition at x = 0 : X=0
H is ignored
usage:
ctSemiSlab1D(type,x,t,alpha,H(h/k),Tinit,Tenv(q for type 2.5))
T = 1.184989820694927e+002
>>
```

Soru 3

(K. D. Hagen [22] sayfa 171, örnek 5.4)

Kalın bir granit levha ilk halde $T_0 = 10^\circ C$ homojen sıcaklık dağılımına sahiptir. Levhanın üzeri; birden $q = 900 W/m^2$ büyüklüğünde güneş ısı akımına maruz bırakılmaktadır. $x = 5 cm$ derinlikteki sıcaklık; $t = 3 sa$ sonra ne kadar olacaktır. Granit için özellikler şöyle verilmektedir: $k = 2.79 W/mK$, $\alpha = 13.7 \times 10^{-7} m^2/s$

Kaynakta sonuç $T(5cm, 3sa) = 40^\circ C$ olarak bulunmuştur.

Tablo B.3 ile verildiği üzere, aynı sonuç, geliştirilen hesaplama fonksiyonu tarafından da bulunmaktadır.

Tablo B.3: Örnek soru 3 için MATLAB programı çıktıları

```
>>help ctSemiSlab1D
type = 2.5;
x=5e-2;
t=3*60*60;
k=.603;
alpha=13.7e-7;
k=2.79;
Tinit=10;
q=900;
T=ctSemiSlab1D(type,x,t,alpha,k,Tinit,q)
calculates temperature for sphere type 1 - 3
Type 1:
  Boundary condition at x = 0 : dX/dx+HX=0
  All parameters are used
Type 2:
  Boundary condition at x = 0 : dX/dx=0, constant q = 0
  H is ignored
Type 2.5:
  Boundary condition at x = 0 : dX/dx=0 constant q is given instead
  of Tenv
  H is taken as k
Type3:
  Boundary condition at x = 0 : X=0
  H is ignored
usage:
      ctSemiSlab1D(type,x,t,alpha,H(h/k),Tinit,Tenv(q for type 2.5))
T = 40.00387713588428>>
```

Küre İçin Örnek Soru

Soru 4

(J. H. Lienhard ve J. H. Lienhard [16] sayfa 212 örnek 5.2)

Geometrisi küre olarak kabul edilebilecek bir düzine elma, $T_0 = 30^\circ C$ ortamından alınarak, $T_\infty = 5^\circ C$ 'deki buzdolabının raflarına dizilmektedir. Su ile hemen hemen aynı özelliklere sahip olan elmalar, doğal taşınım katsayısı $h = 6W/m^2K$ olan ortamda, 1 saat kaldıklarında, merkez noktalarındaki sıcaklık ne olacaktır? $k = 0.603W/mK$, $\rho = 997kg/m^3$, $C_p = 4180J/kgK$ olarak verilmektedir.

Kaynakta sorunun çözümü şöyle yapılmaktadır: Fourier sayısı $\tau = 0.208$ olarak hesaplanmaktadır. Bu değer, daha sonra 0.2 olarak kabul edilip, aynı kaynakta verilen iki Heisler grafiğinin birleştirildiği tablodan boyutsuz merkez sıcaklığı için okuma yapılmaktadır. Okunan değer, $\theta = 0.85$ 'dir. Buna karşılık gelen sıcaklık, $T = 26.3^\circ C$ olarak verilmektedir.

Tablo B.4: Örnek soru 4 için MATLAB programı çıktıları

```
>>help ctSphere
type = 1;
r=0;
t=1*60*60;
ro=997;
cp=4180;
k=.603;
alpha=k/(ro*cp);
R=0.05;
h=6;
H=h/k;
F=@(r)1;
n=10;
teta = ctSphere(type,r,t,alpha,R,H,F,n)
Ts=5;
To=30;
T=ctSphere(type,r,t,alpha,R,H,F,n)*(To-Ts)+Ts
calculates temperature for sphere type 1 - 3
Type 1:
Boundary condition at r = R : dR/dr+HR=0
All parameters are used
Type 2:
Boundary condition at r = R : dR/dr=0
H is ignored
Type3:
Boundary condition at r = R : R=0
H is ignored
usage:
ctSphere(type,r,t,alpha,R,H,F,n)
teta = 0.85997776725071
T = 26.49944418126763
```

Görüldüğü üzere, kaynakta, $\tau = 0.208$ bulunmasına rağmen, ilgili tablodan veri okumasının daha kolay yapılabilmesi için, $\tau = 0.2$ kabul edilmiştir, böylece, $\theta = 0.86$ olması gereken değer, $\theta = 0.85$ kabul edilmiş ve %1'lik bir hata yapılmıştır. Kullanılan soru çözümü fonksiyonu ve çıktısı Tablo B.4'te verilmiştir.

Aynı soru için çözüm, yaklaşıtırlan eğri ile hesaplandığında, $\theta = 0.8533$ olarak bulunmaktadır. Bu sonuç, MATLAB sonucuna göre kaynaktakinden daha az hata yaparak, %0.77 hata ile yaklaşmıştır.

Levha için Örnek Sorular

Soru 5

(A. Bejan [17] sayfa 171 örnek 4.3)

1.6cm kalınlığındaki bir karbon-çelik levha, $600^{\circ}C$ sıcaklıkta iken, $15^{\circ}C$ 'deki havuza atılmaktadır. $h = 10^4 W / m^2 C$, $k = 40 W / m^{\circ}C$, $\alpha = 0.2 cm^2 / sn$ verildiğine göre, levhanın orta düzleminin $100^{\circ}C$ 'ye gelmesi için gereken süre ne kadardır?

Kaynakta sorunun çözümü şöyle yapılmaktadır: Biot sayısı, $Bi = 2$ ve istenen son sıcaklığa göre $\theta = 0.145$ olarak hesaplanmaktadır. Bu ikisinin kesiştiği nokta Heisler

grafliğinden okunmakta ve Fourier sayısı $\tau = 1.8$ bulunmaktadır. Fourier sayısından t için çözüm yapıldığında, $t = 11.5sn$ olarak bulunmaktadır.

Çalışmada yapılan hesaplamalar ile, verilen sonucun kontrolü Tablo B.5 sonuçlarına göre yapılmaktadır. Bulunan sonuca göre, $t = 11.5sn$ 'de sıcaklık $100.08^\circ C$ olmaktadır. Heisler grafikleri okunurken yapılan hata, %0.8 olmaktadır.

Tablo B.5: Örnek soru 5 için MATLAB programı çıktıları

```
>>type=4;
x=0;
t=11.5;
alpha=1e-5;
h=1e4;
k=40;
L=1.6e-2/2;
H1=0;
H2=h/k;
F=@(x)1;
n=10;
Teta = ctSlab1D(type,x,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
Ts=15;
To=600;
T=Ts+(To-Ts)*Teta
Teta =    0.14667224728546
T =    1.008032646619939e+002
>>
```

Soru 6

(S. Kakaç [19] sayfa 109 65. soru)

Kalınlığı $2L = 0.4m$ ve özellikleri $k = 1.2W/m^\circ C$, $C_p = 1kJ/kg^\circ C$ ve $\rho = 2000kg/m^3$ olan bir beton duvar, homojen sıcaklığı $T_0 = 20^\circ C$ iken $T_\infty = 0^\circ C$ sıcaklığında bir ortama bırakılıyor. Bu temastan 5 saat ve 50 saat sonra duvar ortasında ve yüzeydeki sıcaklığı analitik olarak hesap ediniz.

Ortam taşınım katsayısı $h = 6W/m^2^\circ C$ olarak verilmektedir.

Kaynakta, değişkenlere ayırma yönteminin seriye açılmasıyla elde edilen formülü kullanarak çözüm yapılmıştır. Yapılan çözümde, analitik olarak, serinin ilk dört terimi hesaba dahil edilmiştir. Bu, gayet yüksek bir hassasiyet ile tam sonuca yaklaşması beklenen bir çözümdür. Kaynakta, sonuçlar şu şekilde bulunmuştur. 5 saat sonra: $T_c = 18.12^\circ C$ ve $T_w = 2.84^\circ C$. 50 saat sonra: $T_w = 11.85^\circ C$ ve $T_w = 1.823^\circ C$.

Tablo B.6 sonuçlarında, sorunun üç farklı şekilde çözüldüğü görülmektedir.

Tablo B.6: Örnek soru 6 için MATLAB programı çıktıları

```
>>help ctSlab1D
calculates 1D temperature for Slab type 1 - 9
Type 1:
  Boundary condition at x = 0 : -dX/dx+H1X=0
  Boundary Condition at x = L : dX/dx+H2X=0
  All parameters are used
Type 2:
  Boundary condition at x = 0 : -dX/dx+H1X=0
  Boundary Condition at x = L : dX/dx=0
  H2 is ignored
Type4:
  Boundary condition at x = 0 : dX/dx=0
  Boundary Condition at x = L : dX/dx+H2X=0
  H1 is ignored
usage:
      ctSlab1D(type,x,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
type=1;
x=0.2;
t=5*60*60;
h=6;
k=1.2;
ro=2000;
cp=1000;
alpha=k/(ro*cp);
L=0.4;
H1=h/k;
H2=h/k;
F=@(x)1;
n=10;
TetaMerkez1 = ctSlab1D(1,0.2,t,alpha,0.4,[H1,H2],F,n)
TetaMerkez4 = ctSlab1D(4,0.0,t,alpha,0.2,[H1,H2],F,n)
TetaMerkez2 = ctSlab1D(2,0.2,t,alpha,0.2,[H1,H2],F,n)
TetaYuzey1 = ctSlab1D(1,0.0,t,alpha,0.4,[H1,H2],F,n)
TetaYuzey4 = ctSlab1D(4,0.2,t,alpha,0.2,[H1,H2],F,n)
TetaYuzey2 = ctSlab1D(2,0.0,t,alpha,0.2,[H1,H2],F,n)
Ts=0;
To=20;
Tm1=Ts+(To-Ts)*TetaMerkez1
Tm4=Ts+(To-Ts)*TetaMerkez4
Tm2=Ts+(To-Ts)*TetaMerkez2
Ty1=Ts+(To-Ts)*TetaYuzey1
Ty4=Ts+(To-Ts)*TetaYuzey4
Ty2=Ts+(To-Ts)*TetaYuzey2
TetaMerkez1 = 0.91002693475920,
TetaMerkez4 = 0.91002693475920
TetaMerkez2 = 0.91002693475920
TetaYuzey1 = 0.60379393323135
TetaYuzey4 = 0.60379393323135
TetaYuzey2 = 0.60379393323135
Tm1 = 18.20053869518393, Tm4 = 18.20053869518394, Tm2 = 18.20053869518394
Ty1 = 12.07587866462694, Ty4 = 12.07587866462694, Ty2 = 12.07587866462694
% 50 saat için sonuçlar:
t=50*60*60
TetaMerkez1 = ctSlab1D(1,0.2,t,alpha,0.4,[H1,H2],F,n)
TetaMerkez4 = ctSlab1D(4,0.0,t,alpha,0.2,[H1,H2],F,n)
TetaMerkez2 = ctSlab1D(2,0.2,t,alpha,0.2,[H1,H2],F,n)
TetaYuzey1 = ctSlab1D(1,0.0,t,alpha,0.4,[H1,H2],F,n)
TetaYuzey4 = ctSlab1D(4,0.2,t,alpha,0.2,[H1,H2],F,n)
TetaYuzey2 = ctSlab1D(2,0.0,t,alpha,0.2,[H1,H2],F,n)
Tm1=Ts+(To-Ts)*TetaMerkez1
Tm4=Ts+(To-Ts)*TetaMerkez4
Tm2=Ts+(To-Ts)*TetaMerkez2
Ty1=Ts+(To-Ts)*TetaYuzey1
Ty4=Ts+(To-Ts)*TetaYuzey4
Ty2=Ts+(To-Ts)*TetaYuzey2
TetaMerkez1 = 0.15169003319919
TetaMerkez4 = 0.15169003319919
TetaMerkez2 = 0.15169003319919
TetaYuzey1 = 0.09892990725279
TetaYuzey4 = 0.09892990725279
TetaYuzey2 = 0.09892990725279
Tm1 = 3.03380066398376, Tm4 = 3.03380066398376, Tm2 = 3.03380066398376
Ty1 = 1.97859814505578, Ty4 = 1.97859814505578, Ty2 = 1.97859814505578
>>
```

Tablo D.1 ile verilen levha için sınır koşulları tiplerinden 1. durum, yani her iki tarafın ısı taşınımı ile ısı kaybettiği durumlardaki hesaplar, $Tm1$ ve $Ty1$ ile verilmiştir. Aynı durum, levha geometrisinde süper pozisyon yapılarak, yarım levha

için, orta nokta yalıtılmış kabul edilerek çözülebilmektedir. Sol yarım levha için çözüm 2. tip ile verilmiş, sağ yarım levha için ise, 4. tip ile verilmiştir. Özdeğerlerin hesaplandığı denklemler, özfonksiyonlar ve normalizasyon integralleri değişiyor olsa bile, sonuçlar süper pozisyondan ötürü değişmemektedir. Geliştirilen MATLAB fonksiyonunun çıktıları, kaynaklarda verilen sonuçlar ile örtüşmektedir. Sonuçların karşılaştırması Tablo B.7 ile verilmiştir. Aynı tabloda merkez sıcaklıkları için, yaklaştırılan eğri ile hesaplanan sonuçlara da yer verilmektedir.

Tablo B.7: Örnek soru 6 için, kaynak ile sonuçların karşılaştırılması

	MATLAB	S. Kakaç	% Mutlak Hata (S. Kakaç)	Eğri	% Mutlak Hata (Eğri)
$T_w, t = 5sa$	11.85	12.08	1.94	-	-
$T_c, t = 5sa$	18.20	18.12	0.44	18.24	0.19
$T_c, t = 50sa$	3.03	2.84	6.45	3.05	0.49
$T_w, t = 50sa$	1.979	1.873	5.36	-	-

Soru 7

(S. Kakaç [19] sayfa 111 soru 66)

60cm kalınlığında bir duvar başlangıçta $T_0 = 21^\circ C$ sıcaklığındadır. Aniden iki yüzeyi $T_\infty = 577^\circ C$ sıcaklığında gazlarla temas ettiriliyor. Film katsayısının sabit ve $h = 8.7kcal/m^2sa^\circ C$ olduğu kabul ediliyor. Duvarın özellikleri ise $k = 13.4kcal/m^\circ C$, $C_p = 0.3kcal/kg^\circ C$ ve $\rho = 2.6ton/m^3$ olarak veriliyor. 27 saat ısıtmadan sonra merkezdeki ve yüzeydeki sıcaklığı ve grafikleri kullanarak duvar kalınlığında sıcaklık dağılımını bulunuz.

Kaynakta, τ ve $1/Bi$ hesaplanarak Heisler orta düzlem sıcaklığı grafiklerinden orta nokta için okuma yapılarak çözüme gidilmiştir. Daha sonra bu okunan değerler ile, diğer kalınlıktaki sıcaklıkları okumak için Heisler'in düzeltme grafiklerinden yeni bir okuma daha yapılmıştır. Kaynakta verilen sonuçlar Tablo B.9'de hesaplanan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Tablo B.8: Örnek soru 7 için MATLAB programı çıktıları

```
>> type=4;
t=27;
h=8.7;
k=13.4;
ro=2600;
cp=0.3;
alpha=k/(ro*cp);
L=0.3;
H1=h/k;
H2=h/k;
F=@(x)1;
n=10;
Teta0_0 = ctSlab1D(type,0.0*L,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
Teta0_2 = ctSlab1D(type,0.2*L,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
Teta0_4 = ctSlab1D(type,0.4*L,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
Teta0_6 = ctSlab1D(type,0.6*L,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
Teta0_8 = ctSlab1D(type,0.8*L,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
Teta1_0 = ctSlab1D(type,1.0*L,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
Ts=577;
To=21;
T0_0=Ts+(To-Ts)*Teta0_0
T0_2=Ts+(To-Ts)*Teta0_2
T0_4=Ts+(To-Ts)*Teta0_4
T0_6=Ts+(To-Ts)*Teta0_6
T0_8=Ts+(To-Ts)*Teta0_8
T1_0=Ts+(To-Ts)*Teta1_0

Teta0_0 = 0.40169877604259
Teta0_2 = 0.40023135669560
Teta0_4 = 0.39583981972061
Teta0_6 = 0.38855624998671
Teta0_8 = 0.37843386175183
Teta1_0 = 0.36554660987579
T0_0 = 3.536554805203198e+002
T0_2 = 3.544713656772451e+002
T0_4 = 3.569130602353391e+002
T0_6 = 3.609627250073917e+002
T0_8 = 3.665907728659841e+002
T1_0 = 3.737560849090634e+002

>>
```

Tablo B.8 sonuçlarında, kaynakta hesaplanmış olan her kalınlıkta, sıcaklık hesaplandığı görülmektedir. Sonuçların karşılaştırması Tablo B.9 ile verilmiştir. İlgili tabloya göre sonuçlarda %1'den küçük bir hata vardır.

Soruda, kaynağa göre, merkez noktası için $\theta = 0.4$ olmaktadır. Yaklaştırılan eğri sonuçlarına göre, merkez noktasında, $\theta = 0.4015$ olmaktadır. Bu değer MATLAB sonuçlarına, kaynaktakinden daha yakındır. Kaynak merkez nokta sıcaklığı için %4 hata yapmakta iken, yaklaştırılmış eğrinin sonuçları, %0.04 hata yapmaktadır.

Tablo B.9: Örnek soru 7 için, kaynak ile MATLAB sonuçların karşılaştırılması

	MATLAB	S. Kakaç	% Bağıl Hata
$T(x/L = 0.0, 27sa)$,	3.53655e+002	355° C	0.38
$T(x/L = 0.2, 27sa)$,	3.54471e+002	355° C	0.15
$T(x/L = 0.4, 27sa)$,	3.56913e+002	359° C	0.58
$T(x/L = 0.6, 27sa)$,	3.60962e+002	364° C	0.83
$T(x/L = 0.8, 27sa)$	3.66590e+002	368° C	0.38
$T(x/L = 1.0, 27sa)$	3.73756e+002	377° C	0.86

Soru 8

(D. R. Croft ve D. G. Lilley [23], sayfa 139 soru 6.1.1.)

210mm kalınlığında bir çelik levha, başlangıçta $T_0 = 20^\circ C$ sıcaklığındadır. Aniden iki yüzeyi $T_\infty = 1000^\circ C$ sıcaklığında sabit tutulmaya başlanıyor. Çeliğin özellikleri $k = 41W/m^\circ C$, $C_p = 504J/kg^\circ C$ ve $\rho = 8000kg/m^3$ olarak veriliyor. 5 dakika ısıtmadan sonra levhanın içindeki sıcaklık dağılımını bulunuz.

Kaynakta, geliştirilmiş olan bir bilgisayar programı ile, sonlu farklar yöntemi kullanılarak sıcaklık dağılımı hesap edilmektedir. Bu hesaplamalar yapılırken, başlangıç koşulu üzerinden, her bir dakikada bir yeni sıcaklık dağılımı iterasyon ile bulunmaktadır. Hesaplamaların yapıldığı aralıklar $L/6$ olacak şekilde seçilmiştir. İlgili sonuçlar, Tablo B.11’de hesaplanan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Tablo B.10: Örnek soru 8 için MATLAB programı çıktıları

```
>> help ctSlab1D
type=9;
t=5*60;
k=41;
ro=504;
cp=8000;
alpha=k/(ro*cp);
L=0.21;
H1=0;
H2=0;
F=@(x)1;
n=10;
Teta0_6 = ctSlab1D(type,0*L/6,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
Teta1_6 = ctSlab1D(type,1*L/6,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
Teta2_6 = ctSlab1D(type,2*L/6,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
Teta3_6 = ctSlab1D(type,3*L/6,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
Teta4_6 = ctSlab1D(type,4*L/6,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
Teta5_6 = ctSlab1D(type,5*L/6,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
Teta6_6 = ctSlab1D(type,6*L/6,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
Ts=1000;
To=20;
T0_0=Ts+(To-Ts)*Teta0_6
T0_1=Ts+(To-Ts)*Teta1_6
T0_2=Ts+(To-Ts)*Teta2_6
T0_3=Ts+(To-Ts)*Teta3_6
T0_4=Ts+(To-Ts)*Teta4_6
T1_5=Ts+(To-Ts)*Teta5_6
T1_6=Ts+(To-Ts)*Teta6_6
calculates 1D temperature for Slab type 1 - 9
Type9:
Boundary condition at x = 0 : X=0
Boundary Condition at x = L : X=0
H1 and H2 are ignored
usage:
ctSlab1D(type,x,t,alpha,L,[H1,H2],F,n)
Teta0_6 = 0
Teta1_6 = 0.32255520325965
Teta2_6 = 0.55710503814124
Teta3_6 = 0.64237905749762
Teta4_6 = 0.55710503814124
Teta5_6 = 0.32255520325965
Teta6_6 = 7.911474219607963e-017
T0_0 = 1000
T0_1 = 6.838959008055410e+002
T0_2 = 4.540370626215822e+002
T0_3 = 3.704685236523335e+002
T0_4 = 4.540370626215821e+002
T1_5 = 6.838959008055410e+002
T1_6 = 9.999999999999999e+002
```

Tablo B.10 sonuçlarında, kaynakta alınan her kalınlık için, sıcaklık hesaplandığı görülmektedir. Sonuçların karşılaştırması Tablo B.11’de verilmiştir. İlgili tabloya göre sonuçlarda %17’ye varan hatalar vardır. Bunun sebebi ise, hem iterasyon adımlarının az olması (kaynak çözümünde 5) hem de ayrıklaştırılırken levhanın az sayıda (kaynak çözümünde 6) elemana ayrılmasıdır.

Tablo B.11: Örnek soru 8 için, kaynak ile sonuçların karşılaştırılması

	MATLAB	D.R. Croft	% Bağıl Hata
$T(x = 0L/6, 5 \text{ min})$,	1000	$1000^{\circ} C$	0.00
$T(x = 1L/6, 5 \text{ min})$,	6.83895e+002	$724.4^{\circ} C$	5.59
$T(x = 2L/6, 5 \text{ min})$,	4.54037e+002	$448.8^{\circ} C$	1.17
$T(x = 3L/6, 5 \text{ min})$,	3.70468e+002	$448.8^{\circ} C$	17.45
$T(x = 4L/6, 5 \text{ min})$	4.54037e+002	$448.8^{\circ} C$	1.17
$T(x = 5L/6, 5 \text{ min})$	6.83895e+002	$724.4^{\circ} C$	5.59
$T(x = 5L/6, 5 \text{ min})$	9.99999e+002	$1000^{\circ} C$	0.00

C ISI AKTARIMI PROBLEMİNİN TANIMI

ISI AKTARIMI ÇEŞİTLERİ

İletim Yolu ile Isı Aktarımı

Bir madde içerisinde sıcaklık değişimine bağlı olarak, sıcak bölgeden soğuk olan bölgeye doğru bir ısı aktarımı gerçekleşmektedir. Gerçekleşen bu ısının miktarı ise,

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{C.1}$$

denklemleri ile verilmektedir. Bu denklemde, q ısı aktarımı miktarı ve $\partial T / \partial x$ ise ısı akışı yönündeki sıcaklık değişimini belirtmektedir. Pozitif sabit k ise, maddenin ısı iletkenliğidir [24].

Taşınım Yolu ile Isı Aktarımı

Isı aktarımının katı yüzey ile akışkan arasında gerçekleştiği durumdur. Katı yüzey üzerinde akmakta olan akışkanın ısı aktarımı miktarı, akışkanın malzemesi, ortamın geometrisi ve akış hızı gibi parametrelerin belirlediği bir h taşınım katsayısı ile hesaplanan şu formülle verilmektedir:

$$q = -hA(T_w - T_\infty) \quad \text{C.2}$$

Isı İletiminin Türevli Denklemi

İçinde ısı üretimi olmayan, homojen bir katı maddenin ısı iletimini ifade eden bir türevli denklem şu şekilde verilmektedir [25]:

$$\nabla^2 T(r, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} \quad \text{C.3}$$

Burada ısı yayılımı,

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad \text{C.4}$$

olmaktadır. (C.3) denklemi, kararlı haldeki ısı aktarımı için,

$$\nabla^2 T(r,t) = 0 \quad \text{C.5}$$

şeklinde verilen *Laplace* denkleminde dönüşmektedir.

SINIR KOŞULLARI

Isı iletiminin türevli denklemi, sınır koşulları denklemleri ve başlangıç koşulları belirtilmez ise, birden çok çözüme sahip olacaktır. Başlangıç koşulu, $t = 0$ anında ortamdaki sıcaklık dağılımını veren, r 'ye bağlı bir fonksiyondur. Sınır koşulları ise, $t > 0$ iken, ortamın sınırlarının maruz kaldığı ısı durumları ifade eder. Bunlar, yüzeyin belli bir sıcaklık dağılımına sahip olması, yüzeyde belli bir ısı akışının olması veya belli bir sıcaklıktaki ortama ısı geçişi olabilir. Sıralanan durumlardan, birinci tür sınır koşulu, ikinci tür sınır koşulu ve üçüncü tür sınır koşulu olarak bahsedilecektir.

Birinci Tür Sınır Koşulu

Sınır yüzeyi boyunca sıcaklığın zaman ve uzaklığın bir fonksiyonu olarak ifade edilmesidir. Dirichlet tipi sınır koşuludur.

$$T = f_i(r,t) \text{ yüzey } S_i \text{ boyunca} \quad \text{C.6}$$

Verilen f fonksiyonunun, sadece t 'nin bir fonksiyonu olması, bir sabit T_s olması, f 'nin özel durumlarıdır.

$$T = 0 \text{ yüzey } S_i \text{ boyunca} \quad \text{C.7}$$

durumu ise, *birinci tür homojen sınır koşulu* olarak adlandırılır. $T = T_s$ durumu da, sıcaklık, T_s 'yi 0 referans kabul edilerek çözümlerse, homojen sınır koşulunu sağlar.

İkinci Tür Sınır Koşulu

Sınır yüzeyi boyunca sıcaklığın birinci türevinin zaman ve uzaklığın bir fonksiyonu olarak ifade edilmesidir. Neumann tipi sınır koşuludur.

$$\frac{\partial T}{\partial n_i} = f_i(r,t) \text{ yüzey } S_i \text{ boyunca} \quad \text{C.8}$$

Burada $\partial/\partial n_i$ yüzeyden dışarı çizilen normale göre alınan türevi belirtmektedir. Bu sınır koşulu, S_i boyunca, ısı akışını tanımlamaktadır. Isı akışının 0 olduğu

$$\frac{\partial T}{\partial n_i} = 0 \text{ yüzey } S_i \text{ boyunca} \quad \text{C.9}$$

durumda, *ikinci tür homojen sınır koşulu* elde edilir ki buna örnek olarak yalıtılmış bir yüzey verilebilir.

Üçüncü Tür Sınır Koşulu

Sıcaklığın ve sıcaklığın birinci türevinin bir doğrusal kombinasyonunu veren bir ifade verilir. Cauchy tipi sınır koşuludur.

$$k_i \frac{\partial T}{\partial n_i} + h_i T = f_i(r, t) \text{ yüzey } S_i \text{ boyunca} \quad \text{C.10}$$

Birinci ve ikinci tür sınır koşulları yukarıdaki denklemde sırasıyla k_i ve h_i 'yi 0 a eşitleyerek elde edilebilir. Yukarıdaki denklem için özel bir koşul ise,

$$k_i \frac{\partial T}{\partial n_i} + h_i T = 0 \text{ yüzey } S_i \text{ boyunca} \quad \text{C.11}$$

olması durumudur. Bu durum, *üçüncü tür homojen sınır koşulu* olarak adlandırılır ve, dış ortam sıcaklığı 0°C olan bir ortama ısı kaybedildiği durumda söz konusu olmaktadır.

BOYUTSUZ ISI AKTARIMI PARAMETRELERİ

Isı aktarımı probleminde söz konusu olan parametrelerin sayısı, boyutsuz katsayılar denilen değişkenleri kullanarak azaltılmaktadır. Bunlardan bazıları şunlardır:

$$X = \frac{x}{L}, \text{ boyutsuz uzunluk} \quad \text{C.12}$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \text{ boyutsuz sıcaklık} \quad \text{C.13}$$

$$Bi = \frac{hL}{k}, \text{ Biot sayısı} \quad \text{C.14}$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2}, \text{ Fourier sayısı, boyutsuz zaman} \quad \text{C.15}$$

Fourier ve Biot sayıları ısı iletimi problemlerinde kullanılan çok önemli iki katsayıdır. Fourier sayısı, uzunluk L boyunca, birim hacimde gerçekleşen ısı iletiminin, aynı hacimde depolanan ısı miktarına oranını ifade eden bir boyutsuz bir değişkendir. Fourier sayısı arttıkça, ısı katının içinde daha derine nüfuz edecektir.

Biot sayısı ise, katı malzemenin yüzeyindeki ısı aktarımı katsayısının, katının içindeki, uzunluğu L boyunca iletimine oranıdır. Biot sayısı arttıkça, yüzeydeki ısı geçişinin, katının içerisine nüfuz etme süresi artmaktadır.

ISI AKTARIMI PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Lineer Kısmi Türevli Denklemlerde Değişkenlere Ayırma Yöntemi

Değişkenlere ayırma yöntemi, lineer kısmi türevli denklemlerin çözümü için ortaya atılmış yöntemlerin en eskilerindendir. İlk defa 18. yüzyılda Euler d'Alembert ve Bernoulli tarafından çalışılmıştır. Isı aktarımının lineer ve homojen sınır koşullu kısmi türevli denklemlerinin çözümünde, doğrudan sonuca götürür. n adet bağımsız değişken içeren kısmi türevli denklem, n adet sıradan türevli denkleme dönüştürülür ve bu arada $n-1$ adet ayırma değişkeni kabul edilir. Ortaya çıkan türevli denklemler çözülür ve bütün çözüm, bu denklemlerin lineer süper pozisyonundan yararlanılarak üretilir. Bundan sonra ise, süper pozisyonla ilgili bilinmeyen katsayılar hesaplanır. Bu yöntem, homojen olmayan sınır koşulları söz konusu olduğunda geçerli olmamaktadır. Ayrıca yine, sistem içerisinde ısı üretimi meydana geldiği durumlarda da kullanılamamaktadır.

İntegral Dönüşüm Tekniği

İntegral dönüşüm tekniği, belli lineer kısmi denklemlere, sistematik ve doğrudan çözüm getirmektedir. Hem homojen hem homojen olmayan sınır koşullarında uygulanabilmektedir çünkü denklemdaki ikinci kısmi türevler zaten bu yöntem kullanıldığında yok olmaktadır. Teknik temelini değişkenlere ayırma yönteminden almaktadır. Çözüm için gerekli olan dönüşüm çiftleri, problemle aynı bölgede tanımlı keyfi bir fonksiyon kabul edilerek bulunmaktadır.

Laplace Dönüşüm Tekniği

Laplace dönüşüm tekniği, geçici haller içeren fizik problemlerinin çözümünde sıkça kullanılmıştır, çünkü türevli denklemdeki zamana bağlı kısmi türev, Laplace dönüşümü uygulanarak yok edilebilmektedir. Zaman türevi ifadesini kaldırmak için Laplace dönüşümü yapması kolay olsa da, dönüştürülmüş fonksiyonun ters çevrilmesi, söz konusu fonksiyon Laplace dönüşüm tablolarında yok ise, o kadar kolay olmamaktadır.

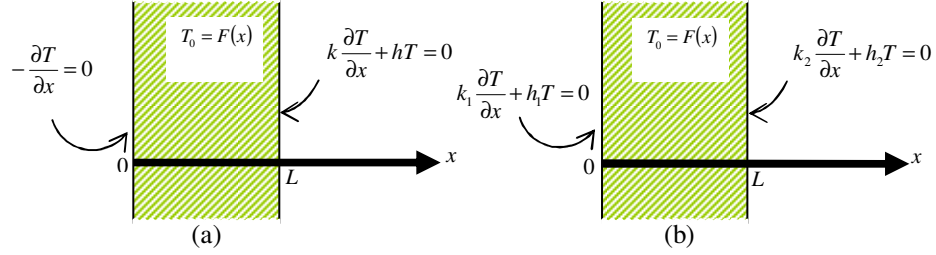
Analitik Yaklaşım Yöntemleri

Değişkenlere ayırma, integral dönüşüm tekniği ve Laplace dönüşüm teknikleri gibi analitik yöntemler, basit geometrisi bulunan, levha, küre silindir gibi cisimlerin çözümlerinde uygun yöntemler olabilmektedir. Lineer olmayan denklemler, basit birkaç durum için analitik olarak incelenebilir. Bu sebeple literatürde geçişli ve geçişsiz ısı aktarımı problemlerinde, nesne karmaşık geometriye sahip olduğunda, türevli denklem veya sınır koşulları homojen olmadığında kullanılmak üzere geliştirilmiş, birçok analitik yaklaşım tekniğine rastlanılmaktadır. Bunlar özel durumlar için geliştirilmiş çözümler olup, yaklaşımın doğruluğu, gerçek veriler ile karşılaştırılmadan bilinemeyecektir.

Sayısal Yöntemler

Karmaşık geometrilere ve sınırlara veya düzensiz sınır koşullarına veya değişken ısı özelliklere sahip ısı iletimi problemlerinde, tam çözüme ulaşmak mümkün olmamaktadır. Yaklaşım yöntemleri de uygulanamaz olabilmekte ya da yaklaşımın doğruluğu yetersiz olabilmektedir. Sonlu farklar yöntemi, ısı aktarımı probleminin çözümünde çokça kullanılan bir yöntemdir. Söz konusu yöntemin ana fikri, verilen bir noktadaki kısmi türevi sonlu farklar ile tayin edip, türevli denklemi çok sayıda cebirsel denkleme çevirmektir. Düzensiz sınırları ve alışılmadık türde ifade edilen sınır koşullarını sonlu farklar yönteminden dahi iyi ele alan sonlu elementler yöntemi ise, ısı iletimi probleminin doğru gösterimi açısından sonlu farklar kadar başarılı değildir. Olasılık ve tesadüfî hareketlere dayanan Monte Carlo yöntemi ısı aktarımı problemlerinin çözümünde uygulanabilir olmamaktadır.

D DEĞİŞKENLERE AYIRMA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLER



Şekil D.1: Levha içinde, ısı iletimi

Şekil D.1'de a ile gösterilen sınır koşulu için, değişkenlere ayırma yöntemi uygulanırken, öncelikle, $0 \leq x \leq L$ aralığında sınır koşulları ve başlangıç değerleri yazılır:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad 0 < x < L \quad t > 0 \quad \text{D.1}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \quad t > 0 \quad \text{D.2}$$

$$k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + hT = 0 \quad x = L \quad t > 0 \quad \text{D.3}$$

$$T = F(x) \quad 0 \leq x \leq L \quad t = 0 \quad \text{D.4}$$

Bu problemi çözmek için, $T(x,t)$ fonksiyonunu biri zamana, diğeri mekâna bağlı iki fonksiyonun çarpımı olarak kabul edilerek, aşağıdaki eşitliği sağlayan fonksiyonlar araştırılır.

$$T(x,t) = X(x)\Gamma(t) \quad \text{D.5}$$

(D.1) denkleminde (D.5) yerine yazılırsa;

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha \Gamma(t)} \frac{d\Gamma(t)}{dt} \quad \text{D.6}$$

bulunur. Elde edilen denklemin gerçekleşmesinin tek yolu denklemin her iki tarafının bir sabite eşit olmasıdır. Çünkü eşitliğin sol taraf mekân değişkeni x 'e bağlı iken eşitliğin sağ tarafı zaman değişkeni t 'ye bağlıdır. Her iki tarafı $-\beta^2$ 'ye eşitleyerek çözüm yapılır.

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha \Gamma(t)} \frac{d\Gamma(t)}{dt} = -\beta^2 \quad \text{D.7}$$

Böylece $\Gamma(t)$ şu denklemi sağlar:

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} + \alpha\beta^2\Gamma(t) = 0 \quad \text{D.8}$$

Denklemi çözümü şöyle olmaktadır:

$$\Gamma(t) = e^{-\alpha\beta^2 t} \quad \text{D.9}$$

Görüldüğü üzere, değişkenlere ayırım sabiti olarak $-\beta^2$ seçmiş olmak $\Gamma(t)$ teriminin $t=0$ anında 1 değerini, $t=\infty$ anında da 0 değerini almasına neden olacaktır. Böylelikle genel denklem $t=0$ anında zamanlı terimin etkisi olmadan başlangıç koşuluna, $t=\infty$ anında ise ortam sıcaklığına yakınsayacaktır.

Mekân değişkenli $X(x)$ fonksiyon ise şu denklemi sağlayacaktır:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \beta^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < L \text{ boyunca} \quad \text{D.10}$$

(D.6) denkleminde (D.2) ve (D.3) sınır koşullarını uyguladığımızda:

$$\frac{dX(x)}{dx} = 0 \quad x = 0 \quad t > 0 \quad \text{D.11}$$

$$k \frac{dX(x)}{dx} + hX(x) = 0 \quad x = L \quad t > 0 \quad \text{D.12}$$

elde edilir. Verilen bu sınır koşulları ile (D.10) denklemi bir özdeğer problemidir ve ayırım değişkeninin sadece belli birkaç değeri için çözümü vardır. Bunlar $\beta = \beta_m, m = 1, 2, 3, \dots$ olarak gösterilir ve özdeğer olarak adlandırılır. Bunlara karşılık gelen $X(\beta_m, x)$ çözümleri de problemin özfonksiyonları olmaktadır. β_m değerleri ve $X(\beta_m, x)$ fonksiyonlarının bulunduğu varsayılarak genel çözüm şu şekilde verilmektedir.

$$T(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m X(\beta_m, x) e^{-\alpha\beta_m^2 t} \quad \text{D.13}$$

Bu denklem, hem genel denklem (D.1)'i, hem sınır koşulları (D.2) ve (D.3) denklemlerini sağlamaktadır. Fakat başlangıç koşulunu (D.4) sağlamak durumunda değildir. Başlangıç koşulunun da sağlanabilmesi için gerekli c_m değeri hesaplanmalıdır. (D.13) genel denkleminde (D.4) sınır koşulu uygulandığında:

$$F(x) = T(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m X(\beta_m, x), \quad 0 < x < L \quad \text{D.14}$$

olmaktadır. Bu gösterim; $0 < x < L$ 'de tanımlı herhangi bir $F(x)$ fonksiyonunun (D.10) ile gösterilen özdeğer denkleminin $X(\beta_m, x)$ özfonksiyonları cinsinden ifade edilmiş halidir. Böyle bir gösterimin geçerli olabilmesi için yeterli şart $F(x)$ ve dF/dx 'in $0 < x < L$ aralığında sürekli veya parçalı sürekli olmasıdır. Bilinmeyen c_m sabitleri özfonksiyonlarının ortagonallığı özelliğini kullanarak bulunur:

$$\int_0^L X(\beta_m, x)X(\beta_n, x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ N(\beta_m), & m = n \end{cases} \quad \text{D.15}$$

Burada, normalizasyon integrali, norm, $N(\beta_m)$, şu şekilde tanımlanmıştır.

$$N(\beta_m) = \int_0^L [X(\beta_m, x)]^2 dx \quad \text{D.16}$$

c_m katsayılarını bulmak için (D.14) denkleminin her iki tarafını $\int_0^L X(\beta_n, x)dx$ ile çarpmak ve denklem (D.15)'de verilen ortagonallik özelliğini kullanmak gereklidir:

$$c_m = \frac{1}{N(\beta_m)} \int_0^L X(\beta_m, x)F(x)dx \quad \text{D.17}$$

(D.17) ile verilen c_m çözümü, (D.13) denklemine yazdığında genel çözüm elde edilir.

$$T(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha\beta_m^2 t} \frac{1}{N(\beta_m)} X(\beta_m, x) \int_{x'=0}^L X(\beta_m, x')F(x')dx' \quad \text{D.18}$$

LEVHA İÇİN ISI DAĞILIMI PROBLEMİ

Levha İçin Tek Boyutlu Denklemler

Şekil D.1'de (b) ile gösterilen, levha için, tek boyutlu homojen ısı aktarımının genel çözümü için,

$$X(\beta_m, x) = \beta_m \cos \beta_m x + H_1 \sin \beta_m x \quad \text{D.19}$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2} \left[(\beta_m^2 + H_1^2) \left(L + \frac{H_2}{\beta_m^2 + H_2^2} \right) + H_1 \right] \quad \text{D.20}$$

verilmektedir. β_m 'ler ise

$$\tan \beta_m L = \frac{\beta_m (H_1 + H_2)}{\beta_m^2 - H_1 H_2} \quad \text{D.21}$$

eşitliğinin pozitif kökleridir. Katsayılar $H_1 = h_1 / k_1$, $H_2 = h_2 / k_2$ ile verilmektedir.

Verilen bu çözüm, her iki sınırın h_1 ve h_2 ile ısı taşınımı olan bir dış ortamla ısı alışverişinde bulunduğu durumlar içindir. İki sınır koşulunun bundan başka sekiz farklı durumu olabilmektedir. Bu durumlar ve bu durumlarda ortaya çıkan özfonksiyonlar $X(\beta_m, x)$, normlar $N(\beta_m)$ ve pozitif kökleri özdeğerleri (β_m) veren eşitlikler Tablo D.1 ile verilmiştir.

Tablo D.1: Levha için, sınır koşulları ve koşulların özfonksiyonları, norm fonksiyonları, özdeğerleri veren eşitlikler

Tip	$x = 0$ 'daki sınır koşulu	$x = L$ 'deki sınır koşulu	$X(\beta_m, x)$	$1/N(\beta_m)$	Eşitliğin pozitif kökleri β_m
1	$-\frac{dX}{dx} + H_1 X = 0$	$\frac{dX}{dx} + H_2 X = 0$	$\beta_m \cos \beta_m x + H_1 \sin \beta_m x$	$2 \left[(\beta_m^2 + H_1^2) \left(L + \frac{H_2}{\beta_m^2 + H_2^2} \right) + H_1 \right]^{-1}$	$\tan \beta_m L = \frac{\beta_m (H_1 + H_2)}{\beta_m^2 - H_1 H_2}$
2	$-\frac{dX}{dx} + H_1 X = 0$	$\frac{dX}{dx} = 0$	$\cos \beta_m (L - x)$	$2 \frac{\beta_m^2 + H_1^2}{L(\beta_m^2 + H_1^2) + H_1}$	$\beta_m \tan \beta_m L = H_1$
3	$-\frac{dX}{dx} + H_1 X = 0$	$X = 0$	$\sin \beta_m (L - x)$	$2 \frac{\beta_m^2 + H_1^2}{L(\beta_m^2 + H_1^2) + H_1}$	$\beta_m \cot \beta_m L = -H_1$
4	$\frac{dX}{dx} = 0$	$\frac{dX}{dx} + H_2 X = 0$	$\cos \beta_m x$	$2 \frac{\beta_m^2 + H_2^2}{L(\beta_m^2 + H_2^2) + H_2}$	$\beta_m \tan \beta_m L = H_2$
5	$\frac{dX}{dx} = 0$	$\frac{dX}{dx} = 0$	$^* \cos \beta_m x$	$^* \frac{2}{L} \Rightarrow \beta_m \neq 0; \quad \frac{1}{L} \Rightarrow \beta_m = 0$	$^* \sin \beta_m L = 0$
6	$\frac{dX}{dx} = 0$	$X = 0$	$\cos \beta_m x$	$\frac{2}{L}$	$\cos \beta_m L = 0$
7	$X = 0$	$\frac{dX}{dx} + H_2 X = 0$	$\sin \beta_m x$	$2 \frac{\beta_m^2 + H_2^2}{L(\beta_m^2 + H_2^2) + H_2}$	$\beta_m \cot \beta_m L = -H_2$
8	$X = 0$	$\frac{dX}{dx} = 0$	$\sin \beta_m x$	$\frac{2}{L}$	$\cos \beta_m L = 0$
9	$X = 0$	$X = 0$	$\sin \beta_m x$	$\frac{2}{L}$	$\sin \beta_m L = 0$

*: Bu özel durumda, $\beta_0 = 0$ da, $X = 1$ için bir özdeğer olarak kabul edilir.

Yarı Sonsuz Levha İçin Tek Boyutlu Denklemler

Tek boyutlu yarı sonsuz levha için ısı aktarımı problemi Şekil D.2 ile gösterilmektedir. Isı aktarımının sınırları $0 \leq x < \infty$ ile gösterilecektir. Bu sınırlar boyunca ilk sıcaklık ise,

$$T(x, 0) = F(x) \quad 0 \leq x < \infty \text{ boyunca} \quad t > 0 \text{ iken} \quad \text{D.22}$$

ile verilmektedir. $x = 0$ 'daki sınırı $T_\infty = 0$ olan bir ortamla temas ettirilirse;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} & 0 < x < \infty \text{ boyunca} & \quad t > 0 \text{ iken} \\
-k_1 \frac{\partial T}{\partial x} + h_1 T &= 0 & x = 0 \text{ da} & \quad t > 0 \text{ iken} \\
T &= F(x) & 0 \leq x < \infty \text{ boyunca} & \quad t = 0 \text{ iken}
\end{aligned} \tag{D.23}$$

Söz konusu denklemi çözmek için değişkenlere ayırma yöntemi uygulanır:

$$T(x,t) = X(x)\Gamma(t) \tag{D.24}$$

Zamanlı terimin çözümü daha önce verildiği gibi olmaktadır:

$$\Gamma(t) = e^{-\alpha\beta^2 t} \tag{D.25}$$

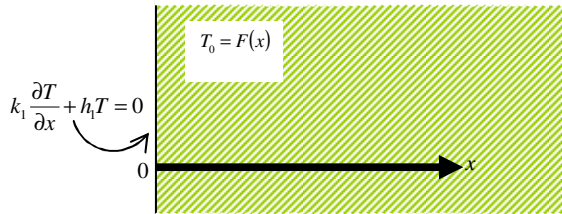
β değişkenlere ayırım sabiti olup, mekan fonksiyonu $X(\beta, x)$, şu denklemleri sağlamalıdır:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 X}{dx^2} + \beta^2 X(x) &= 0 & 0 < x < \infty \text{ boyunca} \\
-k_1 \frac{dX}{dx} + h_1 X(x) &= 0 & x = 0 \text{ da}
\end{aligned} \tag{D.26}$$

Bu iki denklemin çözümü;

$$X(\beta, x) = \beta \cos \beta x + H_1 \sin \beta x, \quad H_1 \equiv h_1 / k_1 \tag{D.27}$$

olarak verilmektedir.



Şekil D.2: Yarı sonsuz levha için gösterim

Değişkenlere ayırım sabiti β sıfırdan sonsuza kadar bütün değerleri alacaktır. $T(x,t)$ için genel çözüm; β üzerinden sonsuza integral alındığında bulunmaktadır:

$$T(x,t) = \int_{\beta=0}^{\infty} c(\beta) e^{-\alpha\beta^2 t} (\beta \cos \beta x + H_1 \sin \beta x) d\beta \tag{D.28}$$

Bu çözüm sınır koşullarını sağlamaktadır. Fakat başlangıç koşulunu sağlamak durumunda değildir. Başlangıç koşulunu da sağlaması için, başlangıç koşulunu denklemde yazıp, bilinmeyen $c(\beta)$ katsayısı için çözülmelidir.

$$F(x) = \int_{\beta=0}^{\infty} c(\beta) X(\beta, x) d\beta \quad 0 < x < \infty \text{ boyunca} \quad \text{D.29}$$

denkleminde $X(\beta, x) = \beta \cos \beta x + H_1 \sin \beta x$ 'dir ve Laplace dönüşüm tekniği ile,

$$F(x) = \int_{\beta=0}^{\infty} X(\beta, x) \left[\frac{1}{N(\beta)} \int_{x'=0}^{\infty} X(\beta, x') F(x') dx' \right] d\beta \quad \text{D.30}$$

bulunmaktadır. $X(\beta, x) = \beta \cos \beta x + H_1 \sin \beta x$ olmakta ve $\frac{1}{N(\beta)} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta^2 + H_1^2}$

olmaktadır. (D.30) ile verilen denklemin geçerli olması için $F(x)$ ve dF/dx 'in $0 < x < \infty$ içindeki her sonlu aralıkta parçalı sürekli olması gereklidir. $\int_0^{\infty} |F(x)| dx$ 'in

var olması durumunda $F(x)$, her süreksizlik noktasında kendisinin ortalaması şeklinde tanımlanmaktadır. (D.30) ve (D.29) denklemleri karşılaştırılarak bilinmeyen $c(\beta)$ katsayısı şu şekilde bulunmektedir:

$$c(\beta) = \frac{1}{N(\beta)} \int_{x'=0}^{\infty} X(\beta, x') F(x') dx' \quad \text{D.31}$$

(D.31) denklemini (D.28)'de yerine yerleştirilerek; genel çözüme varılmaktadır:

$$T(x, t) = \int_{\beta=0}^{\infty} e^{\alpha \beta^2 t} \frac{1}{N(\beta)} X(\beta, x) \int_{x'=0}^{\infty} X(\beta, x') F(x') dx' d\beta \quad \text{D.32}$$

Verilen denkleminde, söz konusu sınır koşulları için $X(\beta, x) = \beta \cos \beta x + H_1 \sin \beta x$,

$\frac{1}{N(\beta)} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta^2 + H_1^2}$ ve $H_1 = h_1 / k_1$ olmaktadır. Bu durum, $x = 0$ 'daki üçüncü tip

sınır koşulu için geçerlidir. Birinci ve ikinci tür sınır koşullarında oluşan $X(\beta, x)$ ve

$\frac{1}{N(\beta)}$ fonksiyonları Tablo D.2 ile verilmektedir.

Tablo D.2: Yarı sonsuz levha için, sınır koşulları ve koşulların özfonksiyonları, norm fonksiyonları

Tip	$x = 0$ 'daki sınır koşulu	$X(\beta_m, x)$	$1/N(\beta_m)$
1	$-\frac{dX}{dx} + H_1 X = 0$	$\beta_m \cos \beta_m x + H_1 \sin \beta_m x$	$\frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta^2 + H_1^2}$
2	$\frac{dX}{dx} = 0$	$\cos \beta_m x$	$\frac{2}{\pi}$
3	$X = 0$	$\sin \beta_m x$	$\frac{2}{\pi}$

Bu çalışmada başlangıç koşulu $F(x) = T_0$ sabit bir ısı dağılımının bulunduğu durumlar incelenecektir. $T_\infty = 0^\circ C$ dış ortam sıcaklığının olduğu ve $F(x) = T_0$ başlangıç sıcaklık dağılımı olduğu durumlar için genel çözüm denklemler Tablo D.3 ile verilmiştir.

Tablo D.3: Yarı sonsuz levha için, sabit başlangıç sıcaklığı dağılımının olduğu ve dış ortam sıcaklığının 0 derece olduğu durumlar için genel çözümler

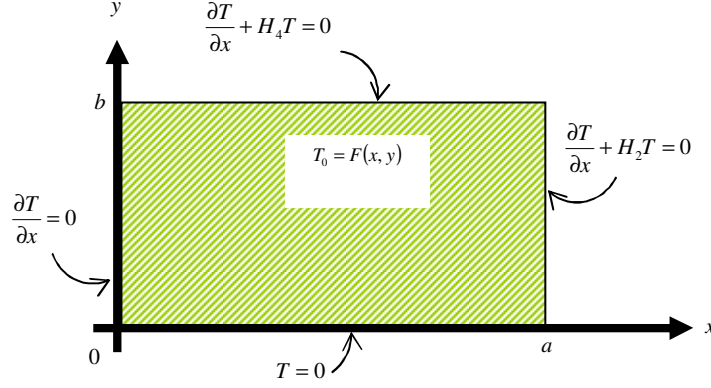
Tip	$x = 0$ 'daki sınır koşulu	$T(x, t)$
1	$-\frac{dX}{dx} + H_1 X = 0$	$T_0 \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \right) + e^{Hx + H^2 \alpha t} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} + H \sqrt{\alpha t} \right) \right) \right)$
2	$\frac{dX}{dx} = 0$	T_0
3	$X = 0$	$T_0 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \right)$

Tablo D.3 ile verilen durumların ilki, $T_\infty = 0^\circ C$ dış ortamına ısı aktarımının doğal taşınım ile gerçekleştiği durumdur. İkinci durum ise, yüzeyin yalıtılmış olduğu durumdur. Bu durumda, içerideki ısı dışarı kaçamayacağından, ilk sıcaklık dağılımı T_0 korunacaktır. Üçüncü durum ise, yüzeyin $T_\infty = 0^\circ C$ 'de sabit sıcaklıkta tutulduğu durumdur.

Levha İçin Çok Boyutlu Denklemler

Levha İçin İki Boyutlu Denklemler

Şekil D.3 ile gösterilen iki boyutlu levha için, ısı aktarımı probleminin sınır koşulları verilmiştir.



Şekil D.3: İki boyutlu ısı aktarımının değişik sınır koşulları ile gösterimi

$0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ bölgesi, başlangıçta $T = F(x, y)$ sıcaklık dağılımına sahiptir. $y = 0$ 'daki sınır $T = 0^\circ C$ 'de tutulmakta, $y = b$ 'deki sınır H_4 özellikli ortama ısı kaybetmektedir. $x = 0$ 'daki yalıtılmış olup, sınır $x = a$ 'daki sınır ise H_2 özellikli ortama ısı kaybetmektedir. Söz konusu ortamda sıcaklık dağılımını zamanın ve mekânın fonksiyonu olarak verecek $T(x, y, t)$ fonksiyonu şu şekilde hesaplanacaktır:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, & 0 < x < a & \text{ i\u00e7inde,} & t > 0 \text{ iken} \\
 \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, & x = 0 \text{ da,} & & t > 0 \text{ iken} \\
 \frac{\partial T}{\partial x} + H_2 T &= 0, & x = a \text{ da,} & & t > 0 \text{ iken} \\
 T &= 0, & y = 0 \text{ da,} & & t > 0 \text{ iken} \\
 \frac{\partial T}{\partial y} + H_4 T &= 0, & y = b \text{ de,} & & t > 0 \text{ iken} \\
 T &= F(x, y), & 0 < x < a & \text{ i\u00e7inde,} & t = 0 \text{ iken} \\
 & & 0 < y < b & &
 \end{aligned}
 \tag{D.33}$$

Denklemleri \u00e7\u00f6zmek i\u00e7in,

$$T(x, y, t) = \Gamma(t)X(x)Y(y) \quad \text{D.34}$$

şeklinde bir değişkenlere ayırma gidilmektedir. Ayırım fonksiyonları $X(x)$ ve $Y(y)$ şu şekli almaktadır:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + \beta^2 X(x) &= 0, & 0 < x < a \text{ boyunca} \\ \frac{dX}{dx} &= 0, & x = 0' \text{ de} \\ \frac{dX}{dx} + H_2 X &= 0, & x = a' \text{ da} \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + \gamma^2 Y(y) &= 0, & 0 < y < b \text{ boyunca} \\ Y &= 0, & y = 0' \text{ da,} \\ \frac{dY}{dy} + H_4 Y &= 0, & y = b' \text{ de} \end{aligned} \quad \text{D.35}$$

Zaman fonksiyonunun çözümü önceden verildiği gibi,

$$\Gamma(t) = e^{-\alpha(\beta_m^2 + \gamma_n^2)t} \quad \text{D.36}$$

olmaktadır. Çözümün tamamı şu şekilde verilmektedir;

$$T(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} e^{-\alpha(\beta_m^2 + \gamma_n^2)t} X(\beta_m, x) Y(\gamma_n, y) \quad \text{D.37}$$

$t = 0$ anında, (D.37) denklemini şu hali almaktadır:

$$F(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} X(\beta_m, x) Y(\gamma_n, y), \quad \begin{array}{l} 0 < x < a \\ 0 < y < b \end{array} \text{ içinde} \quad \text{D.38}$$

bilinmeyen c_{mn} katsayıları (D.38) denkleminin her iki tarafını sırayla $\int_0^a X(\beta_m, x) dx$ ve $\int_0^b Y(\gamma_n, y) dy$ ile çarparak hesaplanmaktadır. Özfonksiyonların ortogonalitesi kullanılarak;

$$c_{mn} = \frac{1}{N(\beta_m)N(\gamma_n)} \int_{x'=0}^a \int_{y'=0}^b X(\beta_m, x') Y(\gamma_n, y') F(x', y') dx' dy' \quad \text{D.39}$$

bulunur. Burada $N(\beta_m) \equiv \int_0^a X^2(\beta_m, x) dx$ ve $N(\gamma_n) \equiv \int_0^b Y^2(\gamma_n, y) dy$ olmaktadır.

(D.39) denkleminin (D.37)'de yerine yazılması ile çözüm şu şekilde elde edilmektedir:

$$T(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha(\beta_m^2 + \gamma_n^2)t} \frac{X(\beta_m, x)Y(\gamma_n, y)}{N(\beta_m)N(\gamma_n)} \cdot \int_{x'=0}^a \int_{y'=0}^b X(\beta_m, x')Y(\gamma_n, y')F(x', y')dx'dy' \quad D.40$$

Burada özfonksiyonlar ($X(\beta_m, x)$ ve $Y(\gamma_n, y)$), normalizasyon integralleri ($N(\beta_m)$ ve $N(\gamma_n)$) ve özdeğerlerin (β_m ve γ_n) pozitif kökleri olarak hesaplandığı fonksiyonlar Tablo D.1'den bakılabilmektedir.

Levha İçin Üç Boyutlu Denklemler

İki boyut için çözülen levhada ısı aktarımı problemi, aynı şekilde üç boyutlu bir hacim içinde de çözülebilmektedir. Bu durumda üç boyutlu levhanın tanımlanmış olduğu bölge $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ ve $0 \leq z \leq c$ ile sınırlanmaktadır. İlk haldeki sıcaklık dağılımını veren fonksiyon ise $F(x, y, z)$ olmaktadır. Hacmin altı yüzeyi için, her bir sınır alanında homojen sınır koşulları üç farklı şekilde ortaya çıkabilmektedir. x , y , z ve t 'ye bağlı, sıcaklık dağılımını veren $T(x, y, z, t)$ fonksiyonu şu şekilde değişkenlere ayrılacaktır:

$$T(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)\Gamma(t) \quad D.41$$

$T(x, y, z, t)$ için çözümler toplamı ifadesi aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$T(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} c_{mnp} e^{-\alpha(\beta_m^2 + \gamma_n^2 + \eta_p^2)t} X(\beta_m, x)Y(\gamma_n, y)Z(\eta_p, z) \quad D.42$$

Başlangıç koşulunun uygulanması ile;

$$F(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} c_{mnp} X(\beta_m, x)Y(\gamma_n, y)Z(\eta_p, z) \quad D.43$$

bulunur. Bilinmeyen katsayı c_{mnp} , her iki tarafı sırası ile $\int_0^a X(\beta_m, x)dx$, $\int_0^b Y(\gamma_n, y)dy$ ve $\int_0^c Z(\eta_p, z)dz$ ile çarparak hesaplanmaktadır. Özfonksiyonların ortogonalitesi uygulanarak;

$$c_{mnp} = \frac{1}{N(\beta_m)N(\gamma_n)N(\eta_p)} \int_{x'=0}^{\infty} \int_{y'=0}^{\infty} \int_{z'=0}^{\infty} X(\beta_m, x')Y(\gamma_n, y')Z(\eta_p, z')F(x', y', z')dx'dy'dz' \quad \text{D.44}$$

olarak bulunur. Burada $N(\beta_m) \equiv \int_0^a X^2(\beta_m, x)dx$, $N(\gamma_n) \equiv \int_0^b Y^2(\gamma_n, y)dy$ ve

$N(\eta_p) \equiv \int_0^c Z^2(\eta_p, z)dz$ olarak verilmektedir. (D.44) eşitliğinin (D.42) eşitliğinde

yerine yazılması ile birlikte; genel çözüm şöyle verilir:

$$T(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\alpha(\beta_m^2 + \gamma_n^2 + \eta_p^2)t} \frac{X(\beta_m, x)Y(\gamma_n, y)Z(\eta_p, z)}{N(\beta_m)N(\gamma_n)N(\eta_p)} \cdot \int_{x'=0}^{\infty} \int_{y'=0}^{\infty} \int_{z'=0}^{\infty} X(\beta_m, x')Y(\gamma_n, y')Z(\eta_p, z')F(x', y', z')dx'dy'dz' \quad \text{D.45}$$

Verilen bu denklemde X , Y ve Z fonksiyonları Tablo D.1 ile çözümleri sıralanmış olan özdeğer problemlerini sağlamaktadır.

SİLİNDİR İÇİN ISI DAĞILIMI PROBLEMİ

Isı aktarımının silindirik koordinatlardaki, üç boyutlu; homojen türevli denklem; şu şekilde verilmektedir.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{D.46}$$

Bu denklemde $T \equiv T(r, \phi, z, t)$ olacak şekilde verilmiştir.

$$T(r, \phi, z, t) = \psi(r, \phi, z)\Gamma(t) \quad \text{D.47}$$

şeklinde bir değişkenlere ayırma yapıldığında, (D.46) denklemi,

$$\frac{1}{\psi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{\alpha \Gamma(t)} \frac{d\Gamma(t)}{dt} = -\lambda^2 \quad \text{D.48}$$

halini almaktadır. Bu denklemin sağlanması için, her iki tarafının ayrı ayrı $-\lambda^2$ 'ye eşit olması gereklidir; çünkü söz konusu fonksiyonların değişkenleri farklıdır.

$$d\Gamma(t) + \alpha\lambda^2\Gamma(t) = 0 \quad \text{D.49}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \lambda^2 \psi = 0 \quad \text{D.50}$$

(D.50) denklemi, Helmholtz denklemidir. Bu denklem aşağıdaki şekilde değişkenlere ayrılmaktadır:

$$\psi(r, \phi, z) = R(r)\Phi(\phi)Z(z) \quad \text{D.51}$$

(D.50) tekrar yazılarak:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \lambda^2 = 0 \quad \text{D.52}$$

bulunur. Yine bu denklemin sağlanabilmesi için, her fonksiyon grubunun belli bir sabite eşit olması gerekir. Bu sabitler ve buna karşılık gelen çözümleri aşağıda sıralanmıştır.

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\eta^2 \quad Z(\eta, z): \sin \eta z \text{ ve } \cos \eta z \quad \text{D.53}$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -\nu^2 \quad \Phi(\nu, \phi): \sin \nu \phi \text{ ve } \cos \nu \phi \quad \text{D.54}$$

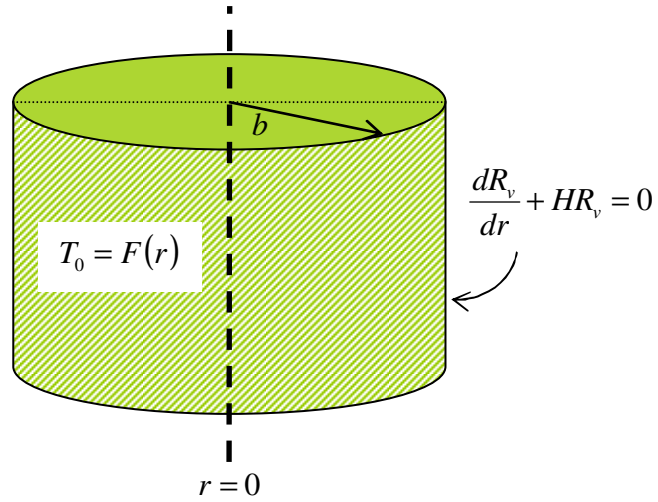
$$\frac{d^2 R_\nu}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_\nu}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) R_\nu = 0 \quad R_\nu(\beta, r): J_\nu(\beta r) \text{ ve } Y_\nu(\beta r) \quad \text{D.55}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} + \alpha \lambda^2 T = 0 \quad d\Gamma(t): e^{-\lambda^2 t} \quad \text{D.56}$$

Bu denklemlerde,

$$\lambda^2 = \beta^2 + \eta^2 \quad \text{D.57}$$

olarak verilmektedir. Değişkenlere ayırma yönteminin doğası gereği, λ^2 , ν^2 'yi içermemektedir. (D.55) denklemi, ν mertebesinde türevli Bessel denklemdir. Bu denklemin çözümleri; $J_\nu(\beta r)$ ve $Y_\nu(\beta r)$ 'dir ve sırasıyla ν mertebesinden, birinci ve ikinci tip Bessel fonksiyonları olarak adlandırılmaktadır.



Şekil D.4: Silindirik koordinatlarda, sıcaklık dağılımının r ve t 'nin fonksiyonu olduğu, üçüncü tip sınır koşuluna sahip problemin gösterilmesi

Şekil D.4'de verilen durumda; ilk sıcaklığın sadece r 'nin bir fonksiyonu olduğu ve sıcaklık dağılımının ϕ ile değişmediği durumlarda ısı aktarımı problemi şu şekilde gösterilmektedir:

$$\frac{d^2 R_v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_v}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) R_v = 0, \quad 0 \leq r < b \text{ içinde}, \quad t > 0 \text{ iken} \quad \text{D.58}$$

$$\frac{dR_v}{dr} + HR_v = 0, \quad r = b \text{ de}, \quad t > 0 \text{ iken} \quad \text{D.59}$$

$$T_0 = F(r), \quad 0 \leq r < b \text{ içinde}, \quad t = 0 \text{ iken} \quad \text{D.60}$$

(D.58) ve (D.59) ile gösterilen problem, özdeğer problemidir ve aşağıdaki denklemi, özdeğerlerin ortagonallikinden ötürü $0 \leq r < b$ aralığında sağlamaktadır;

$$\int_0^b r R_v(\beta_m, r) R_v(\beta_n, r) dr = \begin{cases} 0 & m \neq n \text{ için} \\ N(\beta_m) & m = n \text{ için} \end{cases} \quad \text{D.61}$$

Başlangıç koşulu $F(r)$ 'nin özfonksiyonlar cinsinden gösterimi ise şu şekilde olmaktadır:

$$F(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m R_v(\beta_m, r), \quad 0 \leq r < b \text{ içinde}, \quad t = 0 \text{ iken} \quad \text{D.62}$$

Bilinmeyen c_m katsayıları; (D.62) denkleminin her iki tarafını $\int_0^b r R_v(\beta_n, r) dr$ ile çarpıp (D.61) ile verilen ortagonallik özelliği kullanıldığında:

$$c_m = \frac{1}{N(\beta_m)} \int_0^b r R_v(\beta_m, r) F(r) dr \quad D.63$$

olarak bulunmaktadır. $N(\beta_m)$ normalizasyon integrali:

$$N(\beta_m) = \int_0^b r R_v^2(\beta_m, r) dr \quad D.64$$

ile verilmektedir. (D.62)'de (D.63) denklemi yerine konulduğu takdirde,

$$F(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N(\beta_m)} R_v(\beta_m, r) \int_{r'=0}^b r' R_v(\beta_m, r') F(r') dr', \quad 0 \leq r < b \text{ içinde, } t = 0 \text{ iken} \quad D.65$$

olarak bulunmaktadır. Ele alınan bu durumlarda ϕ değişkenine bağımlılık olmadığı üzere, (D.54) denkleminin çözümünden, $v = 0$ olmaktadır. Böylece r ve t 'ye bağlı sıcaklık dağılımı:

$$T(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N(\beta_m)} e^{-\alpha \beta_m^2 t} R_0(\beta_m, r) \int_{r'=0}^b r' R_0(\beta_m, r') F(r') dr' \quad D.66$$

olmaktadır. Silindirin çevresinde, söz konusu olabilecek üç tane sınır koşulu için $R_0(\beta_m, r)$ özfonksiyonlarının, $N(\beta_m)$ normalizasyon integrallerinin, ve pozitif köklerinin β_m 'leri verdiği eşitliklerin bir listesi, 'da verilmiştir.

Tablo D.4: Silindir için, özfonksiyonlar, normalizasyon integralleri ve özdeğerlerin pozitif kökleri bulunduğu eşitlikler

Tip	$r = b$ 'deki sınır koşulu	$R_v(\beta_m, r)$	$1/N(\beta_m)$	Eşitliğin pozitif kökleri β_m
1	$\frac{dR_v}{dr} + HR_v = 0$	$J_v(\beta_m, r)$	$\frac{2}{J_v^2(\beta_m b)} \cdot \frac{\beta_m^2}{b^2 \beta_m^2 - v^2}$	$\beta_m J'_v(\beta_m b) + H J_v(\beta_m b) = 0$
2	$\frac{dR_v}{dr} = 0$	$* J_v(\beta_m, r)$	$* \frac{2}{J_v^2(\beta_m b)} \cdot \frac{\beta_m^2}{b^2 \beta_m^2 - v^2}$	$* J'_v(\beta_m b) = 0$
3	$R_v = 0$	$J_v(\beta_m, r)$	$\frac{2 \beta_m^2 + H_1^2}{L(\beta_m^2 + H_1^2) + H_1}$	$J_v(\beta_m b) = 0$

*: Bu özel durumda, $\beta_0 = 0$ da, $v = 0$ olduğu hallerde, $R_0 = 1$ için bir özdeğer olarak kabul edilir.

Bessel fonksiyonlarının türevi, $J'_\nu(\beta_m, b) \equiv \left[\frac{dJ_\nu(r)}{dr} \right]_{r=\beta_m b}$ şeklinde olmaktadır ve;

$\nu = 0$ olduğu hallerde, $J'_0(\beta_m, b) \equiv \left[\frac{dJ_0(r)}{dr} \right]_{r=\beta_m b}$ şekline dönen türev ifadesi, Bessel

fonksiyonlarının özelliğinden ötürü;

$$J'_0(\beta_m b) = -\beta_m J_1(\beta_m b) \quad \text{D.67}$$

olarak gösterilebilmektedir.

KÜRE İÇİN ISI DAĞILIMI PROBLEMİ

Isı aktarımının küresel koordinat (r, θ, ϕ) sisteminde verilen üç boyutlu, homojen türevli denklemi şöyle olmaktadır:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{D.68}$$

Burada $T \equiv T(r, \theta, \phi, t)$ ile verilmektedir. Yeni bir değişkeni; $\mu = \cos \theta$ şeklinde tanımlayarak bu denklemi,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{r^2 (1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{D.69}$$

şeklinde, daha uygun bir şekilde düzenlemek mümkün olmaktadır. Yeni bir değişkeni, $V = r^{1/2} T$ şeklinde tanımlarsak, (D.69) denklemi:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{4r^2} V + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{r^2 (1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{D.70}$$

haline gelmektedir.

$$V(r, \mu, \phi, t) = \Gamma(t) R(r) M(\mu) \Phi(\phi) \quad \text{D.71}$$

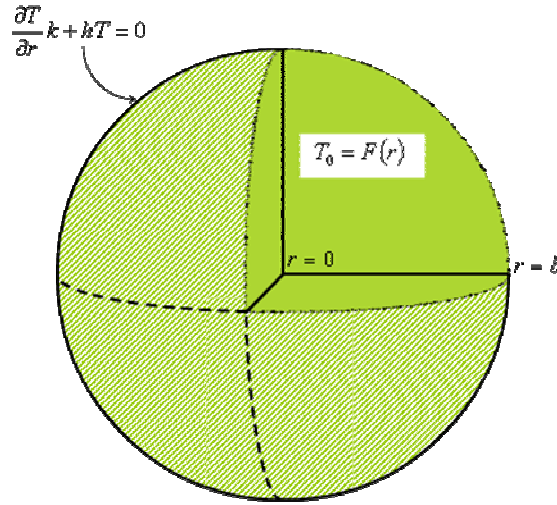
şeklinde bir değişkenlere ayırma yöntemi uygulandığında;

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} + \alpha\lambda^2\Gamma(t) = 0 \quad \text{D.72}$$

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2\Phi(\phi) = 0 \quad \text{D.73}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left[\lambda^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{r^2} \right] R = 0 \quad \text{D.74}$$

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right] M = 0 \quad \text{D.75}$$



Şekil D.5: Küresel koordinatlarda, sıcaklık dağılımının r ve t 'nin fonksiyonu olduğu, üçüncü tip sınır koşuluna sahip problemin gösterilmesi

Sıcaklığın, r 'nin ve t 'nin bir fonksiyonu olduğu, $T \equiv T(r, t)$ ve başlangıç koşulunun da $F(r)$ şeklinde r 'nin bir fonksiyonu olduğu durumlar için ısı aktarımı denklemi:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 \leq r < b \text{ i\u00e7inde} \quad \text{D.76}$$

olarak verilmektedir. Şekil D.5 ile gösterilen, üçüncü tip sınır koşuluna sahip bir küre için ısı aktarımı denklemleri şöyle verilmektedir.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rT) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < r < b \text{ i\u00e7inde}, \quad t > 0 \text{ iken} \quad \text{D.77}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + HT = 0, \quad r = b' \text{ de}, \quad t > 0 \text{ iken} \quad \text{D.78}$$

$$T = F(r), \quad 0 \leq r < b \text{ i\u00e7inde}, \quad t = 0 \text{ iken} \quad \text{D.79}$$

$U(r, t) = rT(r, t)$ olarak verilen bir U denklemi ile de\u0131şken dönüşümü yapıldığında,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad 0 < r < b \text{ içinde,} \quad t > 0 \text{ iken} \quad \text{D.80}$$

$$U = 0, \quad r = 0 \text{ da,} \quad t > 0 \text{ iken} \quad \text{D.81}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \left(H - \frac{1}{b} \right) U = 0, \quad r = b \text{ de,} \quad t > 0 \text{ iken} \quad \text{D.82}$$

$$U = rF(r), \quad 0 \leq r \leq b \text{ içinde,} \quad t = 0 \text{ iken} \quad \text{D.83}$$

şeklini almakta olan ısı aktarımı denklemleri, levha için geçerli olan, tek boyutlu zamana bağlı ısı aktarımı probleminin aynısıdır. $K \equiv \left(H - \frac{1}{b} \right)$ olarak tanımlandığında (D.82) denklemi:

$$\frac{\partial U}{\partial r} + KU = 0, \quad r = b \text{ de,} \quad t > 0 \text{ iken} \quad \text{D.84}$$

halini almaktadır. Daha önce de izah edildiği üzere bu denklemler bir özdeğer problemini ifade etmektedir ve

$$U(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha \beta_m^2 t} \frac{1}{N(\beta_m)} R(\beta_m, r) \int_{r'=0}^b R(\beta_m, r') r' F(r') dr' \quad \text{D.85}$$

ile verilmektedir. $N(\beta_m)$ normalizasyon integrali $R(\beta_m, r)$ özfonksiyonlar, $F(r)$ de başlangıç koşuludur. Bu fonksiyonların, sınır koşullarına göre değerleri, Tablo D.5'de verilmiştir.

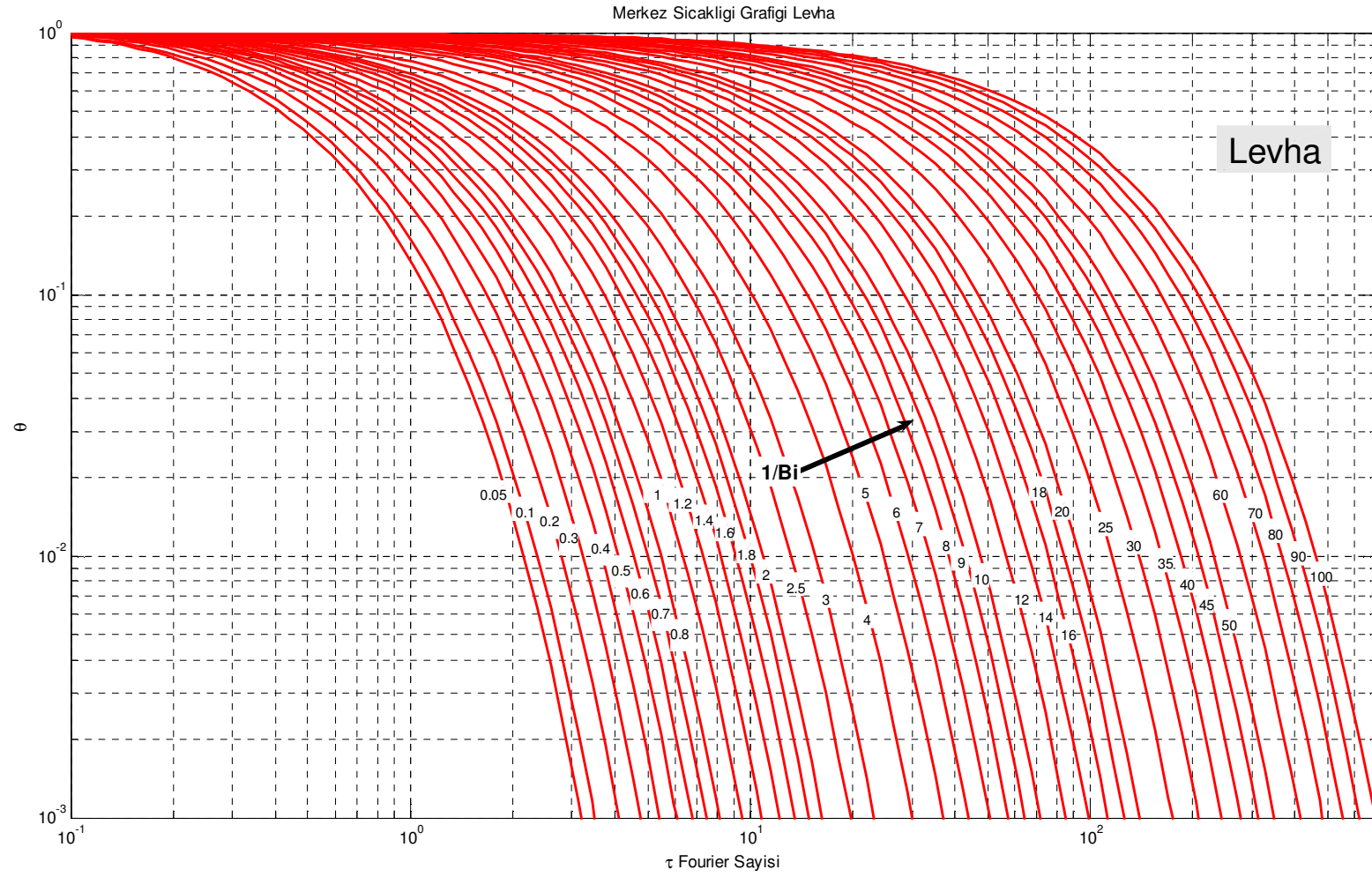
Tablo D.5: Küre için homojen sınır koşullarında özfonksiyonlar, normalizasyon integralleri ve özdeğerlerin köklerinin bulunduğu eşitlikler

Tip	$r = b$ 'deki sınır koşulu	$R(\beta_m, r)$	$1/N(\beta_m)$	Eşitliğin pozitif kökleri β_m
1	$\frac{dU}{dr} + HU = 0$	$\sin \beta_m r$	$\frac{2(\beta_m^2 + K^2)}{b(\beta_m^2 + K^2) + K}$	$\beta_m \cot \beta_m b = -K$
2	$\frac{dU}{dr} = 0$	$\sin \beta_m r$	$\frac{2}{b}$	$\cos \beta_m b = 0$
3	$U = 0$	$\sin \beta_m r$	$\frac{2}{b}$	$\sin \beta_m b = 0$

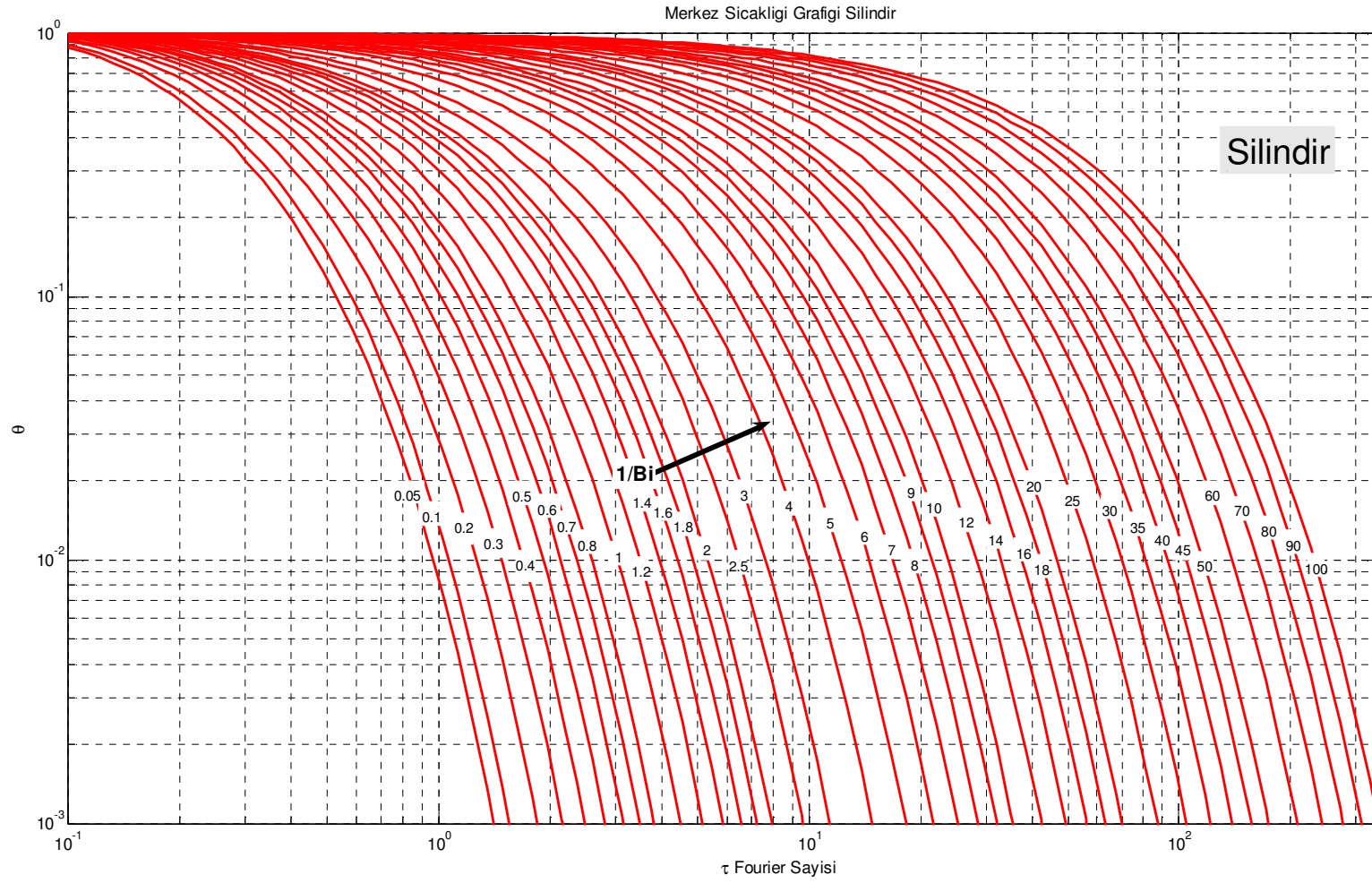
Problemlerin çözümü için (D.85) denklemi, tablo yardımı ile üç sınır koşulundan uygun olanı için oluşturulup çözülmektedir. Daha sonra bulunan sonuç, $U(r, t) = rT(r, t)$ dönüşümüne tabi tutulmaktadır.

E TEKRAR ÇİZİLEN MERKEZ SICAKLIK GRAFİKLERİ

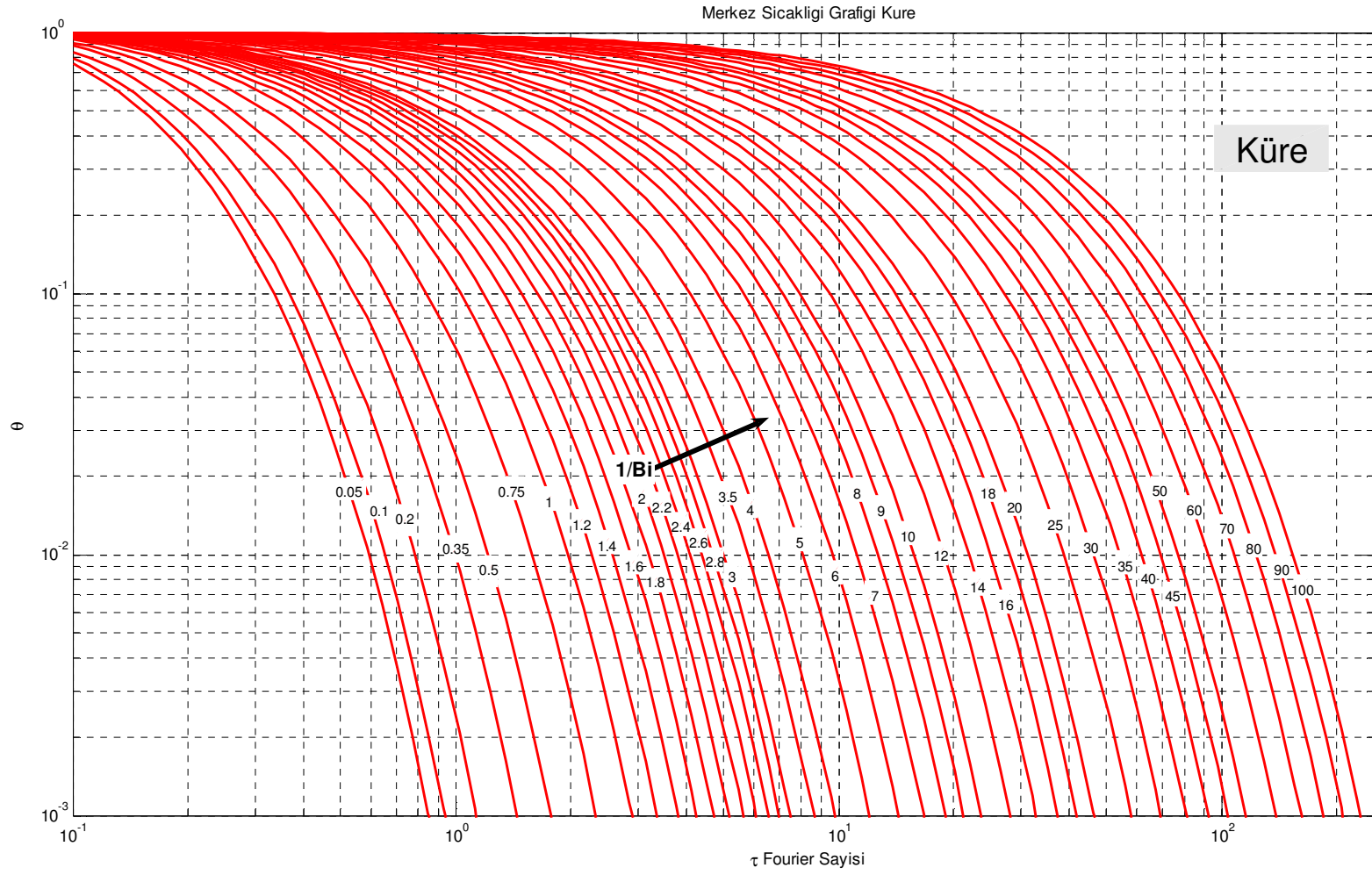
Bu bölümde, kolay okunabilmesi amacı ile Heisler'in merkez sıcaklıklarını verdiği grafikler aynı $1/Bi$ sayıları ve τ aralığı için oluşturulmuş ve okuyucuya sunulmuştur. Grafikleri oluştururken, seri açılımın ilk on terimi hesaba dâhil edilmiş olduğu için, grafikler, Heisler'in ilgili grafiklerinden daha doğru sonuçlar ifade etmektedir.



Şekil E.1: Tekrar çizilmiş merkez sıcaklığı grafiği (levha)



Şekil E.2: Tekrar çizilmiş merkez sıcaklığı grafiği (silindir)



Şekil E.3: Tekrar çizilmiş merkez sıcaklığı grafiği (küre)

ÖZGEÇMİŞ

Resul Dilsiz, 1983 yılında İzmit'te doğdu. Orta öğrenimini gördüğü Kocaeli Anadolu Lisesi'nde iken, 1997 TÜBİTAK Ulusal Matematik Olimpiyatları'nda Bronz madalya alma başarısını gösterdi. 2000 yılında İstanbul Atatürk Fen Lisesi'nden mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi, Gıda Mühendisliği Bölümü'ne girdi. 2004 yılında mezun olduktan sonra, yine aynı yıl, İstanbul Teknik Üniversitesi, Bilişim Enstitüsü, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Yüksek Lisans Programı'na kaydoldu.
